DOI:10.11918/202502051

集中阻尼弦复频率方程的代数化

郑 罡,张永顺,张晓东,王梦丽,唐春霞

(山区桥梁及隧道工程国家重点实验室(重庆交通大学),重庆 400074)

摘 要:集中阻尼弦通常作为拉索-黏性阻尼器系统的最简模型,但其本征问题长期依赖于数值解法或特定情形下的近似解析解。针对该问题的解析求解,利用指数换元法导出含有任意项集中阻尼且均布置在有理数位置的复频率方程的等价代数形式。结果表明:阻尼的分数位决定所得代数方程的次数,进而决定原方程的解支数;每一解支下均具有无穷多解,其频率的差值由代数方程的最高次数确定,振动幅值随时间保持恒定的指数衰减;在代数方程可解析求解的情况下,即可给出原方程所有闭合形式的解析解。将有理数位集中阻尼弦的本征值求解等价于相应次数的代数方程求解,即二者求解复杂度相同,分析方法不受拉索简化模型的弦长、线密度、集中阻尼个数及其阻尼系数影响,适用范围为弦上所有有理数位置。通过与文献求解方法对比,验证了本文所得结果的正确性。

关键词:张紧弦;集中黏性阻尼;复频率方程;有理数位;代数表示

中图分类号:O321 **文献标志码**:A **文章编号**:0367-6234(2026)10-0039-09

Algebraization of complex frequency equation of lumped damping string

Zheng Gang, Zhang Yongshun, Zhang Xiaodong, Wang Mengli, Tang Chunxia

(State Key Laboratory of Mountain Bridge and Tunnel Engineering (Chongqing Jiaotong University), Chongqing 400074, China)

Abstract: A lumped damping string is commonly adopted as the simplest model for cable-viscous damper systems. However, its eigenproblem has long relied on numerical solutions or approximate analytical solutions in certain specific cases. For the analytical solution to this problem, this paper employed the exponential substitution method to derive an equivalent algebraic form of the complex frequency equation containing lumped damping at arbitrary terms and rational number locations. The results demonstrate that the fractional locations of the damping govern the degree of the derived algebraic equation, which in turn determines the number of solution branches for the original equation. Within each solution branch, there exist infinitely many solutions; the differences of their frequencies are determined by the highest degree of the algebraic equation; the vibration amplitude decays exponentially with a constant rate over time. When the algebraic equation is analytically solvable, it yields all closed-form analytical solutions for the original equation. This paper demonstrates that solving the eigenproblem for a lumped damping string at rational number locations is equivalent to solving an algebraic equation of the corresponding degree, meaning that both share the same computational complexity. The analytical method is independent of the string length, linear density, number of lumped dampers, and their damping coefficients in the simplified cable model. It applies to all rational number locations on the string. The correctness of the derived results is validated through comparison with solution methods in the literature.

Keywords: tensioned string; lumped viscous damping; complex frequency equation; rational number location; algebraic representation

斜拉索因柔度大、自阻尼低等特点[1-2],在环境激励下振动问题较为突出[3-4],工程中常采用安装辅助索[5]、气动措施[6]以及安装阻尼器等措施来抑制其振动。其中,安装阻尼器措施目前研究了考虑拉索刚度[7-8]、垂度[9]等因素和不同阻尼类型[10]的系统特性,为拉索振动控制设计提供了参考依据[11]。在将这些工程对象简化为力学模型后,带有线性黏性阻尼的张紧弦(集中阻尼弦)是较为基础的研究对象[12],可作为其减振特性的对比基准[13]。而集中阻尼弦的本征问题作为理解拉索-阻尼器系统动力特性的基础问题,近年来受到持续关注[12-15]。

集中阻尼弦本征问题的研究主要集中在求解复

收稿日期:2025-02-26;**录用日期**:2025-06-06;**网络首发日期**:2025-11-12
网络首发地址:https://link.cnki.net/urlid/23.1235.t.20251112.1133.006
基金项目:国家自然科学基金(51978112,52178272);桥梁工程安全与韧性全国重点实验室开放基金(2024SKLBSR-DW014);重庆交通大学研究生科研创新项目(CYB25263)
作者简介:郑 罡(1972—),男,研究员,博士生导师
通信作者:张晓东,zhangxiaodong@cqjtu.edu.cn

本征值上。自 Carne[12] 给出小曲率假设下的近似解以来,研究人员采用类似方法得到若干理论成果。其中,Kovacs[13] 近似解出了一阶最优阻尼系数,Pacheco 等[14] 采用数值方法给出阻尼设计通用曲线,上述成果填补了早期工程应用的理论空白[15]。而随着研究深入,学者们意识到仅采用近似方法给出的一阶阻尼比来分析系统减振特性是不充分的或不完备的[16-18],开始寻找新的求解思路和方法。Krenk[16] 给出了模态阻尼比的迭代解,通过前若干阶阻尼比来评价解的精度。Main 等[17] 将复频率方程按照实部、虚部分离为两个实方程,并利用后者给出的数值结果讨论解的类型。Hoang 等[18] 和 Caracoglia 等[19] 分别将 Krenk 和 Main 的研究成果拓展到双集中阻尼弦系统,求解方法与单阻尼弦系统一致。上述成果具有重要理论价值和工程意义,如最早由 Pacheco 给出的模态阻尼曲线已写入规范[20]。

将工程对象抽象为力学模型后,首先面临运动方程的求解问题[4-5,9],其求解方法可归结为以下两种:导出超越函数形式的复频率方程,并利用该方程给出近似解或迭代解[16-19];利用数值方法直接求解运动方程,如有限元法、有限差分法等[21]。上述方法均以数值结果来分析系统振动特性,下面以前者为例展开阐述。近似解通常假设阻尼到弦端距离与弦长的比值为无穷小量,并利用该假设对方程化简后再求解[16,18],但工程中该比值通常为0.02~0.05[8-9],并非严格无穷小量,故计算精度受阻尼位置限制。迭代解通常将无阻尼弦本征值作为初始值[16,22],当迭代次数较多时可得到精度较高的数值结果,但解的完备性受原方程非线性程度和求解方法等因素影响。目前只能采用这些数值方法计算的原因之一是复频率方程中含有若干非线性项,如双曲函数项[23-24]。在形式上若实现超越方程的代数化转换,尽管可能面临求解高次方程,但仍可为解决原方程中因超越性项导致的数值多解性等问题提供新的理论路径。

近年来,有研究人员利用代数方程给出了若干闭合解[25-26],但受限于阻尼布置参数,目前仅能解析到弦上等间距设有3项阻尼的特定退化系统[27]。对于一般的集中阻尼弦系统,其代数化问题仍未得到较好解决。本研究将集中阻尼弦超越函数形式的复频率方程进行换元处理,导出其代数方程形式,并退化给出含有一项和两项阻尼时的显式表达式。将求解有理数阻尼位置的复超越方程,归结为求解相应次数的代数方程,其方程次数为有理数阻尼位置分母的最小公倍数。

关于"代数化"的术语界定:针对集中阻尼弦超越函数形式的复频率方程(含双曲函数等非多项式项),通过变量替换,将其严格转化为仅含多项式关系的代数方程形式。此过程在保持解集等价性的前提下,实现原方程超越性项消除,本文称该过程为"代数化"。

1 问题描述

1.1 运动方程

如图1所示,设有 n 项集中线性黏性阻尼的张紧弦,阻尼的线性黏滞系数 $\tilde{c}_i \geqslant 0, i = 1,2,3,\cdots,n$,线质量密度 $\tilde{m}$、张力 $\tilde{T}$、弦长 $\tilde{l}$ 均为常数,边界条件为两端固定。阻尼位置 $\tilde{x}_i$ 满足 $0 < \tilde{x}_i < \tilde{x}_{i+1} < \tilde{l}$。

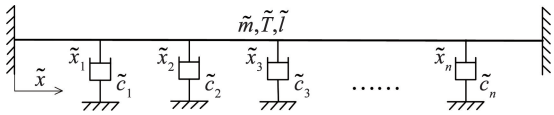


图1 设有集中黏性阻尼的张紧弦

Fig. 1 Tensioned string with lumped viscous damping

设弦的响应函数为 $\tilde{w} = \tilde{w}(\tilde{x},\tilde{t})$,则运动方程

$$-\tilde{T}\frac{\partial^2 \tilde{w}(\tilde{x},\tilde{t})}{\partial \tilde{x}^2} + \tilde{m}\frac{\partial^2 \tilde{w}(\tilde{x},\tilde{t})}{\partial \tilde{t}^2} = -\frac{\partial \tilde{w}(\tilde{x},\tilde{t})}{\partial \tilde{t}}\sum_{i=1}^{n}\tilde{c}_i\tilde{\delta}(\tilde{x}-\tilde{x}_i) \tag{1}$$

式中 $\tilde{\delta}(\tilde{x}-\tilde{x}_i)$ 为狄拉克函数。以上参数均为有量纲基本物理量。式(1)两端同乘 $\tilde{l}^2/\tilde{T}$,并换元得

$$\tilde{t} = t\sqrt{\frac{\tilde{m}\tilde{l}^2}{\tilde{T}}} = \frac{t}{\tilde{\omega}},\ \tilde{x} = x\tilde{l},\ \tilde{c}_i = c_i\sqrt{\tilde{m}\tilde{T}},\ \tilde{w} = w\tilde{l} \tag{2}$$

式中不加上标的物理量为无量纲参数。将式(2)代入式(1)得

$$-\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = -\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}\sum_{i=1}^{n}c_i\delta(x-x_i) \tag{3}$$

该式即为集中阻尼弦的无量纲运动方程。式(3)的解通过式(2)进行线性变换可转化为式(1)的解。

1.2 复频率方程

设式(3)位移函数

$$w(x,t) = \phi(x)\cdot e^{pt} \tag{4}$$

式中:$\phi(x)$ 为复本征函数,p 为复本征值。将式(4)代入式(3)得到关于 $\phi(x)$ 的常微分方程,即

$$-\phi''(x) + p^2\phi(x) = -p\phi(x)\sum_{i=1}^{n}c_i\delta(x-x_i) \tag{5}$$

式(5)解可由格林函数的和函数表示[28]。设权

重为 $-p\phi(x_i)$，式(5)中 $\phi(x)$ 可以表示为

$$\phi(x) = -p\sum_{i=1}^{n}\phi(x_i)G_i(x) \tag{6}$$

式中 $G_i(x)$ 为零边界条件下的阻尼系数 c_i 非 0 时对应的格林函数。$G_i(x)$ 作为式(6)的和项应满足

$$-G_i''(x)+p^2G_i(x)=c_i\delta(x-x_i) \tag{7}$$

对式(7)行拉氏正、逆变换，并利用零位移边界条件，得到格林函数的显式表达式

$$G_i(x)=[c_i/(p\sinh p)]\sinh p(1-x_i)\sinh px - [\mu(x-x_i)c_i/p]\sinh p(x-x_i) \tag{8}$$

式中 $\mu(x-x_i)$ 为单位阶跃函数。令式(6)在阻尼位置 $x=x_r$ 处取值，移项整理可得

$$\sum_{i=1}^{n}[\delta_{ir}+pG_i(x_r)]\cdot\phi(x_i)=0 \tag{9}$$

式中 δ_{ir} 为克罗内克尔记号。式(9)为位移协调条件可表示为关于 $\phi(x_i)$ 的 n 元一次齐次线性方程组，系数矩阵为

$$\boldsymbol{H}+\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix},a_{ir}=h_{ir}+\delta_{ir} \tag{10}$$

式中：$\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵；矩阵 $\boldsymbol{H}$ 内元素 $h_{ir}=pG_i(x_r)$，其物理意义为第 i 项阻尼所引起的规范化的位移函数在弦上第 r 项阻尼处的取值。式(9)存在非平凡解的充要条件是式(10)的行列式为 0，即

$$\det(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{I})=0 \tag{11}$$

式(11)即为集中阻尼弦超越函数形式的复频率方程，求解该式可以得到第 I 类本征解[23]。

1.3　代数化问题

注意到式(11)中参数可分为 3 类，即阻尼系数、阻尼位置以及复本征值，故可将式(11)记为

$$g_n(c_1,\cdots,c_n;x_1,\cdots,x_n;p)=0 \tag{12}$$

下标 n 表示阻尼数量。当阻尼系数、位置确定后，方程中只含未知量 p。若找到函数关系 $y=y(p)$，代入式(12)使其变成如下形式：

$$f_n(y)=b_0+b_1y+b_2y^2+\cdots+b_sy^s=0 \tag{13}$$

则复频率方程可由超越函数形式转化为代数函数形式，式中 s 为代数方程的最高次数。

代数化问题的提法为：对式(12)中超越函数进行形式变换，再对未知量 p 换元，并给出换元后的新方程，且该方程应满足式(13)形式。

2　复频率方程的代数化表示

设由关于复本征值 p 的双曲函数所组成的 n 阶对角矩阵

$$\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}\sinh p&&\\&\ddots&\\&&\sinh p\end{bmatrix} \tag{14}$$

式(10)系数矩阵的等号两端左乘式(14)，以化简元素 a_{ir} 中的分母部分。将系数矩阵表示为

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{I}) \tag{15}$$

式(15)中，系数矩阵的通项为超越函数。若将通项由超越项换元表示为代数项，则复频率方程可由超越方程化为代数方程形式。

2.1　系数矩阵中通项的代数化表示

设式(15)中系数矩阵 $\boldsymbol{D}$ 的通项为 d'_{ir}，则

$$d'_{ir}=c_i\sinh p(1-x_i)\sinh px_r - \mu_{ir}c_i\sinh p\sinh p(x_r-x_i)+\delta_{ir}\sinh p \tag{16}$$

式中 μ_{ir} 为 $\mu(x_r-x_i)$ 的简写，下标 i、r 分别表示通项所在行、列。当所有的阻尼位置 $x_i(0<x_i<1)$ 均为有理数时，x_i 可表示为

$$x_i=\frac{m'_i}{s'_i},i=1,2,\cdots,n \tag{17}$$

式中：m'_i，s'_i 均为正整数，且有 $m'_i<s'_i$，坐标 x_i 为最简分式，无法约分。特别地，约定 $x_0=0$，$x_{n+1}=1$。

设 s 为所有 s'_i 的最小公倍数，记系数 q_i 满足

$$s=q_is'_i,i=1,2,\cdots,n \tag{18}$$

令 $m_i=q_im'_i$，则 x_i 亦可表示为

$$x_i=\frac{m'_i}{s'_i}=\frac{q_im'_i}{q_is'_i}=\frac{m_i}{s},i=1,2,\cdots,n \tag{19}$$

规定当 $i<r$ 时，阻尼位置满足 $0<x_i<x_r<1$。易知 $m_i<m_r$ 恒成立。

将式(19)代入式(16)并记 $z=p/s$，则有

$$d'_{ir}=c_i\sinh(s-m_i)z\sinh m_rz - \mu_{ir}c_i\sinh sz\sinh(m_r-m_i)z+\delta_{ir}\sinh sz \tag{20}$$

将式(20)中双曲函数展开为指数函数形式，并令 $u=s-m_i+m_r$，则有

$$d'_{ir}=c_i\frac{\mathrm{e}^{-uz}}{4}[\mathrm{e}^{2uz}-\mathrm{e}^{2(s-m_i)z}-\mathrm{e}^{2m_rz}+1]- \mu_{ir}c_i\frac{\mathrm{e}^{-uz}}{4}[\mathrm{e}^{2uz}-\mathrm{e}^{2sz}-\mathrm{e}^{2(m_r-m_i)z}+1]+ \delta_{ir}\frac{\mathrm{e}^{-sz}}{2}(\mathrm{e}^{2sz}-1) \tag{21}$$

式中除 e^{-uz} 和 e^{-sz} 的指数部分为负值外，其他指数项形式上均为正值。将 d'_{ir} 所在列同乘 $2\mathrm{e}^{(s+m_r)z}$、所在行同乘 $2\mathrm{e}^{-m_iz}$，记 $d_{ir}=4\mathrm{e}^{uz}d'_{ir}$，则式(21)化为

$$d_{ir}=c_i[\mathrm{e}^{2uz}-\mathrm{e}^{2(s-m_i)z}-\mathrm{e}^{2m_rz}+1]- \mu_{ir}c_i[\mathrm{e}^{2uz}-\mathrm{e}^{2sz}-\mathrm{e}^{2(m_r-m_i)z}+1]+ 2\delta_{ir}\mathrm{e}^{(m_r-m_i)z}(\mathrm{e}^{2sz}-1) \tag{22}$$

应注意式(11)要求式(15)的行列式必须为 0，而即使在复域内 $4\mathrm{e}^{uz}$ 为 0 都没有解。因此，由 d_{ir} 所

构成矩阵的行列式和式(15)的行列式结果相同。式(22)各项因式均为指数函数的正整数次方。设

$$y = \mathrm{e}^{2z} = \mathrm{e}^{2p/s} \tag{23}$$

则通项变为关于 y 的函数,即

$$\begin{aligned} d_{ir}(y) = {} & c_i(y^u - y^{s-m_i} - y^{m_r} + 1) - \\ & \mu_{ir}c_i(y^u - y^s - y^{m_r-m_i} + 1) + \\ & 2\delta_{ir}y^{(m_r-m_i)/2}(y^s - 1) \end{aligned} \tag{24}$$

根据所在行、列不同,式(24)又可具体表示为

$$d_{ir}(y) = \begin{cases} c_i(y^s - y^{s-m_i} - y^{m_r} + y^{m_r-m_i}), & i < r \\ (c_i + 2)y^s - c_i y^{s-m_i} - c_i y^{m_i} + c_i - 2, & i = r \\ c_i(y^u - y^{s-m_i} - y^{m_r} + 1), & i > r \end{cases} \tag{25}$$

至此,通项已由式(16)超越函数形式转化为式(25)关于 y 的代数函数形式。应注意通过上述换元过程将超越函数转化为关于新变量的代数函数,只是函数形式在发生改变,频率方程本身仍为复超越方程,其超越函数的本质并未改变。

2.2 复频率方程的代数函数形式

式(25)表示,$d_{ir}(y)$ 为代数项且不恒为 0,则由其组成的行列式必为代数方程。将式(25)代入式(15)并计算行列式,有

$$f_n(y) = \sum_{r_1,r_2,\cdots,r_n} (-1)^{\tau} d_{1r_1}(y)d_{2r_2}(y)\cdots d_{nr_n}(y) = 0 \tag{26}$$

式中:$r_1, r_2, \cdots, r_n$ 为自然数 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列,τ 为该排列的逆序数。至此,复频率方程已由式(10)的超越方程形式换元为式(26)关于新未知量 y 的代数方程形式。

前文提到,系数矩阵($\boldsymbol{H} + \boldsymbol{I}$)左乘了对角阵 $\boldsymbol{S}$,则式(26)中存在满足 $\sinh p$ 为 0 的解,是由代数化过程产生,这部分解不产生衰减振动。

当含有少数项阻尼时,可先推导式(11)的显式方程再进行代数化。以系统中含有一项、两项阻尼为例进行说明,当系统中含有两项阻尼时,无量纲化后系统形式如图 2 所示。

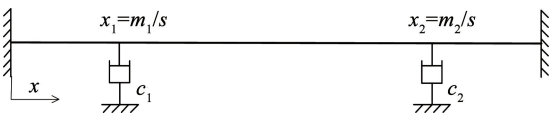


图 2 无量纲化后的双集中阻尼弦

Fig.2 String with double-lumped damping after non-dimensionalization

根据式(12)记号规则,图 2 系统超越形式的复频率方程简记为 $g_2(p)$。根据式(11)有

$$\begin{aligned} g_2(p) = {} & c_1c_2\sinh px_1\sinh px_2^*\sinh p(x_2 - x_1) + \\ & \sum_{i=1}^{2} c_i\sinh px_i\sinh px_i^* + \sinh p = 0 \end{aligned} \tag{27}$$

式中 $x_i^* = 1 - x_i$。将式(19)有理数阻尼位置坐标代入式(27),并根据式(23)换元过程,式(26)可退化为

$$f_2(y) = \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{y} = 0 \tag{28}$$

式中系数向量 $\boldsymbol{c}$ 和未知量组成的向量 $\boldsymbol{y}$ 分别为

$$\boldsymbol{c} = [C_1C_2, -c_1C_2, c_2C_1', -C, C, -c_2C_1, c_1C_2', -C_1'C_2'] \tag{29}$$

$$\boldsymbol{y} = [y^s, y^{s-m_1}, y^{s-m_2}, y^{s-m_2+m_1}, y^{m_2-m_1}, y^{m_2}, y^{m_1}, 1]^{\mathrm{T}} \tag{30}$$

式(29)中,C, C_i, C_i' 作为简写分别表示

$$C = c_1c_2, C_i = c_i + 2, C_i' = c_i - 2, i = 1, 2 \tag{31}$$

式(28)为关于 y 的单变量实系数一元 s 次代数方程,即双集中阻尼弦复频率方程的代数形式。对于单集中阻尼弦,由式(25)中 $i = r$ 子式得

$$f_1(y) = (c_1 + 2)y^s - c_1y^{s-m_1} - c_1y^{m_1} + c_1 - 2 = 0 \tag{32}$$

该方程最早由文献[25]给出。易证,式(32)也可由式(28)中其中一项阻尼系数为 0 而退化得到。

通过式(28)、(32)可知,有理数阻尼位置(最简分式)分母的最小公倍数,即为代数方程的最高次数。因此,求解有理数位置的复频率方程可归结为求解相应次数的代数方程,其方程次数由不可约分数的分母决定。

根据式(23),可得复本征值 p 的表达式,其实部、虚部分别可记为

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(p_j) &= \frac{s}{2}\ln|y_j| \\ \mathrm{Im}(p_j) &= \frac{s}{2}\arg(y_j) + sk\pi \end{aligned} \tag{33}$$

式中:$\arg(\cdot)$ 为主幅角函数,常数 $k = 0, \pm 1, \cdots$,下标 j 表示式(26)中方程根的次序。

注意到当 $y = 1$ 时,式(28)、(32)均恒为 0,则分解因式($y - 1$)后方程次数降 1 次,即一元 $s - 1$ 次方程。则 $s \leqslant 5$ 时,利用求根公式可给出所有闭合解;当 $s > 5$ 时,除少数情况外仍需采用数值方法求解。

3 极限情况下的代数化表示

讨论如下极限情况:所有阻尼系数均趋于 0、均趋于无穷大。首先说明,二者在工程应用中一般均不会出现,而该力学模型本身并不排斥这类极限情形。为讨论完整起见,进行该类情况的代数化过程分析是有必要的。

3.1 阻尼为 0 时的代数方程

当所有阻尼的阻尼系数 $c_i, i = 1, \cdots, n$ 均趋于 0 时,集中阻尼弦退化为无阻尼弦,其相应的运动方程、复频率方程及其本征函数也依次分别退化。

此时,式(7)可退化为齐次线性微分方程:

$$-G_i''(x)+p_\alpha^2 G_i(x)=0 \tag{34}$$

式中使用 α 标识无阻尼弦。式(34)的通解可表示为

$$G_i(x)=u_1 e^{p_\alpha x}+u_2 e^{-p_\alpha x} \tag{35}$$

式中 u_1,u_2 为任意常数。利用零位移边界条件，排除 $G_i(x)\equiv 0$ 的平凡解，得

$$e^{2p_\alpha}-1=0 \tag{36}$$

式(36)为无阻尼弦的频率方程，该式亦可直接由波动方程导出，不再赘述。注意到若对式(36)中指数项进行换元，该式同样可表达为代数方程形式，这表明无阻尼弦的本征解同样可由代数方程给出。在复域内，式(36)的解可表示为

$$p_\alpha=\mathrm{j}\cdot\kappa_\alpha\pi,\ \kappa_\alpha=\pm1,\pm2,\cdots \tag{37}$$

在任意运动阶次下，式(37)的实部均为 0，表明只存在无衰减的自由振动。下面讨论无阻尼弦的本征函数。任意阻尼 c_i 均趋于 0 时，式(5)右端项为 0，可解得本征函数

$$\phi_\alpha(x)=\sinh(p_\alpha x)=\mathrm{j}\cdot\sin\kappa_\alpha\pi x \tag{38}$$

由以上推导可知，式(37)存在这样一部分解，其满足式(38)在所有阻尼位置处均为 0，即

$$\phi_{\alpha\nu}(x_i)=0,\ i=1,2,\cdots,n \tag{39}$$

式中使用 ν 标识，这部分解必可表示为

$$q_{\alpha\nu}=\mathrm{j}\cdot\kappa_{\alpha\nu}\pi,\ \kappa_{\alpha\nu}=\pm s,\pm 2s,\cdots \tag{40}$$

即在无阻尼弦本征解中满足在所有阻尼处本征函数均为驻点(如图 3)的那部分解。这些运动阶次对应的阻尼处位移、速度和阻尼力恒为 0，即为集中阻尼弦的第Ⅱ类本征解[23]。易知，这类解作为式(37)的部分解也必然可由式(36)给出。

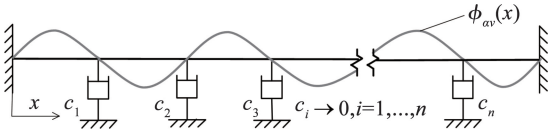


图 3　第Ⅱ类本征解对应的本征函数

Fig. 3　Eigenfunctions corresponding to type Ⅱ eigensolutions

应当注意，第Ⅱ类解与阻尼位置有关，即有理数阻尼位置分母的最小公倍数 s。当任一阻尼位置为无理数时，在标准代数框架下 s 并不存在，因此，采用式(23)换元方法不能给出式(40)。这表明当存在无理数阻尼位置时，第Ⅱ类解将全部消失。

3.2　阻尼无穷大时的代数方程

当阻尼系数趋近无限大时，通过数学归纳法可得该极限条件下式(12)的退化方程，即

$$\lim_{c_1,\cdots,c_n\to+\infty} g_n(p)=\prod_{r=i+1,0\leqslant i\leqslant n}\sinh p(x_r-x_i)=0 \tag{41}$$

式(41)为 $n+1$ 项双曲函数相乘形式，依次分别对应弦上自左向右 $n+1$ 个弦段。当仅含一项阻尼时，易证式(41)可退化为文献[17]所给形式。对式(41)代数化，具体如下。

将式(19)代入式(41)，并根据式(23)对其进行指数换元，则式(41)亦可表示为 $n+1$ 项因式相乘的代数形式，即

$$\lim_{c_1,\cdots,c_n\to\infty} f_n(y)=\prod_{r=i+1,0\leqslant i\leqslant n}(y^{m_r-m_i}-1)=0 \tag{42}$$

式中约定 $m_0=0,m_{n+1}=s$。式(42)可求出 $n+1$ 组方程根，依次分别对应弦上自左向右各弦段的本征解。

易知各弦段内均只存在无衰减自由振动，且振幅、相位等动力特性相互独立。阻尼所在位置作为各弦段端点，此处本征函数及其对应的挠曲函数均恒为 0，即为本征函数对应挠曲函数的驻点且不随运动阶次改变。若认为阻尼位置处形成固定边界条件，则原系统的振动响应大致如图 4 所示，但其合理性有待充分研究。

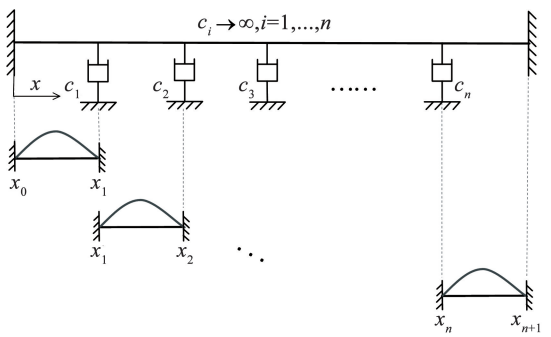


图 4　阻尼系数趋于无穷大时的振动响应

Fig. 4　Vibration response at condition of damping coefficient tending to infinity

为避免概念混淆，此处需明确，该极限情况下阻尼处虽为挠曲函数的驻点，但并不属于第Ⅱ类解，应认为是第Ⅰ类解的特殊情形，二者振动现象存在明显区别。第Ⅱ类解的本征函数在驻点处是连续且光滑的，被驻点分开的各段弦振动并不独立；而当阻尼为无穷大时，各弦段的振动相互独立。下文通过具体解析算例展开讨论。

4　五分点对称双集中阻尼弦

前面提到，当 $s\leqslant 5$ 时，可给出所有闭合解。因此，以五分点对称双集中阻尼弦系统(简称 S5)为例，讨论其代数化过程及其解的结构与性质。

系统 S5 两项阻尼的位置依次为 1/5、4/5，令阻尼系数相等并记为 c，以简化计算。设该系统复频率方程的超越形式和代数形式分别为 $g_{2,5}(p)$ 和 $f_{2,5}(y)$。根据式(27)可得

$$g_{2,5}(p)=c^2\sinh^2\frac{p}{5}\sinh\frac{3p}{5}+$$

$$2c\sinh\frac{p}{5}\sinh\frac{4p}{5}+\sinh p=0 \qquad (43)$$

对式(43)进行式(23)换元过程,则可将其化为关于新变量的代数方程,即

$$f_{2,5}(y)=b_0+b_1y+b_2y^2+b_3y^3+b_4y^4=0 \quad (44)$$

其中,系数 $b_i, i=0,\cdots,4$ 分别为

$$b_0=(c-2)^2, b_1=4-c^2, b_2=4,$$
$$b_3=4-c^2, b_4=(c+2)^2 \qquad (45)$$

式(44)中排除了 $y=1$ 的解,该式亦可由式(28)退化给出。特别地,当 c 趋于无穷大时,式(44)可退化为

$$\lim_{c\to\infty} f_{2,5}(y)=(y^2+y+1)(y-1)^2=0 \quad (46)$$

该式亦可由式(42)直接退化导出,不再赘述。

利用一元四次方程的求根公式,可得式(44)中未知量 y 关于 c 的根式解。利用式(33)的回代过程可给出系统 S5 的所有闭合解,即

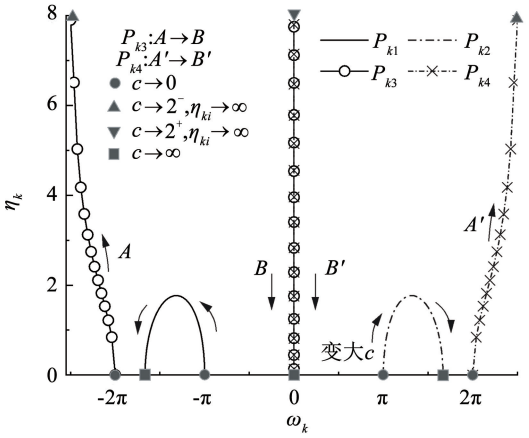
$$\sigma_{kj}=\mathrm{Re}(p_{kj})=\frac{5}{2}\ln|y_j|$$

$$\omega_{kj}=\mathrm{Im}(p_{kj})=\frac{5}{2}\arg(y_j)+5k\pi \qquad (47)$$

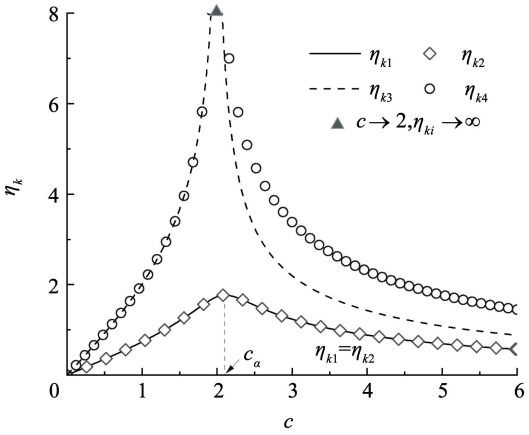
式中 $j=1,\cdots,4$。定义 $\eta_{kj}=-\sigma_{kj}$,表示系统 S5 的衰减特性。由式(47)可知,该解析算例的独立解支数符合前文一般性推导结果。

通过 Matlab R2014b 的 root 函数求解式(44),或直接采用 Maple 软件中的 solve 命令解出式(44)的符号解,再根据式(47)绘制了复本征值随阻尼系数的变化曲线。图 5(a)为 $\omega_{kj}-\eta_{kj}$ 平面上复本征值的演化轨迹,图 5(b)和 5(c)分别考察 η_{kj}、ω_{kj} 随阻尼系数的变化趋势。应注意图 5 为系统 S5 的其中一组解,即式(47)中常数 k 为 0 的那部分解。

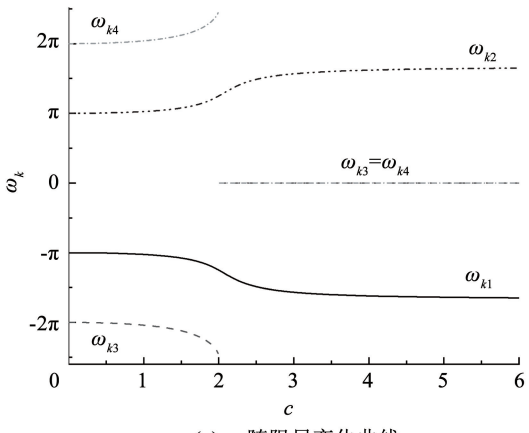
由图 5(a)和 5(c)可知,频率 ω_{k1} 和 ω_{k2} 随阻尼 c 连续变化,且不发生跳跃现象;由图 5(b)可知,η_{k1} 和 η_{k2} 曲线完全重合且不随阻尼系数改变。当阻尼 c 小于 c_α 时,η_{k1} 和 η_{k2} 单调递增并在 c_α 处取得最大值,表明在该运动阶次下,此处阻尼特性大于相邻区间;过该点后,η_{k1} 和 η_{k2} 单调递减,并在 c 趋于无穷大时趋于 0。其对应的频率 ω_{k1} 和 ω_{k2} 沿横坐标轴对称(图 5(c)),即这两支频率均互为相反数,同样不随阻尼系数改变。表明 p_{k1} 和 p_{k2} 互为共轭解支对,其对应的方程根 y_1 和 y_2 必为共轭复根对,不随阻尼区间改变。与 η_{k1} 和 η_{k2} 重合且不随阻尼改变不同,η_{k3} 和 η_{k4} 关系依赖阻尼区间;频率 ω_{k3} 和 ω_{k4} 同样表现出区间依赖特征。



(a) ω_k-η_k平面上解的变化轨迹



(b) η_k随阻尼变化曲线



(c) ω_k随阻尼变化曲线

图 5 系统 S5 复本征值演化轨迹

Fig. 5 Evolution trajectory of complex eigenvalues of system S5

由图 5(b)可知,当 $c<2$ 时,η_{k3} 和 η_{k4} 完全重合并单调递增;在 c 趋于 2 时,二者均趋于无穷大;当 $c>2$ 时,二者均单调递减但不再重合($\eta_{k3}<\eta_{k4}$),并在 c 趋于无穷大时趋于 0。由图 5(a)和 5(c)可知,频率 ω_{k3} 和 ω_{k4} 表现出不同于 ω_{k1} 和 ω_{k2} 的“阶跃”现象。在 c 取 2 的左右两端,ω_{k3} 和 ω_{k4} 分别由 $\pm 2.5\pi$ 同时突变为 0,除该点外,二者在 c 为 2 的相邻区间均保持连续。特别地,在 c 大于 2 时,ω_{k3} 和 ω_{k4} 恒为 0,表明在该运动阶次下表现出非振荡特性,且与 η_{kj}

无关。上述分析表明，在 c 为 2 的左右区间，p_{k3} 和 p_{k4} 由共轭解支对过渡为互不相等且频率为 0 的实本征值，方程根 y_3 和 y_4 则必由共轭复根对过渡为互不相等的正实根。

本文方法在技术路线上应认为与传统解法并行，下文展开对比讨论。

5　与传统解法的对比和讨论

本节讨论代数化方法与传统近似解法、迭代法的对比与联系，即引言中提到的第 1 种求解方法，并综合评述。

5.1　与近似解析法对比

集中阻尼弦复频率方程的代数化求解与传统近似解析法相比，关键区别在于摒弃了后者对原方程中物理参数的假定，将超越方程转化为代数问题。换元后代数方程完全携带原方程信息，原方程的求解精度受代数方程的解精度控制。

图 6 给出了本文方法与传统近似解法、迭代法的对比，后二者分别采用文献[18]方法和 Newton-Raphson 法（N-R 法，求解原超越方程）。其中，图 6(a)固定模态阶次为第 1 阶，比较不同阻尼位置解的演化轨迹。横、纵坐标分别包含频率、阻尼比信息，与文献[18]配图变量一致；ε 表示阻尼位置至弦端距离与弦长的比值，即传统近似解在对方程简化时认为是小量的参数。

通过图 6(a)对比可知，各方法所得结果随阻尼系数的演化轨迹基本一致。但应注意近似解与本文方法存在一定差值，且随 ε 增大呈逐渐变大趋势。以本文方法计算结果为参考，当 ε 分别取为 0.02、0.03、0.04 和 0.05 且 c 均取 1 时，φ 的相对差值（百分比，下同）为 9.007、14.240、19.942 和 26.116，ξ 的相对差值为 0.069、0.087、0.039 和 0.109；c 均取 10 时，φ 的相对差值为 1.838、2.077、6.196 和 9.666，ξ 的相对差值为 3.244、6.160、7.955 和 8.623。这是由近似解法在建立方程时所导致，应认为是方程简化过程中产生的近似误差。模态阶次越高则近似误差越大，文献[16]中式(19)也会导致该现象出现。但与此同时，由于近似解法只涉及阻尼参数的代数运算，其求解效率相对较高。

5.2　与传统迭代法对比

图 6(a)中本文方法和迭代法对比可知，在任意阻尼位置下二者所得结果均吻合较好，而理论上迭代解的无穷阶逼近可得到精度较高的计算结果。因此，相较而言，在同等算力下本文方法同样可获得与之精度相当的解。

图 6(b)固定阻尼参数的具体取值，比较本文方法与迭代法随不同模态阶次（式(33)主幅角内）的解的精度。其中，前者采用 Matlab R2014b 的 root 函数求解；迭代法以无阻尼弦本征值为初始值，最大迭代次数为 100，收敛标准为 1E-6。与图 6(b)中迭代法可给出的解相比，在计算机数值计算精度范围内本文方法所得结果均较为契合。同时注意到，由于迭代法受限于初始值选择，而这本身又存在一定的经验性，若选择不当可能会导致收敛速度较慢，甚至导致解的发散；其次，解的完备性问题受原方程非线性程度和求解方法等因素影响（实际上，传统数值解法难以证明解的完备性）。在图 6(b)中，本文方法所得的 $p_{k,A}$、$p_{k,B}$ 二解支，本次迭代无法给出。因此，在未明确解的结构的前提下，迭代求解很难将初始值选定在这类解支附近。需强调，$p_{k,A}$ 作为实数解，对应系统的非振荡衰减运动，进行复模态叠加时该解支较为关键。

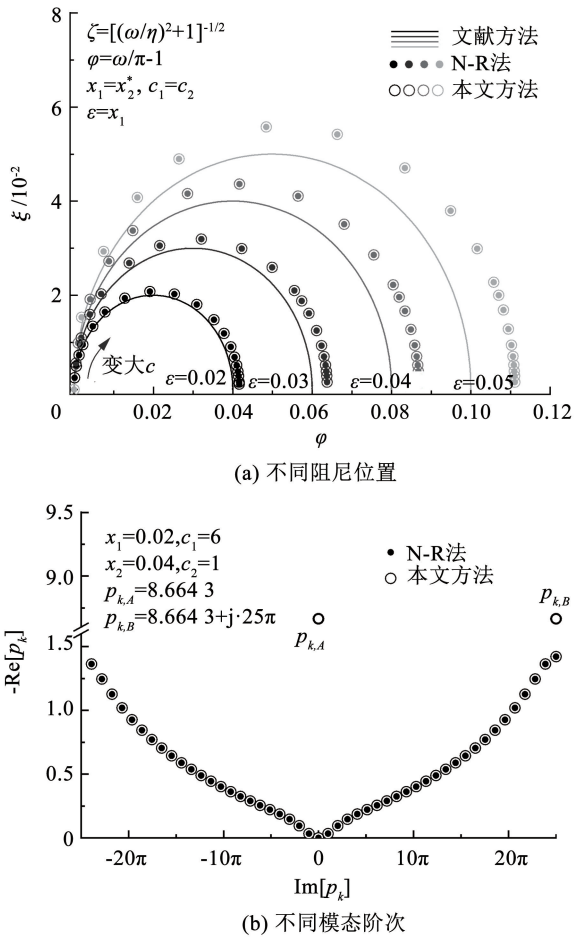


图 6　本文方法与传统解法的结果对比

Fig. 6　Comparison of results between proposed method in this paper and conventional solution methods

在进行数值计算时，代数方程更容易锁定解的搜索范围，每找到一个根方程的最高次数会下降 1 次，若存在复根则一次性降低 2 次，因此，求解难度在逐级下降。同时，复数多值特性决定代数方程

的根与原方程的解之间为“一对多”映射特性,即每找到一个根则对应着原方程的一组解支。因此,只需一次求解出所有根,通过换元即可完整地给出原方程的所有解,从而避免重复计算所产生的算力消耗。与之相比,直接求解超越方程需对每个解单独求解,每个解的求解难度是相当的。

5.3 评 述

本文方法的核心价值在于将研究对象复本征值的求解等效为代数问题,研究围绕代数方程展开。事实上,代数方程与超越方程各有其独特优势范围,超越方程是描述杂交系统物理特性不可或缺的方程形式,且无法全部代数化。

值得注意的是,本次超越方程的超越性仅由双曲函数引入,经其他数学处理后可能兼具代数特性或更优结构。当代数方程次数较高时,可能会面临数值求解复杂度及稳定性等问题,此时可考虑两种方程形式结合使用,如先以数值方法求解超越方程,再利用其解对代数方程降阶以简化计算。

6 结 论

对含有若干项线性黏性阻尼的张紧弦系统的复频率方程进行代数化表示,将原方程的超越函数形式换元表示为代数函数形式。得到如下结论:

1)复频率方程为含有若干项双曲函数的超越方程,利用指数换元法可将其表示为代数方程形式,代数方程的根通过回代过程即可给出原方程的第Ⅰ、Ⅱ类本征解。

2)当阻尼位置确定后,代数方程的最高次数即可确定(为所有有理数阻尼位置分母的最小公倍数),进而决定了原方程本征解的支数。每一解支下均具有无穷多解,其频率随代数方程最高次数的整数倍升高,阻尼特性保持不变。

3)当所有阻尼系数均趋于无穷大时,原系统代数方程可退化为若干因式乘积形式,可分别解出各段弦上的本征解。

4)以五分点对称双集中阻尼弦为解析算例,给出具体代数化过程及其所有闭合解析解。该系统的第Ⅰ类本征解存在4个解支,与推导结果一致。

本文是在所有阻尼位于有理数分数位的前提下展开讨论,对于其中一项或多项阻尼位于无理数位的情形,值得进一步研讨。

参考文献

[1]陈政清, 李寿英, 邓羊晨, 等. 桥梁长索结构风致振动研究新进展[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2022, 49(5): 1
Chen Zhengqing, Li Shouying, Deng Yangchen, et al. Recent challenges and advances on study of wind-induced vibrations of bridge cables[J]. Journal of Hunan University (Natural Sciences), 2022, 49(5): 1. DOI: 10.16339/j.cnki.hdxbzkb.2022043

[2]Sun Limin, Chen Lin, Huang Hongwei. Stay cable vibration mitigation: a review[J]. Advances in Structural Engineering, 2022, 25(16): 3368. DOI: 10.1177/13694332221132316

[3]亢战, 钟万勰. 斜拉桥参数共振问题的数值研究[J]. 土木工程学报, 1998, 31(4): 14
Kang Zhan, Zhong Wanxie. Numerical study on parametric resonance of cable in cable stayed bridge [J]. China Civil Engineering Journal, 1998, 31(4): 14. DOI: 10.15951/j.tmgcxb.1998.04.002

[4]康厚军, 郭铁丁, 赵跃宇. 大跨度斜拉桥非线性振动模型与理论研究进展[J]. 力学学报, 2016, 48(3): 519
Kang Houjun, Guo Tieding, Zhao Yueyu. Review on nonlinear vibration and modeling of large span cable-stayed bridge [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2016, 48(3): 519. DOI: 10.6052/0459-1879-15-436

[5]孙测世, 焦德望, 赵碧航, 等. 垂索-辅助索系统的建模与固有特性[J]. 工程力学, 2023, 40(11): 168
Sun Ceshi, Jiao Dewang, Zhao Bihang, et al. Modeling and inherent characteristics of sagged-cable-crosstie system [J]. Engineering Mechanics, 2023, 40(11): 168. DOI: 10.6052/j.issn.1000-4750.2022.02.0136

[6]刘庆宽, 常幸, 韩鹏, 等. 用于抑制涡激振动的低气动阻力斜拉索纵向肋条参数的试验研究[J]. 工程力学, 2025, 42(7): 66
Liu Qingkuan, Chang Xing, Han Peng, et al. Study on aerodynamic force and vortex-induced vibration characteristics of stay cables with longitudinal ribs[J]. Engineering Mechanics, 2025, 42(7): 66. DOI: 10.6052/j.issn.1000-4750.2023.01.0069

[7]段元锋, 黄嘉思, 邓南, 等. 采用向量式有限元的拉索参数振动模拟[J]. 振动工程学报, 2023, 36(1): 188
Duan Yuanfeng, Huang Jiasi, Deng Nan, et al. Vector form intrinsic finite element based simulation on parametric vibration of cables[J]. Journal of Vibration Engineering, 2023, 36(1): 188. DOI: 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2023.01.020

[8]郜辉, 王浩, 汪志昊, 等. 黏滞阻尼器联合负刚度对斜拉索减振控制的增效研究[J]. 振动工程学报, 2022, 35(2): 255
Gao Hui, Wang Hao, Wang Zhihao, et al. Performance enhancement of the viscous damper combined with the negative stiffness device for cable vibration control[J]. Journal of Vibration Engineering, 2022, 35(2): 255. DOI: 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2022.02.001

[9]孙利民, 狄方殿, 陈林, 等. 考虑垂度影响的拉索-双粘滞阻尼器系统振动分析[J]. 工程力学, 2022, 39(8): 49
Sun Limin, Di Fangdian, Chen Lin, et al. Free vibrations of a shallow cable with two viscous dampers[J]. Engineering Mechanics, 2022, 39(8): 49. DOI: 10.6052/j.issn.1000-4750.2021.04.0262

[10]周海俊, 何纪元, 杨夏, 等. 摩擦阻尼器-拉索系统振动特性试验研究[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2022, 49(5): 26
Zhou Haijun, He Jiyuan, Yang Xia, et al. Experimental study on vibration characteristics of friction-damper-cable system[J]. Journal of Hunan University (Natural Sciences), 2022, 49(5): 26. DOI: 10.16339/j.cnki.hdxbzkb.2022046

[11]杨超, 陈政清, 华旭刚, 等. 超长拉索多模态控制的黏滞阻尼

器参数优化研究[J]. 振动工程学报，2021，34(6)：1124
Yang Chao，Chen Zhengqing，Hua Xugang，et al. Parameters optimization of viscous dampers for multi-modal control of ultra-long stay cables[J]. Journal of Vibration Engineering，2021，34(6)：1124. DOI：10.16385/j.cnki.issn.1004－4523.2021.06.003

[12] Carne T G. Guy cable design and damping for vertical axis wind turbines[J]. NASA Lewis Research Center Wind Turbine Dyn，1981

[13] Kovacs I. Zur frage der seilschwingungen und der seildämpfung [J]. Bautechnik，1982，59(10)：325

[14] Pacheco B M，Fujino Y，Sulekh A. Estimation curve for modal damping in stay cables with viscous damper [J]. Journal of Structural Engineering，1993，119(6)：1961. DOI：10.1061/(ASCE)0733－9445(1993)119:6(1961)

[15] Liu Zhiwen，Shen Jingsi，Li Shuqiong，et al. Experimental study on high-mode vortex-induced vibration of stay cable and its aerodynamic countermeasures[J]. Journal of Fluids and Structures，2021(100)：103195. DOI：10.1016/j.jfluidstructs.2020.103195

[16] Krenk S. Vibrations of a taut cable with an external damper[J]. Journal of Applied Mechanics，2000，67(4)：772. DOI：10.1115/1.1322037

[17] Main J A，Jones N P. Free vibrations of taut cable with attached damper. I：linear viscous damper [J]. Journal of Engineering Mechanics，2002，128(10)：1062. DOI：10.1061/(ASCE)0733－9399(2002)128:10(1062)

[18] Hoang N，Fujino Y. Combined damping effect of two dampers on a stay cable[J]. Journal of Bridge Engineering，2008，13(3)：299. DOI：10.1061/(ASCE)1084－0702(2008)13:3(299)

[19] Caracoglia L，Jones N P. Damping of taut-cable systems：two dampers on a single stay[J]. Journal of Engineering Mechanics，2007，133(10)：1050. DOI：10.1061/(ASCE)0733－9399(2007)133:10(1050)

[20] JTG/T 3360-01—2018 公路桥梁抗风设计规范[S]
JTG/T 3360-01—2018 Wind-resistant design specification for highway bridges[S]

[21] 李寿英，李振宇，陈政清. 黏滞惯性质量阻尼器对斜拉索减振效果的数值分析[J]. 中国公路学报，2019，32(10)：230
Li Shouying，Li Zhenyu，Chen Zhengqing. Numerical analysis on the effectiveness of viscous inertial mass dampers on stay cables of cable-stayed bridges[J]. China Journal of Highway and Transport，2019，32(10)：230. DOI：10.19721/j.cnki.1001－7372.2019.10.022

[22] Yang Chao，Chen Zhengqing，Wang Wenxi，et al. Optimal design of two viscous dampers for multi-mode control of a cable covering broad frequency range [J]. Engineering Structures，2021，245：112830. DOI：10.1016/j.engstruct.2021.112830

[23] 郑罡，白钰，张晓东，等. 集中黏性阻尼弦的本征问题[J]. 振动与冲击，2020，39(12)：177
Zheng Gang，Bai Yu，Zhang Xiaodong，et al. Eigen problem of a taut string with concentrated viscous damping [J]. Journal of Vibration and Shock，2020，39(12)：177. DOI：10.13465/j.cnki.jvs.2020.12.024

[24] 郑罡，李章瑜，郭增伟，等. 集中阻尼弦本征解的性质[J]. 应用数学和力学，2019，40(9)：980
Zheng Gang，Li Zhangyu，Guo Zengwei，et al. Properties of the eigen solution of taut strings with concentrated damping [J]. Applied Mathematics and Mechanics，2019，40(9)：980. DOI：10.21656/1000－0887.400023

[25] Zhang Xiaodong，Tang Chunxia，Zheng Gang，et al. The algebraic frequency equation of a taut string damped at a fraction location：solution structures and properties[C]//Analytical and Experimental Methods in Mechanical and Civil Engineering. OES，2023

[26] 郑罡，王梦丽，廖伟，等. 单位分数跨集中阻尼弦本征解的结构及其性质[J]. 湖南大学学报(自然科学版)，2023，50(5)：95
Zheng Gang，Wang Mengli，Liao Wei，et al. Structure and properties of eigensolutions of a taut string with a lumped damping at a unit-fraction-span [J]. Journal of Hunan University (Natural Sciences)，2023，50(5)：95. DOI：10.16339/j.cnki.hdxbzkb.2023059

[27] 张永顺，郑罡，张晓东，等. 四分点集中阻尼弦系统阻尼特性的可叠加性问题[J]. 力学学报，2024，56(7)：2127
Zhang Yongshun，Zheng Gang，Zhang Xiaodong，et al. The superposition of damping characteristics of a taut string with concentrated viscous damping systems of a quartile [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics，2024，56(7)：2127. DOI：10.6052/0459－1879－23－594

[28] 方同，薛璞. 振动理论及应用[M]. 西安：西北工业大学出版社，1998
Fang Tong，Xue Pu. Vibration theory and application[M]. Xi′an：Northwestern Polytechnical University Press，1998

(编辑　刘　彤)