DOI:10.11918/202511100

攻击时间可调的领从式非奇异协同制导律

罗少杰[1], 王 乐[1,2], 秦明星[1], 席建祥[1]

(1. 火箭军工程大学 导弹工程学院,西安 710025; 2. 北京理工大学 空天科学与技术学院,北京 100081)

摘 要: 针对欠驱动领从式导弹集群协同打击目标问题,提出了一种考虑终端角度约束且攻击时间可调的非奇异多弹时间协同制导律。通过独立设计领弹预设时间制导指令,实现领弹攻击时间误差的快速收敛,设计从弹预设时间制导指令,使从弹快速跟踪领弹,实现了导弹集群攻击时间可调。首先,设计领弹制导律的攻击时间和角度控制制导律,实现对领弹的终端攻击时间和角度控制。其次,在从弹制导律设计时,将领弹-从弹的跟踪误差项与从弹局部协同误差项引入制导指令当中,提出了一种适用于从弹间通信为有向拓扑且考虑角度约束的时间协同制导律。然后,设计辅助函数与附加控制项制导指令解决了制导律的奇异性问题,并分析了奇异性导致的攻击时间控制指令失效现象,给出了排除制导律完全奇异现象的判据,证明了所提制导律的预设时间稳定性。最后,通过数值仿真验证了所提方法的有效性。研究结果表明:本文所提制导律能够使得导弹集群的攻击时间在预设时间内收敛到期望值,达到攻击时间可调的效果,实现对目标的时空协同打击,且制导指令不存在奇异性现象。

关键词: 时间协同制导; 攻击时间可调; 预设时间稳定; 角度约束; 制导律奇异性

中图分类号: V448.133 **文献标志码**: A **文章编号**: 0367-6234(2026)08-0141-13

Leader-follower nonsingular cooperative guidance law with adjustable impact time

Luo Shaojie[1], Wang Le[1,2], Qin Mingxing[1], Xi Jianxiang[1]

(1. College of Missile Engineering, Rocket Force University of Engineering, Xi'an 710025, China;
2. College of Aerospace Science and Technology, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

Abstract: To address the cooperative target engagement problem of underactuated leader-follower missile swarms, this paper proposed a nonsingular multi-missile time-cooperative guidance law with adjustable impact time under terminal angle constraints. By independently designing the prescribed-time guidance command of the leader missile to realize the fast convergence of its impact time error and designing the prescribed-time guidance commands of the follower missiles to make them rapidly track the leader missile, the adjustable impact time of the missile swarm was realized. First, the impact-time and angle control guidance law was designed for the leader missile to realize its terminal impact time and angle control. Next, in the design of the follower missile guidance law, the leader-follower tracking error term and the follower local cooperative error term were introduced into the guidance command, and a time-cooperative guidance law suitable for directed communication topologies among follower missiles under angle constraints was proposed. Then, the auxiliary function and the additional control term guidance command were designed to solve the singularity problem of the guidance law. The failure phenomenon of the impact time control command caused by singularity was analyzed; the criterion for eliminating the complete singularity phenomenon of the guidance law was given, and the prescribed-time stability of the proposed guidance law was proved. Finally, numerical simulations were conducted to verify the effectiveness of the proposed method. The research results indicate that the proposed guidance law enables the impact time of the missile swarm to converge to the desired value within the prescribed time, achieves the effect of adjustable impact time, realizes the spatiotemporal cooperative engagement of the target, and has no singularity phenomenon in the guidance commands.

Keywords: time-cooperative guidance; adjustable impact time; prescribed-time stability; angle constraint; guidance law singularity

收稿日期: 2025-11-30;**录用日期**: 2026-01-12;**网络首发日期**: 2026-05-29
网络首发地址: https://link.cnki.net/urlid/23.1235.T.20260529.1132.004
基金项目: 国家自然科学基金(U23B2064, 62176263, 62103434);中国博士后科学基金(2024M754095)
作者简介: 罗少杰(2002—),男,硕士研究生;席建祥(1981—),男,教授,博士生导师
通信作者: 席建祥,xijx07@mails.tsinghua.edu.cn

现代化战争形态向信息化、智能化、体系化加速演进,导弹武器作为抢夺战场主动权的核心装备,其作战模式正从单一平台独立打击向多弹协同制导转变。多弹协同制导是指通过为导弹集群设计协同制导律,实时调整弹群的飞行状态,实现多枚导弹沿预设攻击方位同时命中目标,具有十分重要的军事价值和研究意义[1]。为实现多枚导弹沿预设攻击方位同时命中目标,研究人员展开了大量关于考虑角度约束的时间协同制导方法研究,现有成果主要聚焦于攻击时间和角度控制制导律(impact time and angle control guidance, ITACG)与基于一致性的协同制导律。ITACG 制导律的核心思想是通过为每个导弹设置相同的攻击时间与期望的攻击角度,采用跟踪控制方法,在不依赖于弹间通信的条件下实现多弹的终端角度和攻击时间协同。文献[2]最早提出了 ITACG 制导律,通过设计攻击角度控制制导律,并增加攻击时间控制偏置项的方式,同时实现了攻击时间和角度控制。文献[3]显式估计了剩余飞行时间,在角度控制制导律上增加时间误差反馈项,给出一种三维矢量 ITACG 制导律,但其在剩余飞行时间估计时不可避免地产生了估计误差。为此,文献[4]提出了一种剩余飞行时间反演方法,通过预设剩余飞行时间表达式反向求解制导律,有效规避了剩余飞行时间估计误差。由于导弹集群在飞行过程中不进行弹间信息交互,ITACG 制导律可能无法较好地适应动态战场环境。

基于一致性的协同制导律可依托弹间通信网络获取邻居导弹的状态信息生成协同制导指令,实时调整导弹集群飞行状态,具有较好的环境适应性[5]。文献[6]通过获取每个导弹的邻居信息,可在视线方向和视线法向上分别设计制导律,既能保证导弹视场角能够收敛到期望值,又使所有导弹的攻击时间渐近收敛到一致。针对机动目标拦截问题,文献[7]设计了一种新型预设时间扰动观测器,在不依赖于先验信息的条件下实现了对目标机动信息的精准估计,并基于分布式凸包观测器设计了协同制导指令。上述文献研究均将导弹运动建模为全驱模型,即可在视线方向和法向独立设计制导指令。然而,导弹在末制导时仅能控制自身侧向加速度,属于欠驱模型[8-10]。因此,开展考虑角度约束的欠驱模型时间协同方法研究具有重要的理论和工程意义。

上述基于一致性的协同制导方法主要依赖弹间通信网络设计制导指令,形成动态协调机制自主决策协同打击时间,但在某些特定任务场景,如需要指定弹群终端攻击时间时,这种仅依赖邻居导弹信息的通信网络与协同制导架构可能存在一定的局限性。为此,研究人员提出了一种领弹-从弹协同制导律。领弹-从弹架构中,领弹的制导指令通常独立设计,从弹则根据接收到的领弹信息与邻居从弹信息生成制导指令,以实现协调变量一致。文献[11]提出了一种两阶段领从式协同制导律,采用超螺旋滑模控制算法实现了时间和角度协同,且有效抑制了制导指令的抖动。文献[12]基于一致性理论设计了视线方向制导指令,在视线法向上采用全局积分滑模控制方法,设计了一种新型角度约束制导算法。文献[13]在文献[12]的基础上,结合了全局积分滑模面和二阶滑模控制理论,消除了传统滑模制导律中的趋近阶段,有效节省了控制能耗。在上述领从式多弹协同制导研究中,从弹间的通信均是无向拓扑,而在实际飞行过程中,部分导弹可能受电磁干扰无法传递自身信息,这种无向拓扑条件是难以满足的。因此,有必要针对从弹间通信为有向拓扑的情况,研究一种攻击时间可调且能够满足终端角度约束的领从式多弹时间协同制导律。

为实现对目标的协同打击,弹群需要在击中目标前满足协同约束条件。为此,研究人员采用收敛性能理论设计了具有快速收敛特性的协同制导律。文献[14]采用有限时间稳定理论,提出了有限时间收敛的角度与时间协同制导律。文献[15]则是基于固定时间稳定理论,分别结合一致性误差函数和滑模控制方法设计了视线方向和视线法向的制导指令,但需要通过多个参数确定其收敛时间。文献[16]进一步提出了一种新的预定时间一致性协议,并设计非奇异终端滑模面实现了预定时间收敛的角度与时间协同,其收敛时间上界只需要通过一个参数直接确定。文献[17]结合预设时间稳定理论,利用导弹集群全局状态信息,设计了一种预设时间收敛的协同制导律,提高了制导律的快速收敛性。在实际飞行过程中,弹间通信可能受限,无法获取全局状态信息。为此,需要设计一种仅依赖邻居导弹信息且能够满足终端角度约束的预设时间多弹时间协同制导律。

受现有研究启发,本文针对具有领从结构的欠驱动导弹集群,设计了一种攻击时间可调且能够满足终端角度约束的多弹时间协同制导律。首先,针对欠驱动领从式导弹集群,通过在最优攻击角度控制制导律上构造时间协同偏置项的方法设计领弹和

从弹的预设时间制导指令,使得领弹攻击时间误差快速收敛,从弹快速跟踪领弹,以实现导弹集群的攻击时间可调。其次,提出了一种领从式协同制导律,能够在从弹间通信为有向拓扑的条件下,使弹群满足终端角度约束的同时实现时间协同。最后,设计辅助函数与附加控制项制导指令解决了制导律奇异性问题,且对奇异性导致的攻击时间控制指令失效现象进行了分析,给出了排除完全奇异现象的判据,验证了所提制导律的有效性。

1　预备知识与问题描述

1.1 预备知识

1.1.1　通信拓扑

如图 1 所示,考虑包含 1 枚领弹与 n 枚从弹的领从式导弹集群。图中:下标 i 为导弹的编号,$i=0$ 为领弹,$i=1,\cdots,n$ 为从弹。

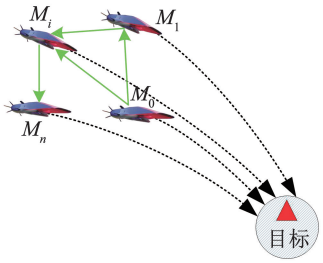


图 1　领从式导弹集群协同打击示意

Fig. 1　Schematic diagram of cooperative engagement of leader-follower missile swarm

本文中,领弹的飞行状态不受从弹的影响,且能够向部分从弹传递自身状态信息;从弹能够向邻居从弹传递信息,并基于实时交互信息协调自身状态。从弹间的通信网络可用通信拓扑图 $\boldsymbol{G}=\{\boldsymbol{V},\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}\}$ 描述。其中:$\boldsymbol{V}=[v_1,v_2,\cdots,v_n]$ 为拓扑图的节点集合,每一个节点表示集群中的一枚从弹;$\boldsymbol{E}$ 为节点之间的边集合,用来描述从弹之间的通信链路,$\boldsymbol{E}\subseteq\{(v_i,v_j),v_i,v_j\in\boldsymbol{V}\}$;$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 为邻接矩阵。若对于任意两个节点 v_i、v_j 组成的边 $(v_j,v_i)\in\boldsymbol{E}$,则节点 v_i 能够接收节点 v_j 传递的信息,此时 $a_{ij}=1$,否则 $a_{ij}=0$。定义图 $\boldsymbol{G}$ 的拉普拉斯矩阵 $\boldsymbol{L}=[l_{ij}]\in\mathbf{R}^{n\times n}$,当 $i=j$ 时,$l_{ij}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}$;当 $i\neq j$,$l_{ij}=-a_{ij}$。领弹和从弹之间的通信拓扑可用邻接矩阵 $\boldsymbol{B}=\mathrm{diag}\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$ 表示。若领弹能够向第 i 枚从弹传递信息,则 $b_i=1$,$i=1,2,\cdots,n$,否则 $b_i=0$。本文假设有向图 $\boldsymbol{G}$ 中至少包含一棵有向生成树,并且图中的根节点与领导者节点之间至少存在一条有向通信链路。

引理 1[18]　令矩阵 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{L}+\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{p}=[p_1,p_2,\cdots,p_n]^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{I}_n$,若令矩阵 $\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}\{p_1,p_2,\cdots,p_n\}$,$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{PH}+\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$,则矩阵 $\boldsymbol{P}$ 与矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 都是正定的。

1.1.2　预设时间稳定理论

考虑如下非线性系统:

$$\dot{\boldsymbol{x}}=f((\boldsymbol{x};\boldsymbol{\rho})),\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0 \tag{1}$$

式中:$\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$ 为系统状态,$\boldsymbol{\rho}\in\mathbf{R}^l$ 为系统参数,$f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 为非线性函数,$\boldsymbol{x}_0\in\mathbf{R}^n$ 为系统的初始状态,且该系统存在唯一平衡点 $\boldsymbol{x}=0$。

引理 2[19]　定义时变增益函数 $\mu(T,t)=T/(T-t)$,对于式(1)形式的系统,如果存在连续正定 Lyapunov 函数 V:

$$\dot{V}(t)\leqslant(-\bar{\lambda}_1\mu(t)-\bar{\lambda}_2)V(t) \tag{2}$$

式中:$\bar{\lambda}_1\in\mathbf{R}^+$、$\bar{\lambda}_2\in\mathbf{R}^+$ 为待定参数。则 $V(t)$ 满足 $\lim_{t\to T}V(t)=0$。此时,系统(1)是全局预设时间稳定的。

1.1.3　最优误差动力学理论

导弹制导律设计问题可看作一个误差跟踪问题,在导弹击中目标时,其跟踪误差能够收敛到 0,基本形式可表示如下[20]:

$$\dot{\varepsilon}(t)=g(t)u(t) \tag{3}$$

式中:$\varepsilon(t)$ 为跟踪误差,$g(t)$ 为已知函数,$u(t)$ 为控制输入指令。

引理 3[20]　针对式(3)的系统,若选择误差动力学方程为

$$\dot{\varepsilon}(t)+\frac{C}{t_{\mathrm{go}}}\varepsilon(t)=0 \tag{4}$$

式中:$C\geqslant1$,t_{go} 为导弹的剩余飞行时间。则对于跟踪误差 $\varepsilon(t)$ 有

$$\varepsilon(t)=\varepsilon(t_0)t_{\mathrm{go}}^{C} \tag{5}$$

1.2　问题描述

领从式导弹集群攻击同一静止目标 T 的二维平面交战几何如图 2 所示。图中:R_i 为导弹 M_i($i=0,1,\cdots,n$)与目标 T 之间的距离;V_i、a_i 分别为 M_i 的速度和加速度,V_i 的大小保持恒定,a_i 的方向垂直于速度矢量;σ_i、γ_i、λ_i 分别为 M_i 的前置角、速度倾角、弹目视线角,角度正方向定义均符合右手定则。

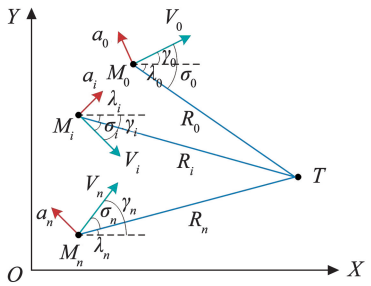


图 2　二维平面交战几何

Fig. 2　Two-dimensional plane engagement geometry

由图 2 可知,导弹 M_i 与目标 T 之间的相对运动

方程分别为：

$$\dot{R}_i = -V_i\cos\sigma_i \tag{6}$$

$$\dot{\lambda}_i = -\frac{V_i\sin\sigma_i}{R_i} \tag{7}$$

$$\dot{\gamma}_i = \frac{a_i}{V_i} \tag{8}$$

$$\sigma_i = \gamma_i - \lambda_i \tag{9}$$

$$\dot{\sigma}_i = \dot{\gamma}_i - \dot{\lambda}_i = \frac{V_i\sin\sigma_i}{R_i} + \frac{a_i}{V_i} \tag{10}$$

本文旨在针对有向拓扑条件下具有领弹-从弹结构的导弹集群，设计一种攻击时间可调且能够满足终端角度约束的时间协同制导律。为此，本文主要基于预设时间稳定理论分别设计领弹和从弹的制导律。在领弹制导律设计时，将领弹攻击时间与期望攻击时间的差值作为误差项引入领弹的制导律中，实现领弹的攻击时间控制。在从弹制导律设计时，将领弹-从弹的跟踪误差项与从弹局部协同误差项引入到从弹的制导律中。通过领弹攻击时间可控，从弹快速跟踪领弹，实现导弹集群的攻击时间可调。需要注意的是，本文在制导律设计过程中，设定初始时刻为 $t_0=0$。

为满足攻击角度约束，实现对目标的预设角度打击，采用基于误差动力学设计的最优攻击角度控制制导律，通过最小化能量性能指标保证能量最优，且能够满足：

$$\gamma_i(t_{\mathrm{f},i}) = \gamma_{\mathrm{d},i}, i=0,1,\cdots,n \tag{11}$$

式中：$\gamma_{\mathrm{d},i}$为期望攻击角度，$t_{\mathrm{f},i}$为终端攻击时间。

为实现时间协同，需要估计导弹的飞行时间，并将其作为核心协调变量，为领弹和从弹分别设计时间协同偏置项。具体实施思路为：首先，结合领弹、从弹的角度控制制导律对导弹的飞行时间进行估计；然后，基于预设时间稳定理论，针对领弹与从弹分别设计时间协同偏置项，实现弹群的时间协同。所设计的协同制导律应当满足：

$$\begin{cases} t_{\mathrm{f},0} = t_{\mathrm{fd}}, & \forall t \geqslant T_1 \\ t_{\mathrm{f},0} = t_{\mathrm{f},1} = t_{\mathrm{f},2} = \cdots = t_{\mathrm{f},n}, & \forall t \geqslant T_2 \end{cases} \tag{12}$$

式中：$t_{\mathrm{f},i}(i=0,1,\cdots,n)$为导弹的攻击时间，$t_{\mathrm{fd}}$为领弹的期望攻击时间，$T_1$ 为领弹的预设收敛时间，T_2 为从弹的预设收敛时间。

在飞行过程中，为了实现导弹姿态稳定，其攻角与侧滑角通常控制在一个很小的范围内，可近似将导弹的视场角看作为前置角。此外，为保证导弹能够持续锁定目标，通常将其视场角限制在导引头视角约束范围内。因此，可作以下合理假设。

假设 1[21] 导弹的前置角 $\sigma_i(i=0,1,\cdots,n)$为小角度，满足 $\cos\sigma_i \approx 1-\sigma_i^2/2$，$\sin\sigma_i \approx \sigma_i$，且 σ_i 的高阶项可以近似忽略。

2 领弹制导律设计与分析

2.1 领弹制导律设计

为实现领弹的攻击时间和攻击角度控制，采用在最优攻击角度控制制导律的基础上构造攻击时间控制偏置项的方式，设计如下形式的领弹制导律：

$$a_0 = a_0^{\mathrm{OIACG}} + a_0^{\mathrm{BT}} + a_0^{*} \tag{13}$$

式中：a_0^{OIACG} 为最优攻击角度控制项，a_0^{BT} 为攻击时间控制项，a_0^{*} 为附加控制项。

最优攻击角度控制项 a_0^{OIACG} 的基本形式如下：

$$a_0^{\mathrm{OIACG}} = NV_0\dot{\lambda}_0 - \frac{K(N-1)V_0}{t_{\mathrm{go},0}^{\mathrm{OIACG}}}e_{\gamma,0} \tag{14}$$

其中

$$t_{\mathrm{go},0}^{\mathrm{OIACG}} = -\frac{R_0}{\dot{R}_0}$$

式中：第 1 项为比例导引项，用于保证脱靶量要求；第 2 项为角度协同偏置项，用于实现对终端攻击角度的精确控制；N、K 为常数，满足 $N\geqslant 2$，$K\geqslant 1$ 且 $N\neq K+1$；$e_{\gamma,0}=\gamma_{\mathrm{d},0}-\gamma_{\mathrm{f},0}^{\mathrm{PNG}}$为攻击角度偏差（其中：$\gamma_{\mathrm{d},0}$为领弹的期望攻击角度，$\gamma_{\mathrm{f},0}^{\mathrm{PNG}}$为领弹在纯比例导引律控制下的终端攻击角度预测值）。$\gamma_{\mathrm{f},0}^{\mathrm{PNG}}$解析式为

$$\gamma_{\mathrm{f},0}^{\mathrm{PNG}} = \frac{N\lambda_0}{N-1} - \frac{\gamma_0}{N-1} \tag{15}$$

当采用式（14）所示的最优攻击角度控制制导律时，领弹的攻击角度误差 $e_{\gamma,0}$能够在击中目标时收敛到期望攻击角度，在保证收敛精度的同时能够满足收敛速度要求。

为设计攻击时间控制项 a_0^{BT}，需对导弹的攻击时间进行估计。由文献[8]可得，最优攻击角度控制制导律的攻击时间估计式为

$$t_{\mathrm{f},0} = \frac{R_0}{V_0}\left(1+\frac{\sigma_0^2}{2(2N-1)} - \frac{K(N-1)\sigma_0 e_{\gamma,0}}{(2N-1)(N+K)} + \frac{K^2(N-1)^2 e_{\gamma,0}^2}{(2N-1)(N+K)(2K+1)}\right) + t \tag{16}$$

考虑式（6）~（10）和式（13）构成的领弹制导系统，对其攻击时间 $t_{\mathrm{f},0}$求导可得

$$\dot{t}_{\mathrm{f},0} = -\frac{1}{2N-1}\left(\frac{\sigma_0^2\cos\sigma_0}{2} + (N-1)\sigma_0\sin\sigma_0\right) -$$

$$\frac{K^2(N-1)^2e_{\gamma,0}^2}{(2N-1)(N+K)}\left(\frac{\cos\sigma_0}{2K+1}-\cos\sigma_0+\frac{2K}{2K+1}\right)+\frac{K(N-1)e_{\gamma,0}}{2N-1}\left(\frac{(N-1)\sin\sigma}{N+K}-\sigma_0\cos\sigma_0+\frac{\sigma_0(1+K\cos\sigma_0)}{N+K}\right)+1-\cos\sigma_0+\frac{NR_0(a_0^{\mathrm{BT}}+a_0^*)}{(2N-1)(N+K)V_0^2}\left(\sigma_0-\frac{K(N-1)e_{\gamma,0}}{N(2K+1)}\right) \tag{17}$$

当 σ_0 满足小角度假设条件时,有 $\cos\sigma_0\approx1-\sigma_0^2/2$,$\sin\sigma_0\approx\sigma_0$,且 σ_0 的高阶项可以近似忽略。此时,领弹的攻击时间表达式可简化成如下形式:

$$\dot{t}_{\mathrm{f},0}=\frac{NR_0\varphi_0(a_0^{\mathrm{BT}}+a_0^*)}{(2N-1)(N+K)V_0^2} \tag{18}$$

其中

$$\varphi_0=\sigma_0-\frac{K(N-1)}{N(2K+1)}e_{\gamma,0}$$

设领弹的攻击时间误差 $e_0=t_{\mathrm{f},0}-t_{\mathrm{fd}}$,则可将领弹的攻击时间控制项 a_0^{BT} 设计为如下形式:

$$a_0^{\mathrm{BT}}=\frac{(2N-1)(N+K)V_0^2}{NR_0\varphi_0}u_0 \tag{19}$$

$$u_0=-\rho(T_1,t)\lambda_1e_0-\lambda_2e_0 \tag{20}$$

其中

$$\rho(T_1,t)=\begin{cases}\mu(T_1,t), & t<T_1\\ 0, & t\geqslant T_1\end{cases}$$

式中:λ_1、λ_2 均为正实数;T_1 为领弹的预设收敛时间,且满足 $T_1<t_{\mathrm{f},0}$;$\mu(T_1,t)$ 为时变增益函数。

为避免制导指令在领弹攻击时间误差未收敛之前出现完全奇异现象,即 $\varphi_0\equiv0$,进一步导致攻击时间控制指令失效,需设计附加控制项指令排除完全奇异现象,以保证攻击时间控制的有效性,令 $(\lambda_0-\gamma_{\mathrm{d},0})^2+(\gamma_0-\gamma_{\mathrm{d},0})^2=d_0$,可将领弹的附加控制项 a_0^* 设计如下:

$$a_0^*=\begin{cases}-\beta e_0\,\mathrm{sgn}^*(\varphi_0), & u_0^2\geqslant\Delta_1\ \text{且}\ d_0\leqslant\Delta_2\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{21}$$

其中

$$\mathrm{sgn}^*(\varphi_0)=\begin{cases}1, & \varphi_0\geqslant0\\ -1, & \varphi_0<0\end{cases}$$

式中 Δ_1、Δ_2、β 均为正实数,且 Δ_1、Δ_2 为一个小量。

当攻击时间误差项 e_0 未收敛,且制导指令即将出现完全奇异现象,即满足 $u_0^2\geqslant\Delta_1$ 且 $d_0\leqslant\Delta_2$ 时,附加控制项生效,避免完全奇异现象发生。

2.2　攻击时间控制有效性分析

当领弹采用 a_0 所示的制导律时,φ_0 可能引起攻击时间控制项的奇异性问题,为此,引入辅助函数对 a_0^{BT} 重新设计,具体形式如下:

$$a_0^{\mathrm{BT}}=\frac{(2N-1)(N+K)V_0^2}{NR_0\varphi_0}\chi(\bar{\varphi}_0)u_0 \tag{22}$$

式中,$\bar{\varphi}_0=\varphi_0/\varphi_{\max}$。$\chi(\bar{\varphi})$ 可设计为

$$\chi(\bar{\varphi})=\begin{cases}|\bar{\varphi}|^\kappa, & |\bar{\varphi}|\leqslant1\\ 1, & |\bar{\varphi}|>1\end{cases} \tag{23}$$

式中,$\kappa\geqslant2$。当 φ_0 趋于 0 时,$\chi(\bar{\varphi}_0)/\varphi_0$ 趋于 0,进一步导致 a_0^{BT} 趋于 0,有效解决了由 φ_0 引起的奇异性问题。此时,领弹制导律的完整形式可描述为

$$a_0=NV_0\dot{\lambda}_0-\frac{K(N-1)V_0}{t_{\mathrm{go},0}^{\mathrm{OIACG}}}e_{\gamma,0}+\frac{(2N-1)(N+K)V_0^2}{NR_0\varphi_0}\chi(\bar{\varphi}_0)u_0+a_0^* \tag{24}$$

需要注意的是,本文基于预设时间稳定理论为领弹设计了式(24)所示的制导律,旨在使领弹满足角度约束的同时能够控制其攻击时间在预设时间 T_1 内收敛到期望值。如果 $\varphi_0\equiv0$,那么式(19)将会完全奇异,使得辅助函数 $\chi(\bar{\varphi})$ 持续生效。此时 $\chi(\bar{\varphi}_0)/\varphi_0\equiv0$,即 $a_0^{\mathrm{BT}}\equiv0$,攻击时间控制指令将完全失效。为确保领弹攻击时间能够在预设时间 T_1 内收敛到期望攻击时间,需进一步排除攻击时间控制项的完全奇异现象。

定理 1　针对式(6)~(10)所示的领弹运动学模型,若采用式(21)所示的附加控制项和式(23)形式的辅助函数,可保证制导律式(24)在 $t\in[0,t_{\mathrm{f},0})$ 内不存在完全奇异现象,即 $\varphi_0(t)\neq0,t\in[0,t_{\mathrm{f},0})$。

证明　观察式(18)可得,当存在 t_1 使得 $\gamma_0(t_1)=\lambda_0(t_1)=\gamma_{\mathrm{d},0}$ 时,$\sigma_0(t_1)=0$,$e_{\gamma,0}(t_1)=0$,此时有:

$$\varphi_0(t_1)=\sigma_0(t_1)-\frac{K(N-1)}{N(2K+1)}e_{\gamma,0}(t_1)=0 \tag{25}$$

$$\dot{\lambda}_0(t_1)=-\frac{V_0\sin\sigma_0(t_1)}{R_0(t_1)}=0 \tag{26}$$

当 $\varphi_0(t_1)=0$ 时,有 $\chi(\bar{\varphi}_0(t_1))=|\bar{\varphi}_0|^\kappa=0$,进而有

$$a_0(t_1)=NV_0\dot{\lambda}_0(t_1)-\frac{K(N-1)V_0}{t_{\mathrm{go},0}^{\mathrm{OIACG}}}e_{\gamma,0}(t_1)+\frac{(2N-1)(N+K)V_0^2}{NR_0\varphi_0(t_1)}\chi(\bar{\varphi}_0(t_1))u_0(t_1)+a_0^*(t_1)=a_0^*(t_1) \tag{27}$$

若 $a_0^*(t_1)=0$,则有:

$$\dot{\gamma}_0(t_1)=\frac{a_0(t_1)}{V_0}=N\dot{\lambda}_0(t_1)-\frac{K(N-1)}{t_{\mathrm{go},0}^{\mathrm{OIACG}}}e_{\gamma,0}(t_1)=0 \tag{28}$$

$$\dot{\varphi}_0(t_1)=\dot{\sigma}_0(t_1)+\frac{K(N-1)}{N(2K+1)}\left(\frac{N\dot{\lambda}_0(t_1)}{N-1}-\frac{\dot{\gamma}_0(t_1)}{N-1}\right)=$$

$$\dot{\gamma}_0(t_1)-\dot{\lambda}_0(t_1)+\frac{K(N-1)}{N(2K+1)}\left(\frac{N\dot{\lambda}_0(t_1)}{N-1}-\frac{\dot{\gamma}_0(t_1)}{N-1}\right)=0 \tag{29}$$

综上所述,当 $\gamma_0(t_1)=\lambda_0(t_1)=\gamma_{\mathrm{d},0}$ 且满足 $a_0^*(t_1)=0,\forall t\geqslant t_1$ 时,则 $\forall t\geqslant t_1$ 均满足 $\varphi_0(t)=0$,$\dot{\varphi}_0(t)=0$ 即 $\varphi_0(t)\equiv 0$。

令 $\dot{\varphi}_0(t)=0$ 可得:

$$\dot{\gamma}_0(t)-\dot{\lambda}_0(t)+\frac{K(N-1)}{N(2K+1)}\left(\frac{N\dot{\lambda}_0(t)}{N-1}-\frac{\dot{\gamma}_0(t)}{N-1}\right)=0 \tag{30}$$

$$(2NK+N-K)\dot{\gamma}_0(t)=(NK+N)\dot{\lambda}_0(t) \tag{31}$$

$$\mathrm{d}\gamma_0(t)=\frac{(NK+N)}{(2NK+N-K)}\mathrm{d}\lambda_0(t) \tag{32}$$

代入 $\gamma_0(t)=\gamma_{\mathrm{d},0},\lambda_0(t)=\gamma_{\mathrm{d},0},a_0^*(t)=0$ 可得

$$\gamma_0(t)=\frac{(NK+N)}{(2NK+N-K)}\lambda_0(t)+\frac{NK-K}{(2NK+N-K)}\gamma_{\mathrm{d},0} \tag{33}$$

令 $\varphi_0(t)=0$,则有:

$$\sigma_0(t)-\frac{K(N-1)}{N(2K+1)}e_{\gamma,0}(t)=0 \tag{34}$$

$$\gamma_0(t)-\lambda_0(t)-\frac{K((N-1)\gamma_{\mathrm{d},0}-N\lambda_0(t)+\gamma_0(t))}{N(2K+1)}=0 \tag{35}$$

结合式(33)、(35)可得,当且仅当 $\gamma_0(t)=\lambda_0(t)=\gamma_{\mathrm{d},0}$ 时,可能满足 $\varphi_0(t)=0,\dot{\varphi}_0(t)=0$。

下面证明 $t_1\geqslant t_{\mathrm{f},0}$,设领弹攻击时间误差的实际收敛时间为 t_0^*,则 $a_0^*(t)=0,\forall t\geqslant t_0^*$。

首先考虑一种极特殊情况,假设 $t_1<t_0^*$,即在攻击时间控制项与攻击角度控制项的作用下,恰好某一时刻满足 $\gamma_0(t_1)=\lambda_0(t_1)=\gamma_{\mathrm{d},0}$,则有 $u_0(t_1)\neq 0$ 且 $\gamma_0(t_1)=\lambda_0(t_1)=\gamma_{\mathrm{d},0}$。此时,附加控制项 $a_0^*(t_1)=-\beta e_0\neq 0$,无法满足 $a_0^*(t_1)=0,\forall t\geqslant t_1$,假设不成立。

假设 $t_1\geqslant t_0^*$,可得 $\forall t\geqslant t_0^*$ 都有

$$a_0(t)=NV_0\dot{\lambda}_0(t)-\frac{K(N-1)V_0}{t_{\mathrm{go},0}^{\mathrm{OIACG}}}e_{\gamma,0}(t) \tag{36}$$

此时,误差项 $e_{\gamma,0}$ 的误差动力学方程能够满足式(4)所示的形式[20]。由引理 3 可以得到如下关系式:

$$e_{\gamma,0}(t)=e_{\gamma,0}(t_0^*)(t_{\mathrm{go},0}^{\mathrm{OIACG}})^K \tag{37}$$

由式(37)可得,当 $t_{\mathrm{go},0}^{\mathrm{OIACG}}=0$ 时,$e_{\gamma,0}$ 收敛到 0 且满足 $\gamma_0=\lambda_0=\gamma_{\mathrm{d},0}$,即 $t_1=t_{\mathrm{f},0},\forall t<t_{\mathrm{f},0}$ 都有 $\varphi_0(t)\equiv 0$。

注释 1 需要注意的是,如果存在 $t^*<t_{\mathrm{f},0}$ 使得 $\forall t\geqslant t^*$ 都有 $\varphi_0=0$,那么制导指令会完全奇异,进一步导致 $a_0^{\mathrm{BT}}\equiv 0$。此时,构造的攻击时间控制项会失效,从而影响领弹制导律的预设时间收敛性能和攻击时间控制效果。文献[8-10]设计辅助函数有效解决了奇异性问题,但没有排除完全奇异现象对协同效能的影响。本文在定理 1 中证明了当且仅当 $t\geqslant t_{\mathrm{f},0}$ 时,$\varphi_0(t)\equiv 0$,说明在制导律式(24)的作用下,领弹击中目标前不会出现完全奇异现象,不会造成攻击时间控制项完全失效的情况。

2.3 领弹制导系统稳定性分析

排除控制指令的完全奇异现象后,需要对领弹制导系统的稳定性进行分析,进一步证明在所设计的领弹制导律作用下,能够使领弹在满足角度约束的同时实现预设时间收敛的时间协同。

定理 2 针对式(6)~(10)所示的领弹运动学模型,在制导律式(24)的作用下,可使领弹的攻击时间在预设时间 T_1 内收敛到期望攻击时间,即 $t_{\mathrm{f},0}=t_{\mathrm{fd}},\forall t\geqslant T_1$,且领弹攻击角度能够在命中目标时收敛到期望攻击角度,即 $\gamma_0(t_{\mathrm{f},0})=\gamma_{\mathrm{d},0}$。

证明 由于 $T_1<t_{\mathrm{f},0}$,结合定理 1 可知,当 $0\leqslant t<T_1$ 时,$\varphi_0(t)=0$ 只存在有限个解。构建如下所示的 Lyapunov 函数:

$$V_0=\frac{1}{2}e_0^2 \tag{38}$$

对式(38)求导可得

$$\dot{V}_0=e_0\dot{e}_0=\chi(\bar{\varphi}_0)e_0u_0-\frac{\beta_0NR_0|\varphi_0|e_0^2}{(2N-1)(N+K)V_0^2}\leqslant$$

$$\chi(\bar{\varphi}_0)[-\rho(T_1,t)\lambda_1e_0^2-\lambda_2e_0^2]\leqslant$$

$$-2\rho(T_1,t)\chi(\bar{\varphi}_0)\lambda_1V_0-2\lambda_2\chi(\bar{\varphi}_0)V_0 \tag{39}$$

1)若 $\varphi_0(t)=0$ 在 $[0,T_1)$ 无解,则 $\forall t\in[0,T_1)$ 都有 $\chi(\bar{\varphi}_0)>0$。令 $\hat{\chi}_0=\min\{\chi(\bar{\varphi}_0(t)),t\in[0,T_1)\}$,可得

$$\dot{V}_0\leqslant-2\rho(T_1,t)\chi(\bar{\varphi}_0)\lambda_1V_0-2\lambda_2\chi(\bar{\varphi}_0)V_0\leqslant$$

$$-2\rho(T_1,t)\hat{\chi}_0\lambda_1V_0-2\lambda_2\hat{\chi}_0V_0 \tag{40}$$

由引理 2 可得,领弹的攻击时间 $t_{\mathrm{f},0}$ 将在预设时间 T_1 内收敛到期望攻击时间 t_{fd}。此时,$\bar{\lambda}_1=2\hat{\chi}_0\lambda_1$,$\bar{\lambda}_2=2\hat{\chi}_0\lambda_2$。

2)若 $\varphi_0(t)=0$ 在$[0,T_1)$上存在解 $t_{1,0},t_{2,0},\cdots,t_{k,0}$且满足 $t_{1,0},t_{2,0}<\cdots<t_{k,0}<T_1$,则 $\forall t\in(t_{k,0},T_1)$ 都有$\chi(\bar{\varphi}_0)>0$。此时,令 $\bar{\chi}_0=\min\{\chi(\bar{\varphi}_0(t)),t\in(t_{k,0},T_1)\}$。考虑 $t\in(t_{k,0},T_1)$,可得

$$\dot{V}_0\leqslant-2\rho(T_1,t)\chi(\bar{\varphi}_0)\lambda_1V_0-2\lambda_2\chi(\bar{\varphi}_0)V_0\leqslant -2\rho(T_1,t)\bar{\chi}_0\lambda_1V_0-2\lambda_2\bar{\chi}_0V_0 \tag{41}$$

进一步可得

$$V_0(t)\leqslant\left(\frac{(T_1-t)^{2T_1\lambda_1\bar{\chi}_0}}{(T_1-t_{k,0})^{2T_1\lambda_1\bar{\chi}_0}}\mathrm{e}^{-2\lambda_2\bar{\chi}_0(t-t_{k,0})}\right)V_0(t_{k,0}) \tag{42}$$

可得$\lim\limits_{t\to T_1}V_0(t)\leqslant\lim\limits_{t\to T_1}[(T_1-t)/(T_1-t_{k,0})]^{2T_1\lambda_1\bar{\chi}_0}\mathrm{e}^{-2\lambda_2\bar{\chi}_0(t-t_{k,0})}V_0(t_{k,0})=0$,又因 $V_0(t)\geqslant0$,故$\lim\limits_{t\to T_1}V_0(t)=0$。因此,领弹的攻击时间 $t_{\mathrm{f},0}$ 将在预设时间 T_1 内收敛到期望攻击时间 t_{fd}。

综合上述分析可证,式(24)给出的制导律能够使领弹攻击角度在击中目标时收敛到期望值,且其攻击时间能在预设时间 T_1 内收敛到期望值。

注释 2　结合定理 1 分析可知,$\forall t<t_{\mathrm{f},0},\varphi_0(t)\neq0$,由 $T_1<t_{\mathrm{f},0}$可得,$\varphi_0(t)=0$ 在 $t\in(0,T_1)$上只存在有限个解,虽然不会导致领弹制导律的攻击时间控制项完全失效,但仍可能存在部分时刻满足 $\varphi_0(t)=0$。因此,在进行制导律稳定性证明过程中,需要分两种情况进行讨论,进一步分析部分时刻奇异性问题导致的制导指令失效现象对制导系统稳定性的影响,增强了理论证明的完备性。

3　从弹制导律设计及分析

3.1　从弹制导律设计

从弹的制导律设计一方面需要从弹能够沿期望的角度打击目标,另一方面还要使得从弹的攻击时间都能够跟踪上领弹的攻击时间,实现弹群的时间协同。为此,采用在最优攻击角度控制制导律的基础上设计时间协同偏置项的方式,将从弹 $M_i(i=1,\cdots,n)$的制导律设计如下:

$$a_i=NV_i\dot{\lambda}_i-\frac{K(N-1)V_i}{t_{\mathrm{go},i}^{\mathrm{OIACG}}}e_{\gamma,i}+a_i^{\mathrm{BT}}+a_i^{*} \tag{43}$$

$$t_{\mathrm{go},i}^{\mathrm{OIACG}}=-\frac{R_i}{\dot{R}_i} \tag{44}$$

在小角度假设条件下,由式(6)~(10)和式(43)构成的从弹制导系统的攻击时间及其导数可分别表述为:

$$t_{\mathrm{f},i}=\frac{R_i}{V_i}\left(1+\frac{\sigma_i^2}{2(2N-1)}-\frac{K(N-1)\sigma_ie_{\gamma,i}}{(2N-1)(N+K)}+\frac{K^2(N-1)^2e_{\gamma,i}^2}{(2N-1)(N+K)(2K+1)}\right)+t \tag{45}$$

$$\dot{t}_{\mathrm{f},i}=\frac{NR_i\varphi_ia_i^{\mathrm{BT}}}{(2N-1)(N+K)V_i^2} \tag{46}$$

式中,a_i^{BT} 为从弹的时间协同项。令 $\bar{\varphi}_i=\varphi_i/\varphi_{\max}$,其基本形式设计为

$$a_i^{\mathrm{BT}}=\frac{(2N-1)(N+K)V_i^2}{NR_i\varphi_i}\chi(\bar{\varphi}_i)u_i \tag{47}$$

定义　$e_i=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}(t_{\mathrm{f},i}-t_{\mathrm{f},j})+b_i(t_{\mathrm{f},i}-t_{\mathrm{f},0})$,$\delta_i=t_{\mathrm{f},i}-t_{\mathrm{f},0}$。令 $\boldsymbol{t}_{\mathrm{f}}=[t_{\mathrm{f},1},t_{\mathrm{f},2},\cdots,t_{\mathrm{f},n}]^{\mathrm{T}}$,跟踪误差向量可表示为 $\boldsymbol{\delta}=[\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n]^{\mathrm{T}}$,协同误差向量可表示为 $\boldsymbol{e}=[e_1,e_2,\cdots,e_n]^{\mathrm{T}}$,则有 $\boldsymbol{e}=\boldsymbol{H}\boldsymbol{\delta}$。基于预设时间稳定理论设计 u_i 如下:

$$u_i=-\rho(T_2,t)\lambda_3e_i-\lambda_4e_i \tag{48}$$

其中

$$\rho(T_2,t)=\begin{cases}\mu(T_2,t), & t<T_2\\ 0, & t\geqslant T_2\end{cases}$$

式中:λ_3、λ_4 均为正实数;T_2 为从弹的预设收敛时间,且满足 $T_1<T_2<t_{\mathrm{fd}}$;$\mu(T_2,t)$为时变增益函数。

令$(\lambda_i-\gamma_{\mathrm{d},i})^2+(\gamma_i-\gamma_{\mathrm{d},i})^2=d_i$,可将从弹的附加控制项 a_i^{*} 设计如下:

$$a_i^{*}=\begin{cases}-\beta e_i\mathrm{sgn}^{*}(\varphi_i), & u_i^2\geqslant\Delta_1\ \text{且}\ d_i\leqslant\Delta_2\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{49}$$

此时,从弹制导律的完整形式可描述为

$$a_i=NV_i\dot{\lambda}_i-\frac{K(N-1)V_i}{t_{\mathrm{go},i}^{\mathrm{OIACG}}}e_{\gamma,i}+\frac{(2N-1)(N+K)V_i^2}{NR_i\varphi_i}\chi(\bar{\varphi}_i)u_i+a_i^{*} \tag{50}$$

3.2　从弹制导系统稳定性分析

下面对从弹制导系统的稳定性进行分析,进一步证明在所设计的从弹制导律作用下,能够使从弹在满足角度约束的同时在预设时间内跟踪上领弹的状态。

定理 3 针对式(6)~(10)所示的从弹运动学模型,在制导律式(50)的作用下,可使从弹的攻击时间在预设时间 T_2 内跟踪上领弹的攻击时间,即 $t_{\mathrm{f},0}=t_{\mathrm{f},1}=t_{\mathrm{f},2}=\cdots=t_{\mathrm{f},n}$, $\forall t\geqslant T_2$,且从弹攻击角度能够在命中目标时收敛到期望攻击角度,即 $\gamma_i(t_{\mathrm{f},i})=\gamma_{\mathrm{d},i}, i=1,2,\cdots,n$。

证明 参考定理 1 可得,当且仅当 $t\geqslant t_{\mathrm{f},i}$ 时,$\varphi_i(t_{\mathrm{f},i})\equiv 0$,即 $t\in[0,T_2)$ 时 $\varphi_i(t)=0$ 只存在有限个解。构建 Lyapunov 函数如下:

$$V_1=\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{e} \tag{51}$$

式中,矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的定义如引理 1 所示,设 $\mathbf{1}_n$ 为所有元素均为 1 的 n 维列向量,$\boldsymbol{\chi}=\mathrm{diag}\{\chi(\bar{\varphi}_i)\}$,$\boldsymbol{\zeta}=\mathrm{diag}\{|\varphi_i|R_i/V_i^2\}$,对式(51)求导可得

$$\begin{aligned}\dot{V}_1=&2\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\dot{\boldsymbol{e}}=2\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}(\dot{\boldsymbol{t}}_{\mathrm{f}}-\dot{t}_{\mathrm{f},0}\mathbf{1}_n)=\\&2\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}\left(-\rho(T_2,t)\lambda_3\boldsymbol{\chi}\boldsymbol{e}-\lambda_4\boldsymbol{\chi}\boldsymbol{e}-\frac{\beta N\boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{e}}{(2N-1)(N+K)}-\dot{t}_{\mathrm{f},0}\mathbf{1}_n\right)\end{aligned} \tag{52}$$

结合引理 1 可得

$$\begin{aligned}\dot{V}_1=&\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}+\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P})\left(-\rho(T_2,t)\lambda_3\boldsymbol{\chi}\boldsymbol{e}-\lambda_4\boldsymbol{\chi}\boldsymbol{e}-\frac{\beta N\boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{e}}{(2N-1)(N+K)}-\dot{t}_{\mathrm{f},0}\mathbf{1}_n\right)=\\&\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\left(-\rho(T_2,t)\lambda_3\boldsymbol{\chi}\boldsymbol{e}-\lambda_4\boldsymbol{\chi}\boldsymbol{e}-\frac{\beta N\boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{e}}{(2N-1)(N+K)}-\dot{t}_{\mathrm{f},0}\mathbf{1}_n\right)\end{aligned} \tag{53}$$

1)若 $\varphi_i(t)=0$ 在 $[0,T_2)$ 上无解,则 $\forall t\in[0,T_2)$ 都有 $\chi(\bar{\varphi}_i)>0$。由定理 1 可得,$\forall t\in[T_1,+\infty)$ 都有 $e_0=0$,即 $\dot{t}_{\mathrm{f},0}=0$。令 $\hat{\chi}=\min\{\chi(\bar{\varphi}_i(t)),t\in[T_1,T_2)\}$,由 $T_2>T_1$ 可得,当 $t\in[T_1,T_2)$ 时,有

$$\begin{aligned}\dot{V}_1=&\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\left(-\rho(T_2,t)\lambda_3\boldsymbol{\chi}\boldsymbol{e}-\lambda_4\boldsymbol{\chi}\boldsymbol{e}-\frac{\beta N\boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{e}}{(2N-1)(N+K)}\right)\leqslant\\&\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\lambda_{\min}(\boldsymbol{Q})\hat{\chi}(-\rho(T_2,t)\lambda_3\boldsymbol{e}-\lambda_4\boldsymbol{e})\leqslant\\&-2\lambda_3\lambda_{\min}(\boldsymbol{Q})\hat{\chi}\rho(T_2,t)V_1-2\lambda_4\lambda_{\min}(\boldsymbol{Q})\hat{\chi}V_1\end{aligned} \tag{54}$$

由引理 2 可得,从弹的攻击时间 $t_{\mathrm{f},i}$ 将在预设时间 T_2 内跟踪上领弹的攻击时间 $t_{\mathrm{f},0}$。此时,$\bar{\lambda}_1=2\lambda_3\lambda_{\min}(\boldsymbol{Q})\hat{\chi}$,$\bar{\lambda}_2=2\lambda_4\lambda_{\min}(\boldsymbol{Q})\hat{\chi}$。

2)若 $\varphi_i(t)=0$ 在 $[0,T_2)$ 存在解 $t_{1,i},t_{2,i},\cdots,t_{k,i}$ 且满足 $t_{1,i}<t_{2,i}<\cdots<t_{k,i}<T_2$,令 $t_k=\max\{t_{k,1},t_{k,2},\cdots,t_{k,n}\}$,则 $\forall t\in(t_k,T_2)$ 都有 $\chi(\bar{\varphi}_i)>0$。令 $\bar{\chi}=\min\{\chi(\bar{\varphi}_1(t)),\chi(\bar{\varphi}_2(t)),\cdots,\chi(\bar{\varphi}_n(t))\}$,$t\in(t_k,T_2)$。考虑 $t\in(t_k,T_2)$,可得

$$\begin{aligned}\dot{V}_1=&\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\left(-\rho(T_2,t)\lambda_3\boldsymbol{\chi}\boldsymbol{e}-\lambda_4\boldsymbol{\chi}\boldsymbol{e}-\frac{\beta N\boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{e}}{(2N-1)(N+K)}\right)\leqslant\\&\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\lambda_{\min}(\boldsymbol{Q})\bar{\chi}(-\rho(T_2,t)\lambda_3\boldsymbol{e}-\lambda_4\boldsymbol{e})\leqslant\\&-2\lambda_3\lambda_{\min}(\boldsymbol{Q})\bar{\chi}\rho(T_2,t)V_1-2\lambda_4\lambda_{\min}(\boldsymbol{Q})\bar{\chi}V_1\end{aligned} \tag{55}$$

进一步可得

$$V_1(t)\leqslant\frac{(T_2-t)^{2T_2\lambda_3\lambda_{\min}(\boldsymbol{Q})\bar{\chi}}}{(T_2-t_k)^{2T_2\lambda_3\lambda_{\min}(\boldsymbol{Q})\bar{\chi}}}\mathrm{e}^{-2\lambda_4\lambda_{\min}(\boldsymbol{Q})\bar{\chi}(t-t_k)}V_1(t_k) \tag{56}$$

得到 $\lim\limits_{t\to T_2}V_1(t)\leqslant\lim\limits_{t\to T_2}[(T_2-t)/(T_2-t_k)]^{2T_2\lambda_3\lambda_{\min}(\boldsymbol{Q})\bar{\chi}}\mathrm{e}^{-2\lambda_4\lambda_{\min}(\boldsymbol{Q})\bar{\chi}(t-t_k)}V_1(t_k)=0$,结合 $V_1(t)\geqslant 0$ 可得 $\lim\limits_{t\to T_2}V_1(t)=0$。因此,从弹的攻击时间 $t_{\mathrm{f},i}$ 将在预设时间 T_2 内跟踪上领弹的攻击时间 $t_{\mathrm{f},0}$。

综合上述分析可证,式(50)给出的制导律能够使得从弹的攻击角度在击中目标时收敛到期望值,并使从弹攻击时间在预设时间 T_2 内跟踪上领弹的攻击时间。

注释 3 观察式(54)、(55)可得,当且仅当 $\dot{t}_{\mathrm{f},0}=0$ 时,从弹制导系统的 Lyapunov 函数能够满足预设时间稳定准则,使得协同误差收敛。当领弹攻击时间误差未收敛,即 $\dot{t}_{\mathrm{f},0}\neq 0$ 时,无法保证从弹协同误差的收敛性。因此,领弹的攻击时间控制收敛时间小于从弹协同误差收敛时间。在设计从弹制导律时,为保证集群攻击时间调节的预设时间收敛特性,需要满足条件 $T_2>T_1$,使得导弹集群的攻击时间都能够在 T_2 时间内收敛到期望打击时间。若在预设收敛时间 T_1、T_2 之前,制导指令出现完全奇异现象,则会影响领弹与从弹的预设时间收敛性能,进一步破坏集群的攻击时间可调效果。因此,本文首先分析了完全奇异现象对领弹与从弹时间协同控制有效性的影响,而后针对领弹与从弹,分别证明其制导系统均能保持稳定。

4 仿真分析

本文首先验证所提方法的有效性,然后通过在相同案例下将现有研究制导律与本文所提制导律进行仿真对比,进一步验证所提方法的先进性。仿真中,设置包含 1 枚领弹和 3 枚从弹的导弹集群,目标位于原点,且导弹的加速度被限制在 150 $\mathrm{m/s^2}$。

4.1 有效性验证

案例 1 设置导弹集群的攻击时间为 30 s,领弹的预设收敛时间为 10 s,从弹的预设收敛时间为

15 s,期望弹道倾角为 40°、60°、-10°、75°。集群通信拓扑结构如图 3 所示。

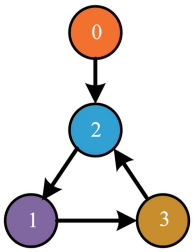


图 3　案例 1 导弹集群拓扑结构图

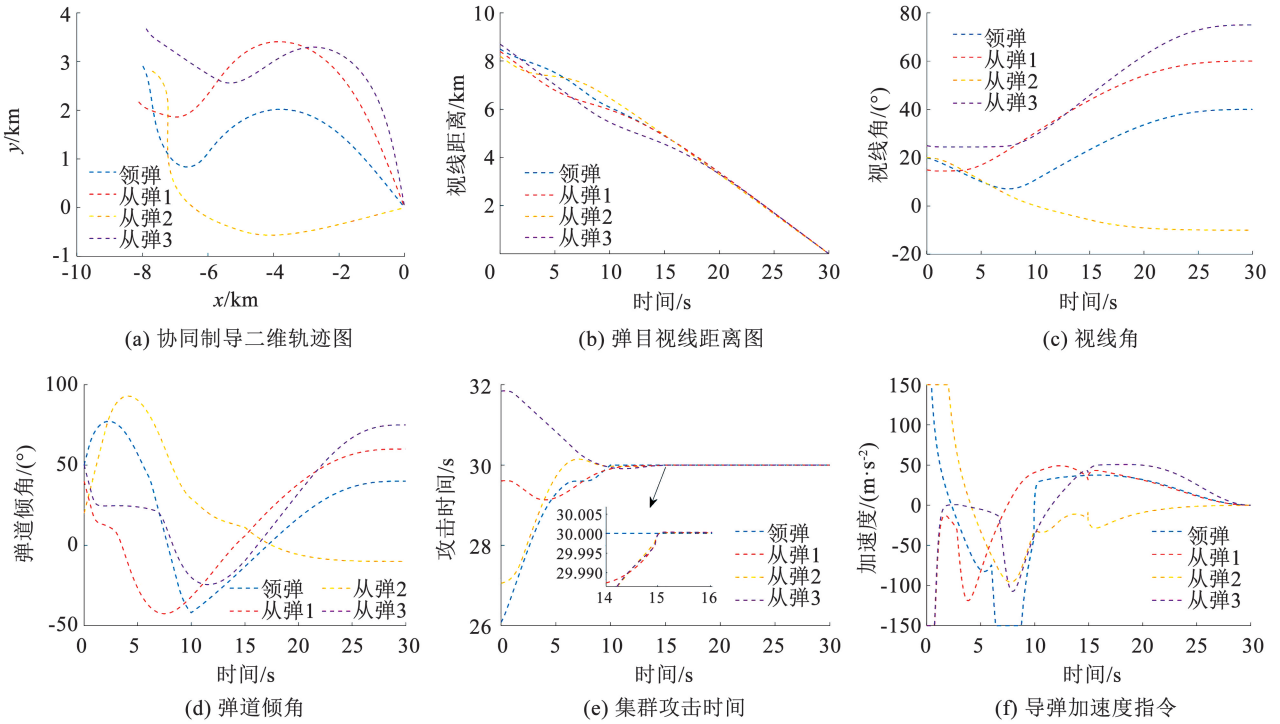
Fig. 3　Topology diagram of missile swarm in case 1

在二维交战平面上对式(13)以及式(43)所给出的制导律进行仿真,仿真的初始状态见表 1。领弹制导律(13)和从弹制导律(43)的参数设置为:$N=4$,$K=5$,$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0.10$,$\lambda_4=0.08$,$t_{fd}=30$ s,$T_1=10$ s,$T_2=15$ s,$\kappa=4$,$\varphi_{max}=20°$,$\beta=1$,$\Delta_1=\Delta_2=0.1$。仿真结果如图 4 所示。

表 1　案例 1 多弹协同初始条件设置

Tab. 1　Initial condition settings for multi-missile coordination in case 1

导弹	初始视线距离/m	初始速度/(m·s^{-1})	初始弹道倾角/(°)	初始视线角/(°)	期望弹道倾角/(°)
领弹	8 500	340	50	20	40
从弹 1	8 400	340	40	15	60
从弹 2	8 200	340	20	20	-10
从弹 3	8 700	340	50	25	75



(a) 协同制导二维轨迹图　(b) 弹目视线距离图　(c) 视线角

(d) 弹道倾角　(e) 集群攻击时间　(f) 导弹加速度指令

图 4　案例 1 仿真结果图

Fig. 4　Simulation results of case 1

从图 4(a)、4(b)可以看出,领弹-从弹导弹集群的运动轨迹都收敛到了位于原点的目标处,且其与目标之间的视线距离均减少到 0,所设计的制导律能够满足脱靶量。结合图 4(c)、4(d)可知,导弹集群都能以 40°、60°、-10°、75°的期望攻击角实现对目标的全方位打击,所采用的基于最优误差动力学的角度控制制导律,能够保证导弹集群的角度协同条件在击中目标前收敛到期望值。从图 4(e)可以看出,领弹的攻击时间在所提制导律的作用下能够在预设时间 10 s 内收敛到期望攻击时间 30 s,在从弹制导律中领弹-从弹跟踪误差和从弹局部协同误差的作用下,从弹 2 能够持续跟踪领弹状态,并带动了其他从弹跟踪领弹,最终使得从弹集群在预设时间 15 s 内跟踪上领弹的攻击时间,实现弹群的时间协同,且所设计的附加控制项能够有效保证攻击时间控制的有效性。图 4(f)为导弹的加速度仿真图,其加速度曲线不存在奇异性现象,所设计的辅助函数能够有效解决制导指令的奇异性问题。

案例 2　设置导弹集群的攻击时间为 35 s,领弹的预设收敛时间为 10 s,从弹的预设收敛时间为 15 s,期望弹道倾角为 40°、30°、20°、10°。集群通信拓扑结构如图 5 所示。

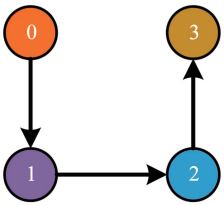


图 5 案例 2 导弹集群拓扑结构图

Fig. 5 Topology diagram of missile swarm in case 2

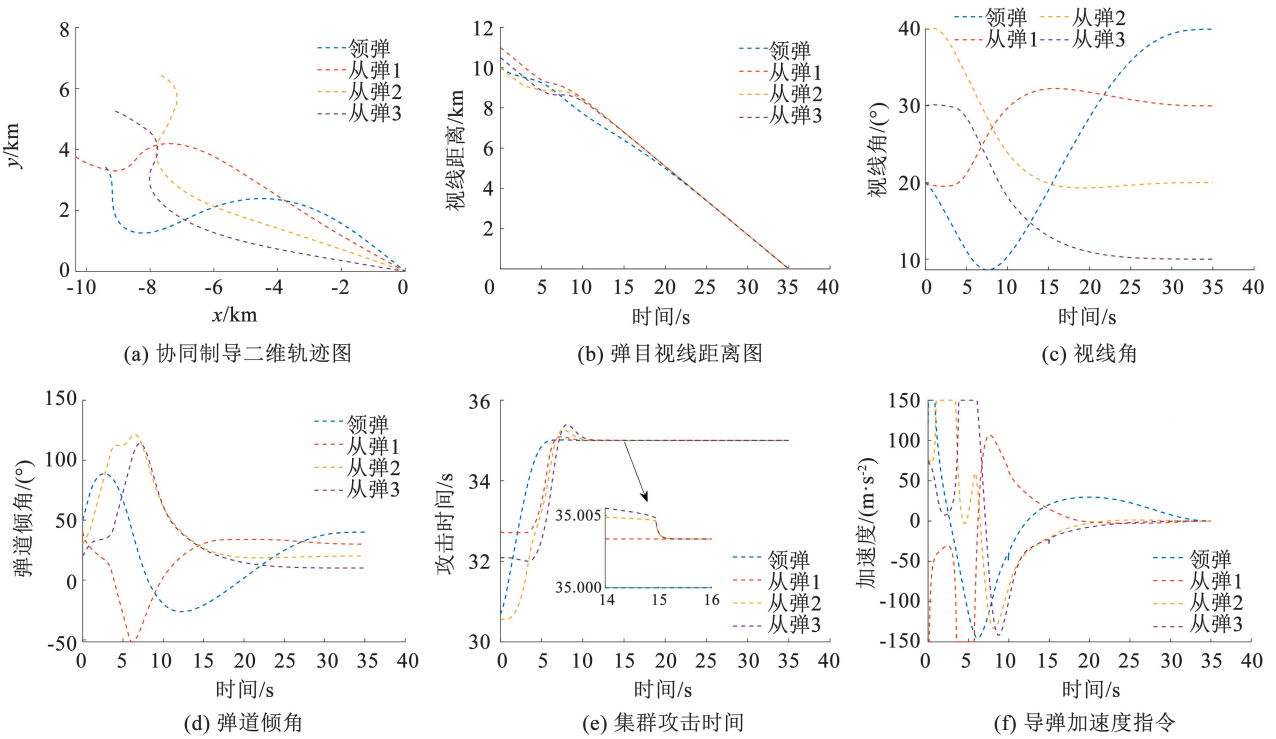
仿真中各导弹的初始状态见表 2。领弹制导律(13)和从弹制导律(43)的参数设置为:$N=4$,$K=5$,$\lambda_1=\lambda_2=0.80$,$\lambda_3=0.10$,$\lambda_4=0.08$,$t_{fd}=35$ s,$T_1=10$ s,$T_2=15$ s,$\kappa=4$,$\varphi_{max}=20°$,$\beta=1$,$\Delta_1=\Delta_2=0.1$。仿真结果如图 6 所示。

从图 6(d)可以看出,导弹集群能够以 40°、30°、20°、10°的期望攻击角击中目标,所设计的制导律能够保证导弹的攻击角度在击中目标前收敛到期望值。从图 6(e)可以看出,所设计的制导律能够使领弹的攻击时间在预设时间 10 s 内收敛到期望攻击时间 35 s,从弹 1 能够持续跟踪领弹状态,并带动其他从弹跟踪领弹,使得从弹集群能够在预设时间 15 s内跟踪上领弹的攻击时间,且附加控制项能够保证攻击时间控制的有效性。从图 6(f)可以看出,在辅助函数作用下,加速度不存在奇异性现象。

表 2 案例 2 多弹协同初始条件设置

Tab. 2 Initial condition settings for multi-missile coordination in case 2

导弹	初始视线距离/m	初始速度/(m·s^{-1})	初始弹道倾角/(°)	初始视线角/(°)	期望弹道倾角/(°)
领弹	10 000	340	50	20	40
从弹 1	11 000	340	40	20	30
从弹 2	10 000	340	30	40	20
从弹 3	10 500	340	20	30	10



(a) 协同制导二维轨迹图 (b) 弹目视线距离图 (c) 视线角

(d) 弹道倾角 (e) 集群攻击时间 (f) 导弹加速度指令

图 6 案例 2 仿真结果图

Fig. 6 Simulation results of case 2

案例 3 设置集群通信拓扑结构如图 7 所示。

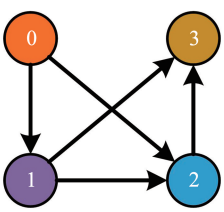


图 7 案例 3 导弹集群拓扑结构图

Fig. 7 Topology diagram of missile swarm in case 3

设置导弹集群的攻击时间为 25 s,领弹的预设收敛时间为 15 s,从弹的预设收敛时间为 20 s,期望弹道倾角为 30°、20°、20°、10°。

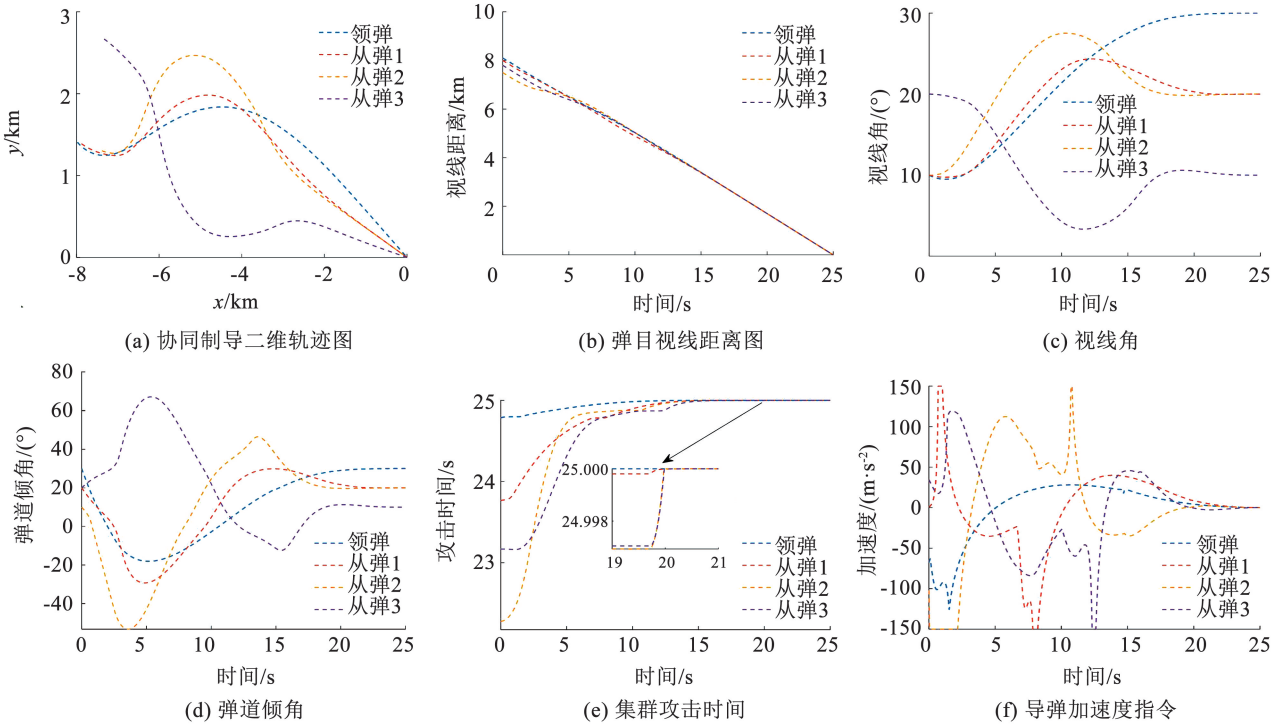
仿真中导弹的初始状态见表 3。领弹制导律(13)和从弹制导律(43)的参数设置为:$N=4$,$K=5$,$\lambda_1=0.20$,$\lambda_2=0.05$,$\lambda_3=0.10$,$\lambda_4=0.08$,$t_{fd}=25$ s,$T_1=15$ s,$T_2=20$ s,$\kappa=4$,$\varphi_{max}=20°$,$\beta=1$,$\Delta_1=\Delta_2=0.1$。仿真结果如图 8 所示。

表 3　案例 3 多弹协同初始条件设置

Tab. 3　Initial condition settings for multi-missile coordination in case 3

导弹	初始视线距离/m	初始速度/(m·s^{-1})	初始弹道倾角/(°)	初始视线角/(°)	期望弹道倾角/(°)
领弹	8 100	340	30	10	30
从弹 1	8 000	340	20	10	20
从弹 2	7 500	340	10	10	20
从弹 3	7 800	340	20	20	10

从图 8(d)可以看出,导弹集群能够以 30°、20°、20°、10°的期望攻击角击中目标,所设计制导律能够在击中目标前使攻击角度收敛到期望值。从图 8(e)可以看出,所设计的制导律能够使领弹的攻击时间在预设时间 15 s 内收敛到期望攻击时间 25 s,从弹 1 和从弹 2 能够持续跟踪领弹状态,并带动其他从弹跟踪领弹,使得从弹集群能够在预设时间 20 s 内跟踪上领弹的攻击时间。从图 8(f)可以看出,加速度曲线不存在奇异性现象。综上所述,可以得出本文所提出的制导律能够事先指定弹群攻击时间和攻击角度,并在有向拓扑条件下使弹群在满足终端角度约束的同时实现时间协同。



(a) 协同制导二维轨迹图　(b) 弹目视线距离图　(c) 视线角

(d) 弹道倾角　(e) 集群攻击时间　(f) 导弹加速度指令

图 8　案例 3 仿真结果图

Fig. 8　Simulation results of case 3

4.2　对比验证

为了进一步验证所提出预设时间协同制导方法的优越性,采用文献[22]中的协同制导律进行对比。为了便于对比验证,领弹的制导律采用文献[22]所提制导律,其表达式如式(57)所示;从弹基于文献[22]所提制导律,将误差项替换为集群的攻击时间误差进行仿真验证,其表达式如式(60)所示。

$$a_0 = 4V_0\dot{\lambda}_0 + 2V_0^2\frac{\lambda_0-\gamma_{f,0}}{R_0} + \left(-m\mathrm{sgn}(\varphi_0) - \frac{h(\varphi_0)}{\varphi_0}l - n\mathrm{sgn}(s)\,\mathrm{sgn}(\sigma_0)\right)f\left(\frac{s}{\mu}\right) \tag{57}$$

式中:l,m,n 为常数,满足 $l>0$ 且 $m>n>0$;μ 为一个小量正常数;$\varphi_0=\lambda_0-\gamma_{d,0}+4\sigma_0$;$s=t_{f,0}-t_{fd}$。$h(\varphi)$的定义如下:

$$h(\varphi)=\begin{cases}1, & |\varphi|\geqslant\varepsilon\\ \left(\dfrac{\varphi}{\varepsilon}\right)^2, & |\varphi|<\varepsilon\end{cases} \tag{58}$$

式中 ε 为一个小量正常数。此外,函数 $f(x)$ 的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}\mathrm{sgn}(x), & |x|\geqslant 1\\ x, & |x|<1\end{cases} \tag{59}$$

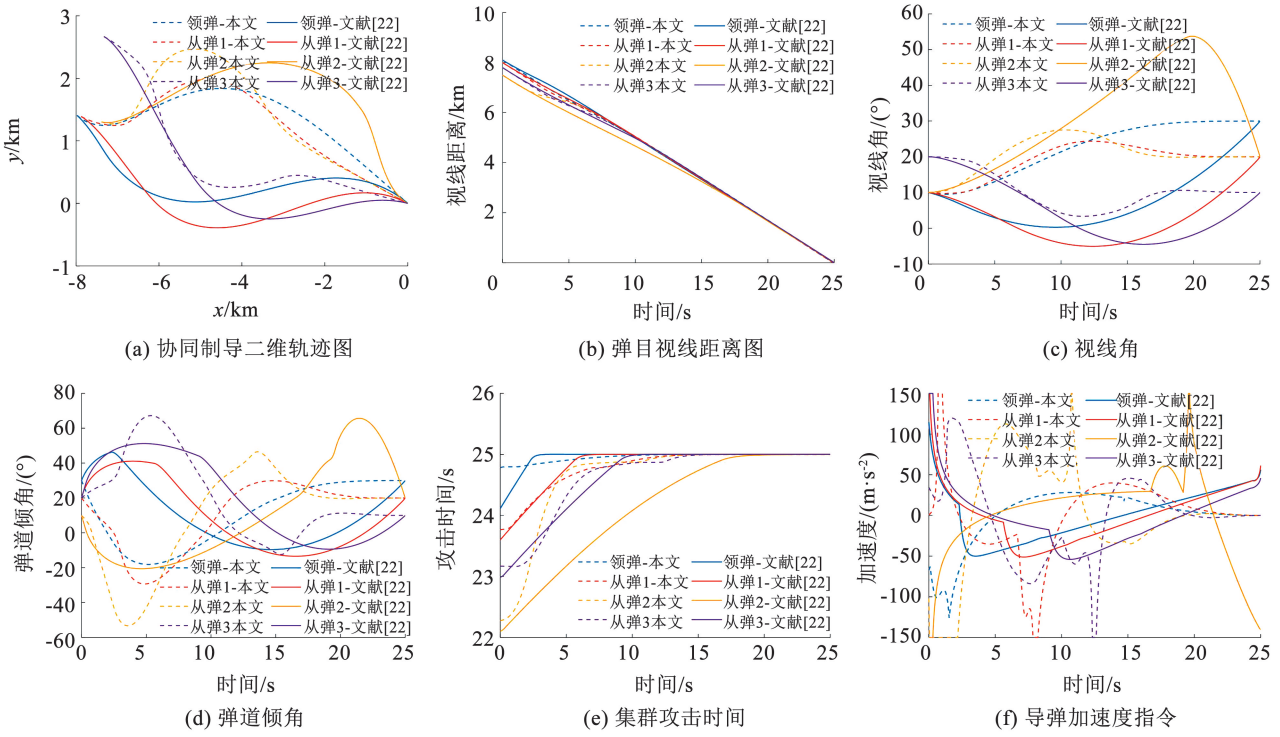
从弹的制导律设计如下:

$$a_i = 4V_i\dot{\lambda}_i + 2V_i^2\frac{\lambda_i-\gamma_{f,i}}{R_i} + \left(-m\mathrm{sgn}(\varphi_i) - \frac{h(\varphi_i)}{\varphi_i}l - n\mathrm{sgn}(e_i)\,\mathrm{sgn}^*(\sigma_i)\right)f\left(\frac{e_i}{\mu}\right) \tag{60}$$

式中：$e_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t_{\mathrm{f},i} - t_{\mathrm{f},j}) + b_i(t_{\mathrm{f},i} - t_{\mathrm{f},0})$；$\varphi_i = \lambda_i - \gamma_{\mathrm{d},i} + 4\sigma_i$。领弹与从弹的攻击时间估计表达式为

$$t_{\mathrm{f},i} = \frac{R_i}{V_i}\left(1 + \frac{\sigma_i^2 + (\lambda_i - \gamma_{\mathrm{f},i})^2}{15} + \frac{\sigma_i(\lambda_i - \gamma_{\mathrm{f},i})}{30}\right) \tag{61}$$

设置仿真参数为：$l = 110$，$m = 2$，$n = 1$，$\mu = 0.1$，$\varepsilon = 0.2$，$t_{\mathrm{fd}} = 25$ s，期望攻击角度为 30°、20°、20°、10°。仿真中导弹初始状态和集群拓扑结构图与案例 3 保持一致，其仿真对比结果如图 9 所示。



(a) 协同制导二维轨迹图　(b) 弹目视线距离图　(c) 视线角

(d) 弹道倾角　(e) 集群攻击时间　(f) 导弹加速度指令

图 9　文献[22]制导律对比验证仿真结果图

Fig. 9　Comparison verification simulation results of guidance law in Ref. [22]

对比图 8(c)、8(d)与图 9(c)、9(d)可知，导弹在文献[22]所提制导律作用下，导弹的弹道倾角与视线角在击中目标时仍然存在一个较大的角速率，而在本文所提制导律的作用下，其视线角与弹道倾角的角速率会趋于 0，更利于末段控制的稳定性。对比图 8(e)与图 9(e)可知，两种制导律作用下的初始攻击时间不同，这是由于不同制导律的攻击时间估计表达式不同，文献[22]所提制导律只能保证集群攻击时间偏差渐近收敛，当参数选取不当时，可能导致协同条件在击中目标前无法收敛，而本文所提制导律能够保证集群攻击时间偏差在预设时间内收敛，能够良好地适应实战场景下导弹协同约束条件收敛可控的需求。对比图 8(f)与图 9(f)可知，文献[22]所提制导律会使得导弹加速度在即将击中目标时，产生较大跳动，而本文所提制导律所产生的制导指令在击中目标时会逐渐趋于 0，有利于提高制导精度。

5　结　论

1)针对具有欠驱动特性的领从式导弹集群，设计了领弹与从弹协同制导律，通过显式估计导弹集群的剩余飞行时间，并基于预设时间准则，在最优角度控制制导律基础上构造了时间协同偏置项，在满足角度约束的同时，实现了预设时间收敛的时间协同。

2)针对导弹集群间通信为有向拓扑的情况，独立设计了攻击时间和攻击角度可控的领弹制导律，并引入领弹-从弹跟踪误差与从弹局部协同误差设计了从弹制导律，可达到通过控制领弹攻击时间进一步调节整个导弹集群攻击时间的效果，实现导弹集群的攻击时间可调。

3)针对制导指令奇异性问题，设计了辅助函数以及附加控制项，并给出了定理 1 形式的完全奇异现象排除判据，对攻击时间控制项的有效性进行了详细分析。所设计的辅助函数和附加控制项能够有效解决制导指令奇异性问题，并规避完全奇异现象，进一步保证攻击时间控制的有效性。

参考文献

[1]周彬，郑浩宇，郝明瑞，等. 多约束下的协同制导方法研究综述

[J]. 无人系统技术, 2025, 8(4): 1
Zhou Bin, Zheng Haoyu, Hao Mingrui, et al. Review of cooperative guidance method under multiple constraints[J]. Unmanned Systems Technology, 2025, 8(4): 1. DOI: 10.19942/j.issn.2096-5915.2025.04.31

[2] Lee J I, Jeon I S, Tahk M J. Guidance law to control impact time and angle [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2007, 43(1): 301. DOI: 10.1109/TAES.2007.357135

[3] Dong Wei, Wang Chunyan, Liu Junhui, et al. Three-dimensional vector guidance law with impact time and angle constraints [J]. Journal of the Franklin Institute, 2023, 360(2): 693. DOI: 10.1016/j.jfranklin.2022.11.035

[4] Wang Pengyu, Lee C H, Cho N, et al. Generalized time-to-go inversion guidance with impact time and angle constraints [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2025, 48(3): 555. DOI: 10.2514/1.G008491

[5] Zhao Shiyu, Zhou Rui. Cooperative guidance for multimissile salvo attack[J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2008, 21(6): 533. DOI: 10.1016/S1000-9361(08)60171-5

[6] Lyu Teng, Guo Yanning, Li Chuanjiang, et al. Multiple missiles cooperative guidance with simultaneous attack requirement under directed topologies[J]. Aerospace Science and Technology, 2019, 89: 100. DOI: 10.1016/j.ast.2019.03.037

[7] Qin Mingxing, Wang Le, Xi Jianxiang, et al. Bounded-gain prescribed-time robust spatiotemporal cooperative guidance law for UAVs under jointly strongly connected topologies [J]. Drones, 2025, 9(7): 474. DOI: 10.3390/drones9070474

[8] Wang Chunyan, Dong Wei, Wang Jianan, et al. Impact-angle-constrained cooperative guidance for salvo attack [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2021, 45(4): 684. DOI: 10.2514/1.G006342

[9] 李鹤宇, 王建斌, 张锐, 等. 具有时间和角度约束的欠驱动三维协同制导律[J]. 宇航学报, 2024, 45(10): 1633
Li Heyu, Wang Jianbin, Zhang Rui, et al. Underactuated three-dimensional cooperative guidance law with time and angle constraints [J]. Journal of Astronautics, 2024, 45(10): 1633. DOI: 10.3873/j.issn.1000-1328.2024.10.012

[10] 董伟, 易鑫, 张后军, 等. 攻击角度和时间精确控制的制导律设计[J]. 航空学报, 2025, 46(4): 205
Dong Wei, Yi Xin, Zhang Houjun, et al. Design of guidance law with precise impact angle and time control[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2025, 46(4): 205. DOI: 10.7527/S1000-6893.2024.30787

[11] Zhang Shuai, Guo Yang, Liu Zhiguo, et al. Finite-time cooperative guidance strategy for impact angle and time control [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2021, 57(2): 806. DOI: 10.1109/TAES.2020.3037958

[12] You Hao, Chang Xinlong, Zhao Jiufen, et al. Three-dimensional impact-angle-constrained fixed-time cooperative guidance algorithm with adjustable impact time[J]. Aerospace Science and Technology, 2023, 141: 108574. DOI: 10.1016/j.ast.2023.108574

[13] You Hao, Chang Xinlong, Zhao Jiufen. Three-dimensional line-of-sight-angle-constrained leader-following cooperative interception guidance law with prespecified impact time[J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2025, 38(1): 103151. DOI: 10.1016/j.cja.2024.07.023

[14] Lyu Teng, Li Chuanjiang, Guo Yanning, et al. Three-dimensional finite-time cooperative guidance for multiple missiles without radial velocity measurements[J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2019, 32(5): 1294. DOI: 10.1016/j.cja.2018.12.005

[15] Dong Wei, Wang Chunyan, Wang Jianan, et al. Fixed-time terminal angle-constrained cooperative guidance law against maneuvering target [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2022, 58(2): 1352. DOI: 10.1109/TAES.2021.3113292

[16] 池海红, 丁栖航, 张国良. 预定时间多导弹三维协同制导律[J]. 宇航学报, 2023, 44(8): 1238
Chi Haihong, Ding Xihang, Zhang Guoliang. Three-dimensional cooperative guidance law for multiple missiles with predefined-time convergence[J]. Journal of Astronautics, 2023, 44(8): 1238. DOI: 10.3873/j.issn.1000-1328.2023.08.012

[17] Zhang Liang, Li Danyu, Jing Liang, et al. Appointed-time cooperative guidance law with line-of-sight angle constraint and time-to-go control [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2023, 59(3): 3142. DOI: 10.1109/TAES.2022.3221059

[18] Li Zhongkui, Wen Guanghui, Duan Zhisheng, et al. Designing fully distributed consensus protocols for linear multi-agent systems with directed graphs[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2015, 60(4): 1152. DOI: 10.1109/TAC.2014.2350391

[19] Ren Yuanhong, Zhou Wuneng, Li Zhiwei, et al. Prescribed-time cluster lag consensus control for second-order non-linear leader-following multiagent systems[J]. ISA Transactions, 2021, 109: 49. DOI: 10.1016/j.isatra.2020.09.012

[20] He Shaoming, Lee C H. Optimality of error dynamics in missile guidance problems [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2018, 41(7): 1624. DOI: 10.2514/1.G003343

[21] Dong Wei, Wang Chunyan, Wang Jianan, et al. Varying-gain proportional navigation guidance for precise impact time control [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2022, 46(3): 535. DOI: 10.2514/1.G007174

[22] Chen Ye, Wu Shufan, Wang Xiaoliang. Impact time and angle control optimal guidance with field-of-view constraint[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2022, 45(12): 2369. DOI: 10.2514/1.G007030

(编辑　张　红)