DOI:10.11918/202505040

Rayleigh 波-竖向荷载作用下非饱和土中单桩水平振动特性

曹小林[1],曾乐平[1],周凤玺[1],高智岗[1],戴国亮[2],王智强[3]

(1. 兰州理工大学 土木与水利工程学院,兰州 730050;2. 东南大学 土木工程学院,南京 211189;
3. 建材天水地质工程勘察院有限公司,甘肃 天水 741000)

摘 要:为了探究 Rayleigh 波作用下竖向荷载对桩基础水平振动的影响,基于多孔连续介质理论,建立了非饱和土中单桩在 Rayleigh 波-竖向荷载联合作用下的动力响应理论计算模型。考虑桩土相互作用及 Rayleigh 波-竖向荷载联合作用,利用 Timoshenko 梁理论,给出桩在非饱和土地基中的水平动力响应解析解。基于数值结果,与现有计算模型对比,验证了本计算模型的正确性,并探讨了竖向荷载、无量纲频率及屈服弯矩等参数对单桩水平动力响应的作用机制。研究结果表明:当竖向荷载与屈服弯矩增大时,桩身的位移、转角、剪力及弯矩均呈现递增趋势;而随着无量纲频率的升高,桩身的位移、转角、剪力及弯矩在共振区域变化明显,竖向荷载 P 的存在使桩身位移和转角幅值增大了一倍,弯矩和剪力幅值具有一定程度的增大。研究发现竖向荷载对桩基础在 Rayleigh 波作用下水平动力响应的影响不可忽略,且考虑竖向荷载-Rayleigh 波联合作用下分析桩基础的动力响应更符合工程实际情况。

关键词:桩基础;水平振动;Rayleigh 波;竖向荷载;动力响应

中图分类号:TU473 **文献标志码**:A **文章编号**:0367-6234(2026)07-0175-13

Horizontal vibration characteristics of a single pile in unsaturated soil under Rayleigh wave-vertical load

Cao Xiaolin[1], Zeng Leping[1], Zhou Fengxi[1], Gao Zhigao[1], Dai Guoliang[2], Wang Zhiqiang[3]

(1. School of Civil and Hydraulic Engineering, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China;
2. College of Civil Engineering, Southeast University, Nanjing 211189, China;
3. Tianshui Geological Engineering Investigation Institute Co., Ltd., Tianshui 741000, Gansu, China)

Abstract: To explore the influence of vertical loads on the horizontal vibration of pile foundations under the action of Rayleigh waves, based on the theory of porous continuous media, a theoretical calculation model is established for the dynamic response of single piles in unsaturated soils under the coupled action of Rayleigh waves and vertical loads. Considering the pile-soil interaction and the combined effect of Rayleigh waves and vertical loads, and using the Timoshenko beam theory, the analytical solution of the horizontal dynamic response of piles in unsaturated soil foundations is given. Based on the numerical results and compared with the existing calculation models, the correctness of this calculation model was verified, and the action mechanisms of parameters such as vertical load, dimensionless frequency and yield bending moment on the horizontal dynamic response of a single pile were discussed. The analysis results reveal: with the increase of vertical load and yield bending moment, the displacement, rotation, shear force and bending moment of the pile body all increase. With the increase of the dimensionless frequency, the displacement, rotation, shear force and bending moment of the pile body change significantly in the resonance region. The existence of the vertical load P doubles the amplitudes of the pile body displacement and rotation Angle, and the amplitudes of bending moment and shear force increase to a certain extent. This study finds that the influence of vertical loads on the horizontal dynamic response of pile foundations under the action of Rayleigh waves cannot be ignored, and considering the combined action of vertical loads and Rayleigh waves to analyze the dynamic response of pile foundations is more in line with the actual engineering situation.

Keywords: pile foundation; horizontal vibration; rayleigh wave; vertical load; dynamic response

收稿日期:2025-05-16;**录用日期**:2025-08-06;**网络首发日期**:2025-08-11
网络首发地址:https://link.cnki.net/urlid/23.1235.T.20250811.1337.012
基金项目:国家自然科学基金(52408368,51978320);高校教师创新基金(2024A-019);兰州理工大学红柳优秀青年人才支撑计划;甘肃省重点研发计划(25YFGE002);天水市科技支撑计划(TS-STK-2024A-283,TS-STK-2024A-291)
作者简介:曹小林(1990—),男,副教授;周凤玺(1979—),男,教授,博士生导师
通信作者:周凤玺,geolut@163.com

Rayleigh 波作为地震波的面波,振幅大、能量强,持续时间长,对建筑物和基础设施危害显著,因此深入研究 Rayleigh 波的传播特性和衰减规律具有重要意义[1-3]。近年来,国内外学者对 Rayleigh 波在土中的传播进行了深入的研究。章敏等[4]考虑土层边界条件和层间连续性条件,构建了 Rayleigh 波的弥散特征方程,系统探究了各参数与波速及衰减特性之间的关系。类似地,陈炜昀等[5]基于三相孔隙介质波动理论,推导出相应 Rayleigh 波的弥散方程,讨论了在不同边界条件下,土饱和度、频率以及土体固有渗透系数对 Rayleigh 波的弥散特性的影响。周凤玺等[6-7]基于多孔介质理论以及连续介质力学,建立了非饱和土中 Rayleigh 波的弥散特征方程,利用数值算例分析了饱和度对波速、位移响应及能流分布的影响。上述研究为 Rayleigh 波在土中的传播特性提供了丰富的理论基础和实验依据。

基于上述对于 Rayleigh 波在土中的传播规律,桩基础在 Rayleigh 波作用下的动力响应特性及承载力性能也备受关注[8-9]。Yang 等[10]考虑桩土相互作用,推导出非饱和土-桩系统受 Rayleigh 波的耦合振动模型,系统探究了 Rayleigh 波作用下桩顶旋转刚度与屈服弯矩对桩体水平动力特性的影响机制。邹新军等[11]基于三维连续介质力学,考虑桩-非饱和土边界条件,推导出 Rayleigh 波作用下非饱和土中单桩水平振动解,分析了土体的饱和度、泊松比及桩-土模量比对桩身水平动力特性的影响规律。Ding 等[12]、Zheng 等[13-14]建立了考虑波在垂直和横向两个方向上传播的动力平衡微分方程,分析了桩基础的动力响应。刘星等[15]为解决可液化地基中桩基础的地震响应分析,建立了群桩三维计算模型。崔春义等[16]考虑桩-土非完全黏结和径向非均质土,研究了桩的纵向振动特性。

上述研究均未考虑竖向荷载的影响,在实际工程中桩基会受到竖向荷载和 Rayleigh 波的联合作用,竖向荷载的存在会产生二阶效应导致水平位移增大。但目前存在的大部分研究未考虑竖向荷载和 Rayleigh 波的联合作用,桩基在非饱土中水平振动特性中考虑竖向荷载的影响还需要进一步深入研究。栾鲁宝等[17]考虑竖向荷载的存在,研究了单桩和大直径管桩在单相土中的水平振动特性。周绪红等[18]通过对比考虑竖向力和不考虑竖向力得到的结果发现,竖向力对桩的水平刚度的影响明显。为此,本文基于多孔连续介质理论,建立了 Rayleigh 波-竖向荷载联合作用下桩在非饱和土中的水平动力响应的计算模型,研究了 Rayleigh 波作用下竖向荷载对桩基础水平振动的影响。

1 计算模型

建立 Rayleigh 波-竖向荷载联合作用下单桩在非饱和土的振动模型如图 1 所示。本文桩长、桩径和桩截面面积分别为 H、$2r_0$ 和 A_p,密度、弹性模量和桩剪切模量分别为 ρ_p、E_p 和 G_p。桩顶视为质量为 M_0 的刚性块体。泊松比为 v_s,阻尼比为 ζ_s,剪切模量为 G_s。由于目前的研究主要针对 Rayleigh 波以弹性波的形式传播[10],特别是 Rayleigh 波与桩的相互作用的复杂情况,非饱和土的非线性在本文中不作考虑,因此假定非饱和土为线弹性材料。此外,依据文献 Stacul[19] 和 Mucciacciaro[20] 的文献研究表明,可将非饱和土假定为线弹性材料分析桩-非饱和土的相互作用。本文主要针对桩端固定的情况,对于桩端局部滑移的情况,可利用桩端的边界条件,在桩端施加位移的方式实现。

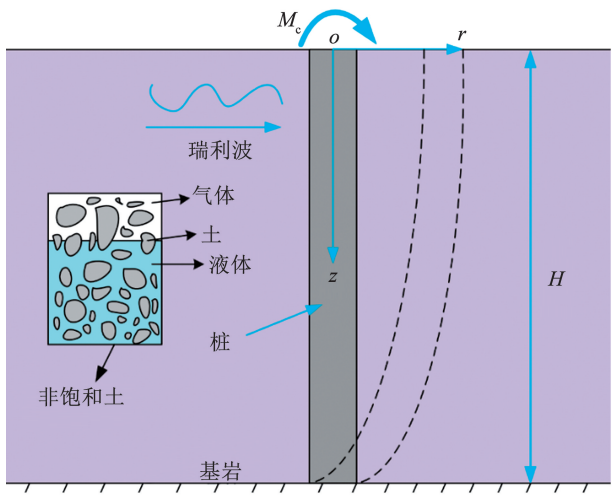


图 1 非饱和土中桩受瑞利波作用模型图

Fig. 1 Model diagram of pile subjected to Rayleigh wave action in unsaturated soil

将桩顶约束程度用转动刚度表示为

$$M_P(0)=K_1\theta_c+K_2(\theta_p(0)-\theta_c)$$

其中 K_1 和 K_2 分别表示初始刚度和强化刚度。

2 基本方程

在柱坐标系下,非饱和土三相混合物的动量平衡方程[21]为

$$\sigma_{ij,j}=\rho_s\ddot{u}_i+\rho_f\ddot{w}_i+\rho_a\ddot{v}_i \tag{1}$$

根据广义达西定律,可得非饱和土的孔隙水、气体的渗流运动方程:

$$n_fS_r\left(\frac{\partial w_i}{\partial t}-\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)=-\frac{k_f}{\rho_f g}\left(\frac{\partial p_f}{\partial r}+\rho_f\frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2}\right) \tag{2}$$

$$n_f(1-S_r)\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}-\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)=-\frac{k_a}{\rho_a g}\left(\frac{\partial p_a}{\partial r}+\rho_a\frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2}\right) \tag{3}$$

非饱和土中质量守恒：

$$\frac{\partial \overline{\rho}_m}{\partial t}+\left(\overline{\rho}_m \frac{\partial u_i^m}{\partial t}\right)_{j,i}=0, m=s,l,a \tag{4}$$

式中：$\overline{\rho}_m$ 为非饱和土各相介质的表观密度，u_i^m 是各相在不同方向上的位移。

在柱坐标下几何方程表示为

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}) \tag{5}$$

本构方程表示为

$$\sigma_{ij}=2\mu\varepsilon_{ij}+\lambda e-\alpha S_e p_{\mathrm{f}}-\alpha(1-S_{\mathrm{e}})p_{\mathrm{a}} \tag{6}$$

式中：α 为非饱和土的压缩系数，λ 和 μ 为拉梅常数。

渗流连续方程表示为

$$\begin{aligned}-p_{\mathrm{f}}=&a_{11}\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_r}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)+\\&a_{12}\left(\frac{\partial w_r}{\partial r}+\frac{w_r}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial w_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial w_z}{\partial z}\right)+\\&a_{13}\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_r}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}-p_{\mathrm{a}}=&a_{21}\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_r}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)+\\&a_{22}\left(\frac{\partial w_r}{\partial r}+\frac{w_r}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial w_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial w_z}{\partial z}\right)+\\&a_{23}\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_r}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\end{aligned} \tag{8}$$

其中：$a_{11}=\dfrac{\alpha A_{22}}{A_{11}A_{22}-A_{12}A_{21}}$，$a_{12}=\dfrac{A_{22}A_{13}-A_{12}A_{23}}{A_{13}(A_{11}A_{22}-A_{12}A_{21})}$，$a_{13}=\dfrac{A_{22}A_{14}-A_{12}A_{24}}{A_{14}(A_{11}A_{22}-A_{12}A_{21})}$，$a_{21}=-\dfrac{\alpha A_{22}}{A_{11}A_{22}-A_{12}A_{21}}$，$a_{22}=-\dfrac{A_{11}A_{23}-A_{21}A_{13}}{A_{13}(A_{11}A_{22}-A_{12}A_{21})}$，$a_{23}=\dfrac{A_{11}A_{24}-A_{21}A_{14}}{A_{14}(A_{11}A_{22}-A_{12}A_{21})}$，$A_{11}=\dfrac{\alpha S_{\mathrm{e}}-nS_{\mathrm{r}}}{K_{\mathrm{s}}}+\dfrac{nS_{\mathrm{r}}}{K_{\mathrm{f}}}$，$A_{12}=\dfrac{\alpha(1-S_{\mathrm{e}})-n(1-S_{\mathrm{r}})}{K_{\mathrm{s}}}+\dfrac{n(1-S_{\mathrm{r}})}{K_{\mathrm{a}}}$，$A_{13}=nS_{\mathrm{r}}$，$A_{14}=n(1-S_{\mathrm{r}})$，$A_{15}=1-n-\dfrac{K_{\mathrm{a}}}{K_{\mathrm{s}}}$，$A_{21}=A_{\mathrm{s}}-\dfrac{S_{\mathrm{r}}(1-S_{\mathrm{r}})}{K_{\mathrm{f}}}$，$A_{22}=\dfrac{S_{\mathrm{r}}(1-S_{\mathrm{r}})}{K_{\mathrm{a}}}-A_{\mathrm{s}}$，$A_{23}=A_{24}=-S_{\mathrm{r}}(1-S_{\mathrm{r}})$，$A_{\mathrm{s}}=-\alpha_{\mathrm{vg}}m_{\mathrm{vg}}n_{\mathrm{vg}}(1-S_{\mathrm{w0}})S_{\mathrm{e}}^{\frac{m_{\mathrm{vg}}+1}{m_{\mathrm{vg}}}}(S_{\mathrm{e}}^{-\frac{1}{m_{\mathrm{vg}}}}-1)^{\frac{n_{\mathrm{vg}}-1}{n_{\mathrm{vg}}}}$。

由 Timoshenko 理论，依据桩段水平力平衡为基础，建立桩段控制微分方程[17]：

$$A_{\mathrm{p}}G_{\mathrm{p}}k'\left(\frac{\partial^2 u_{\mathrm{p}}}{\partial z^2}-\frac{\partial \theta_{\mathrm{p}}}{\partial z}\right)+\rho_{\mathrm{p}}A_{\mathrm{p}}\frac{\partial^2 u_p}{\partial t^2}+(k_{\mathrm{h}}+\mathrm{i}c_{\mathrm{h}})(u_{\mathrm{p}}-u_{\mathrm{t}})=0 \tag{9}$$

$$A_{\mathrm{p}}G_{\mathrm{p}}k'\left(\frac{\partial u_{\mathrm{p}}}{\partial z}-\theta_{\mathrm{p}}\right)-\rho_{\mathrm{p}}I_{\mathrm{p}}\frac{\partial^2 u_{\mathrm{p}}}{\partial t^2}-E_{\mathrm{p}}I_{\mathrm{p}}\frac{\partial^2 \theta_{\mathrm{p}}}{\partial z^2}+A_{\mathrm{p}}P\frac{\partial u_{\mathrm{p}}}{\partial z}=0 \tag{10}$$

式中：u_i 为土体位移，w_i 为流体位移，v_i 为空气位移，n_{f} 和 S_{r} 分别为孔隙率和饱和度，$k_{\mathrm{f}}=\rho_{\mathrm{f}}g\kappa/\eta_{\mathrm{f}}$ 和 $k_{\mathrm{a}}=\rho_{\mathrm{a}}g\kappa/\eta_{\mathrm{a}}$ 分别为液相和气相的渗透系数，κ 为固有磁导率，g 为重力加速度，ρ_{f} 和 ρ_{a} 为液体和气体的密度，p_{f} 和 p_{a} 是液体和气体的孔隙压力，η_{f} 和 η_{a} 分别为液体和气体的动力黏度系数，$S_{\mathrm{e}}=(S_{\mathrm{r}}-S_{\mathrm{w0}})/(1-S_{\mathrm{w0}})$ 为有效饱和度，S_{w0} 为残余饱和度。$u_{\mathrm{p}}(z,t)=\overline{u}_{\mathrm{p}}(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$、$\theta_{\mathrm{p}}(z,t)=\overline{\theta}_{\mathrm{p}}(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ 分别表示非饱和土中桩的水平位移和转角，$u_{\mathrm{t}}=u_r\cos\theta$ 表示土体水平方向位移，k' 表示修正剪切因子，P 为竖向荷载。

边界条件：

土层表面为自由界面，因此在土层表面处有

$$\sigma_z|_{z=0}=0,\tau_{rz}|_{z=0}=0 \tag{11}$$

桩端固定，在 $z=L$ 处径向、切向位移为零，即

$$u_r|_{z=H}=0,u_\theta|_{z=H}=0 \tag{12}$$

在桩-土接触面（$r=r_0$）处，径向和切向位移分量可表示为

$$u_r|_{r=r_0}=u_{\mathrm{p}}\cos\theta,u_\theta|_{r=r_0}=-u_{\mathrm{p}}\sin\theta \tag{13}$$

这里 u_{p} 表示桩的水平位移。

3　模型求解

基于零法向应力 $\sigma_z=0$，法向应变 ε_z 为

$$\varepsilon_z=\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}\left[\frac{-\alpha S_{\mathrm{e}}}{\lambda}p_{\mathrm{f}}+\frac{\alpha(1-S_{\mathrm{e}})}{\lambda}p_{\mathrm{a}}-(\varepsilon_r+\varepsilon_\theta)\right] \tag{14}$$

将式(14)代入式(6)可得

$$\sigma_r=\mu[\eta_{\mathrm{a}}^2(\varepsilon_r+\varepsilon_\theta)-2\varepsilon_\theta]-\alpha\frac{1-2\nu_{\mathrm{s}}}{1-\nu_{\mathrm{s}}}[S_{\mathrm{e}}p_{\mathrm{f}}+(1-S_{\mathrm{e}})p_{\mathrm{a}}] \tag{15}$$

$$\sigma_\theta=\mu[\eta_{\mathrm{a}}^2(\varepsilon_r+\varepsilon_\theta)-2\varepsilon_r]-\alpha\frac{1-2\nu_{\mathrm{s}}}{1-\nu_{\mathrm{s}}}[S_{\mathrm{e}}p_{\mathrm{f}}+(1-S_{\mathrm{e}})p_{\mathrm{a}}] \tag{16}$$

式中 $\eta_\sigma^2=2/(1-\nu_{\mathrm{s}})$。

考虑土体谐波响应形式：

$$u_i^m=u_i^m(r,\theta,z,\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \tag{17}$$

由式(2)、(3)可知，非饱和土中液相、气相位移为

$$w_i=L_{\mathrm{f}}\frac{\partial p_{\mathrm{f}}}{\partial i}+M_{\mathrm{f}}u_i \tag{18}$$

$$v_i=L_{\mathrm{a}}\frac{\partial p_{\mathrm{a}}}{\partial i}+M_{\mathrm{a}}u_i \tag{19}$$

式中：$L_{\mathrm{f}}=\dfrac{k_{\mathrm{f}}}{\rho_{\mathrm{f}}(k_{\mathrm{f}}\omega^2-\mathrm{i}\omega n_{\mathrm{f}}S_{\mathrm{r}}g)}$，$M_{\mathrm{f}}=\dfrac{n_{\mathrm{f}}S_{\mathrm{r}}g}{n_{\mathrm{f}}S_{\mathrm{r}}g+k_{\mathrm{f}}\mathrm{i}\omega}$，$L_{\mathrm{a}}=\dfrac{k_{\mathrm{a}}}{\rho_{\mathrm{a}}[k_a\omega^2-\mathrm{i}\omega n_{\mathrm{f}}(1-S_{\mathrm{r}})g]}$，$M_{\mathrm{a}}=\dfrac{n_{\mathrm{f}}(1-S_{\mathrm{r}})g}{n_{\mathrm{f}}(1-S_{\mathrm{r}})g+k_{\mathrm{a}}\mathrm{i}\omega}$。

将式(5)、(6)、(14)、(15)、(16)代入式(1)中

可得

$$\frac{2-\nu_s}{1-\nu_s}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(ru_r)}{\partial r}+\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\right)\right]-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\partial(ru_\theta)}{\partial r}+\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\right]+\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}+\kappa_1\left(\frac{\omega}{V_s}\right)^2 u_r+\kappa_2\frac{\partial p_f}{\partial r}+\kappa_3\frac{\partial p_a}{\partial r}=0 \quad (20)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(ru_\theta)}{\partial r}-\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\right)\right]+\frac{2-\nu_s}{1-\nu_s}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\partial(ru_r)}{\partial r}+\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\right]+\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2}+\kappa_1\left(\frac{\omega}{V_s}\right)^2 u_\theta+\kappa_2\frac{\partial p_f}{r\partial\theta}+\kappa_3\frac{\partial p_a}{r\partial\theta}=0 \quad (21)$$

其中：$\kappa_1=1+M_f\frac{\rho_f}{\rho_s}+M_f\frac{\rho_a}{\rho_s}$，$\kappa_2=L_f\omega^2\rho_f-\frac{\nu_s}{1-\nu_s}\frac{\alpha S_e}{\lambda}$，$\kappa_3=L_a\omega^2\rho_a-\frac{\nu_s}{1-\nu_s}\frac{\alpha(1-S_e)}{\lambda}$。

将式(14)、(18)、(19)代入式(7)求得

$$-\left(1+C_s\frac{\nu_s}{1-\nu_s}\frac{\alpha S_e}{\lambda}\right)p_f-\left[1+C_s\frac{\nu_s}{1-\nu_s}\frac{\alpha(1-S_e)}{\lambda}\right]p_a=C_s\frac{1-2\nu_s}{1-\nu_s}\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_r}{r}+\frac{\partial u_\theta}{r\partial\theta}\right)+C_f\nabla^2 p_f+C_a\nabla^2 p_a \quad (22)$$

其中：$C_s=a_{11}+a_{21}+M_f a_{12}+M_f a_{22}+M_a a_{13}+M_a a_{23}$，$C_f=L_f a_{12}+L_f a_{22}$，$C_a=L_a a_{13}+L_a a_{23}$。

势函数：

$$u_r=\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \quad (23)$$

$$u_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}-\frac{\partial\varphi}{\partial r} \quad (24)$$

将势函数代入式(20)、(21)得

$$\frac{2-\nu_s}{1-\nu_s}\frac{\partial}{\partial r}(\nabla^2\varphi)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\nabla^2\phi)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)+\kappa_1\left(\frac{\omega}{V_s}\right)^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)+\kappa_2\frac{\partial p_f}{\partial r}+\kappa_3\frac{\partial p_a}{\partial r}=0 \quad (25)$$

$$-\frac{\partial}{\partial r}(\nabla^2\phi)+\frac{2-\nu_s}{1-\nu_s}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\nabla^2\varphi)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}-\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\kappa_1\left(\frac{\omega}{V_s}\right)^2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}-\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)-\kappa_2\frac{\partial p_f}{r\partial\theta}=0 \quad (26)$$

由式(25)、(26)得

$$\frac{2-\nu_s}{1-\nu_s}\nabla^2\phi+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}+\kappa_1\left(\frac{\omega}{V_s}\right)^2\phi=\kappa_2 p_f+\kappa_3 p_a \quad (27)$$

$$\nabla^2\varphi+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+\kappa_1\left(\frac{\omega}{V_s}\right)^2\varphi=0 \quad (28)$$

将式(14)、(18)、(19)、代入式(7)、(8)，同时联立式(27)得

$$p_f=\frac{\eta_b^2}{\xi_1}\nabla^2\phi+\frac{1}{\xi_1}\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}+\frac{\kappa_1}{\xi_1}\left(\frac{\omega}{V_s}\right)^2\phi \quad (29)$$

$$p_a=\frac{\eta_b^2}{\xi_2}\nabla^2\phi+\frac{1}{\xi_2}\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}+\frac{\kappa_1}{\xi_2}\left(\frac{\omega}{V_\phi s\phi}\right)^2\phi \quad (30)$$

式中$\eta_b^2=\frac{2-\nu_s}{1-\nu_s}$。

$$\xi_1=\kappa_2-\kappa_3\frac{1+(a_{11}+M_f a_{12}+M_a a_{13})\frac{\nu_s}{1-\nu_s}\frac{\alpha S_e}{\lambda}}{(a_{11}+M_f a_{12}+M_a a_{13})\frac{\nu_s}{1-\nu_s}\frac{\alpha(1-S_e)}{\lambda}},$$

$$\xi_2=\kappa_3-\kappa_2\frac{1+(a_{21}+M_f a_{22}+M_a a_{23})\frac{\nu_s}{1-\nu_s}\frac{\alpha(1-S_e)}{\lambda}}{(a_{21}+M_f a_{22}+M_a a_{23})\frac{\nu_s}{1-\nu_s}\frac{\alpha S_e}{\lambda}}。$$

将式(29)、(30)代入式(22)得

$$\nabla^4\phi+\frac{B_2}{B_1}\nabla^2\phi+\frac{B_3}{B_1}\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}+\frac{B_4}{B_1}\nabla^2\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}+\frac{B_5}{B_1}\phi=0 \quad (31)$$

其中：$B_1=\frac{C_f\eta_s^2}{\zeta_1}+\frac{C_a\eta_s^2}{\zeta_2}$，$B_2=\frac{\eta_s^2}{\zeta_1}+\frac{\eta_s^2}{\zeta_2}+\frac{\eta_s^2 C_s}{\zeta_1}\frac{\nu_s}{1-\nu_s}\cdot\frac{\alpha S_e}{\lambda}+\frac{\eta_s^2 C_s}{\zeta_2}\frac{\nu_s}{1-\nu_s}\frac{\alpha(1-S_e)}{\lambda}+C_s\frac{1-2\nu_s}{1-\nu_s}+C_f\frac{\kappa_1}{\zeta_1}\left(\frac{\omega}{V_s}\right)^2+C_a\frac{\kappa_1}{\zeta_2}\left(\frac{\omega}{V_s}\right)^2$，$B_3=\frac{1}{\zeta_1}+\frac{1}{\zeta_2}+\frac{C_s}{\zeta_1}\frac{\nu_s}{1-\nu_s}\frac{\alpha S_e}{\lambda}+\frac{C_s}{\zeta_2}\frac{\nu_s}{1-\nu_s}\cdot\frac{\alpha(1-S_e)}{\lambda}$，$B_4=\frac{C_f}{\zeta_1}+\frac{C_a}{\zeta_2}$；$B_5=\left(\frac{1}{\zeta_1}+\frac{1}{\zeta_2}+\frac{C_s}{\zeta_1}\frac{\nu_s}{1-\nu_s}\frac{\alpha S_e}{\lambda}+\frac{C_s}{\zeta_2}\frac{\nu_s}{1-\nu_s}\frac{\alpha(1-S_e)}{\lambda}\right)\kappa_1\left(\frac{\omega}{V_s}\right)^2$。

由分离变量法可设

$$\phi(r,\theta,z)=\phi_1(r,\theta)Z(z),\varphi(r,\theta,z)=\varphi_1(r,\theta)Z(z),$$

取$\frac{d^2Z}{dz^2}+a^2Z=0$，可得 $Z(z)$的表达式为

$$Z(z)=E\cos az+F\sin az \quad (32)$$

将式(32)代入式(28)、(31)得

$$\nabla^4\phi_1+\frac{(B_2-B_4a^2)}{B_1}\nabla^2\phi_1+\frac{(B_5-B_3a^2)}{B_1}\phi_1=0 \quad (33)$$

$$\nabla^2\varphi_1-\left[a^2-\kappa_1\left(\frac{\omega}{V_s}\right)^2\right]\varphi_1=0 \quad (34)$$

整理上式得

$$(\nabla^2+k_{b1}^2)(\nabla^2+k_{b2}^2)\phi_1=0 \quad (35)$$

$$[\nabla^2+k_{a1}^2]\psi_1=0 \quad (36)$$

其中：$k_{b1}^2+k_{b2}^2=\frac{B_2-B_4a^2}{B_1}$，$k_{b2}^2k_{b1}^2=\frac{B_5-B_3a^2}{B_1}$，$k_{a1}^2=-a^2+\kappa_1\left(\frac{\omega}{V_s}\right)^2$。

由算子分解理论和分离变量法计算得

$$\varphi_1=A_1\exp(-s_1 r\sin\theta-ik_R r\cos\theta)+A_2\exp(-s_2 r\sin\theta-ik_R r\cos\theta) \quad (37)$$

$$\psi_1=B_s\exp(-\gamma r\sin\theta-ik_R r\cos\theta) \quad (38)$$

式中：A_1，A_2和 B_s为由边界条件决定的待定常数，k_R

为瑞利波的复波速，$V_R=\omega/k_R$ 为相速度，$s_i=\sqrt{k_R^2-k_{bi}^2}\,(i=1,2)$ 为压缩波对应的衰减指数，$\gamma=\sqrt{k_R^2-k_{a1}^2}$ 为剪切波对应的衰减指数。

结合式(32)可得

$$\varphi=\begin{bmatrix}A_1\exp(-s_1 r\sin\theta-\mathrm{i}k_R r\cos\theta)+\\ A_2\exp(-s_2 r\sin\theta-\mathrm{i}k_R r\cos\theta)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_a\cos az+\\ F_a\sin az\end{bmatrix} \tag{39}$$

$$\psi=B_s\exp(-\gamma r\sin\theta-\mathrm{i}k_R r\cos\theta)[E_b\cos az+F_b\sin az] \tag{40}$$

由边界条件：土面无应力，且桩底固结不发生位移，即 $\tau_{rz}|_{z=0}=0$，$u_r|_{z=H}=u_\theta|_{z=H}=0$，$u_r|_{r=r_0}=u_p\cos\theta$，$u_\theta|_{r=r_0}=-u_p\sin\theta$，可知 $E_a=E_b=0$，所以

$$a_m=\frac{(2m-1)\pi}{2H},m=1,2,3 \tag{41}$$

$$\varphi=\begin{bmatrix}A_1\exp(-s_1 r\sin\theta-\mathrm{i}k_R r\cos\theta)+\\ A_2\exp(-s_2 r\sin\theta-\mathrm{i}k_R r\cos\theta)\end{bmatrix}\sin a_m z \tag{42}$$

$$\psi=B_s\exp(-\gamma r\sin\theta-\mathrm{i}k_R r\cos\theta)\sin a_m z \tag{43}$$

将式(42)代入式(29)、(30)可得

$$p_f=\begin{bmatrix}\frac{\eta_b^2}{\xi_1}(s_1^2-k_R^2)\\ -\frac{a_m^2}{\xi_1}+\frac{\kappa_1}{\xi_1}\left(\frac{\omega}{V_s}\right)^2\end{bmatrix}A_1\exp\begin{pmatrix}-s_1 r\sin\theta\\ -\mathrm{i}k_R r\cos\theta\end{pmatrix}\sin a_m z+\begin{bmatrix}\frac{\eta_b^2}{\xi_1}(s_2^2-k_R^2)\\ -\frac{a_m^2}{\xi_1}+\frac{\kappa_1}{\xi_1}\left(\frac{\omega}{V_s}\right)^2\end{bmatrix}A_2\exp\begin{pmatrix}-s_2 r\sin\theta\\ -\mathrm{i}k_R r\cos\theta\end{pmatrix}\sin a_m z \tag{44}$$

$$p_a=\begin{bmatrix}\frac{\eta_b^2}{\xi_2}(s_1^2-k_R^2)\\ -\frac{a_m^2}{\xi_2}+\frac{\kappa_1}{\xi_2}\left(\frac{\omega}{V_s}\right)^2\end{bmatrix}A_1\exp\begin{pmatrix}-s_1 r\sin\theta\\ -\mathrm{i}k_R r\cos\theta\end{pmatrix}\sin a_m z+\begin{bmatrix}\frac{\eta_b^2}{\xi_2}(s_2^2-k_R^2)\\ -\frac{a_m^2}{\xi_2}+\frac{\kappa_1}{\xi_2}\left(\frac{\omega}{V_s}\right)^2\end{bmatrix}A_2\exp\begin{pmatrix}-s_2 r\sin\theta\\ -\mathrm{i}k_R r\cos\theta\end{pmatrix}\sin a_m z \tag{45}$$

将式(42)、(43)代入式(23)、(24)得：

$$u_r=-A_1(s_1\sin\theta+\mathrm{i}k_R\cos\theta)\exp\begin{pmatrix}-s_1 r\sin\theta\\ -\mathrm{i}k_R r\cos\theta\end{pmatrix}\sin a_m z-A_2(s_2\sin\theta+\mathrm{i}k_R\cos\theta)\exp\begin{pmatrix}-s_2 r\sin\theta\\ -\mathrm{i}k_R r\cos\theta\end{pmatrix}\sin a_m z+B_s(-\gamma\cos\theta+\mathrm{i}k_R\sin\theta)\exp\begin{pmatrix}-\gamma r\sin\theta\\ -\mathrm{i}k_R r\cos\theta\end{pmatrix}\sin a_m z \tag{46}$$

$$u_\theta=A_1(-s_1\cos\theta+\mathrm{i}k_R\sin\theta)\exp\begin{pmatrix}-s_1 r\sin\theta\\ -\mathrm{i}k_R r\cos\theta\end{pmatrix}\sin a_m z+A_2(-s_2\cos\theta+\mathrm{i}k_R\sin\theta)\exp\begin{pmatrix}-s_2 r\sin\theta\\ -\mathrm{i}k_R r\cos\theta\end{pmatrix}\sin a_m z+B_s(\gamma\sin\theta+\mathrm{i}k_R\cos\theta)\exp\begin{pmatrix}-\gamma r\sin\theta\\ -\mathrm{i}k_R r\cos\theta\end{pmatrix}\sin a_m z \tag{47}$$

将上式代入边界条件 $\tau_{rz}|_{z=0}=0$，$u_\theta|_{z=H}=0$，可得

$$\tau_{rz}=G_s\gamma_{rz}=G_s a_m\begin{bmatrix}-A_1(s_1\sin\theta+\mathrm{i}k_R\cos\theta)\exp(-s_1 r\sin\theta-\mathrm{i}k_R r\cos\theta)\\ -A_2(s_2\sin\theta+\mathrm{i}k_R\cos\theta)\exp(-s_2 r\sin\theta-\mathrm{i}k_R r\cos\theta)\\ +B_s(-\gamma\cos\theta+\mathrm{i}k_R\sin\theta)\exp(-\gamma r\sin\theta-\mathrm{i}k_R r\cos\theta)\end{bmatrix}=0 \tag{48}$$

$$u_\theta=0(z=H) \tag{49}$$

可得 $A_2=d_1A_1$，$B_s=d_2A_1$，$d_1=\frac{y_1}{y_2}$，其中：

$$y_1=(-s_1\cos\theta+\mathrm{i}k_R\sin\theta)\exp(-s_1 r\sin\theta)+\frac{(s_1\sin\theta+\mathrm{i}k_R\cos\theta)\exp(-s_1 r\sin\theta)(\gamma\sin\theta+\mathrm{i}k_R\cos\theta)}{(-\gamma\cos\theta+\mathrm{i}k_R\sin\theta)}$$

$$y_2=\frac{(s_2\sin\theta+\mathrm{i}k_R\cos\theta)\exp(-s_2 r\sin\theta)(\gamma\sin\theta+\mathrm{i}k_R\cos\theta)}{(-\gamma\cos\theta+\mathrm{i}k_R\sin\theta)}-(-s_2\cos\theta+\mathrm{i}k_R\sin\theta)\exp(-s_2 r\sin\theta)$$

$$d_2=\frac{\begin{pmatrix}s_1\sin\theta\\ +\mathrm{i}k_R\cos\theta\end{pmatrix}\exp(-s_1 r\sin\theta)+d_1\begin{pmatrix}s_2\sin\theta\\ +\mathrm{i}k_R\cos\theta\end{pmatrix}\exp(-s_2 r\sin\theta)}{(-\gamma\cos\theta+\mathrm{i}k_R\sin\theta)\exp(-\gamma r\sin\theta)}$$

当 $\theta=0$ 时，$y_1=-s_1+\frac{k_R^2}{\gamma}$，$y_2=s_2+\frac{k_R^2}{\gamma}$，$d_2=-\frac{\mathrm{i}k_R(1+d_1)}{\gamma}$。

因此有

$$u_r=-A_1(s_1\sin\theta+\mathrm{i}k_R\cos\theta)\exp\begin{pmatrix}-s_1 r\sin\theta\\ -\mathrm{i}k_R r\cos\theta\end{pmatrix}\sin a_m z-d_1A_1(s_2\sin\theta+\mathrm{i}k_R\cos\theta)\exp\begin{pmatrix}-s_2 r\sin\theta\\ -\mathrm{i}k_R r\cos\theta\end{pmatrix}\sin a_m z+d_2A_1(-\gamma\cos\theta+\mathrm{i}k_R\sin\theta)\exp\begin{pmatrix}-\gamma r\sin\theta\\ -\mathrm{i}k_R r\cos\theta\end{pmatrix}\sin a_m z \tag{50}$$

$$u_\theta=A_1(-s_1\cos\theta+\mathrm{i}k_R\sin\theta)\exp\begin{pmatrix}-s_1 r\sin\theta\\ -\mathrm{i}k_R r\cos\theta\end{pmatrix}\sin a_m z+d_1A_1(-s_2\cos\theta+\mathrm{i}k_R\sin\theta)\exp\begin{pmatrix}-s_2 r\sin\theta\\ -\mathrm{i}k_R r\cos\theta\end{pmatrix}\sin a_m z+d_2A_1(\gamma\sin\theta+\mathrm{i}k_R\cos\theta)\exp\begin{pmatrix}-\gamma r\sin\theta\\ -\mathrm{i}k_R r\cos\theta\end{pmatrix}\sin a_m z \tag{51}$$

通过体积平均原理可得瑞利波在非饱和土自由场下的位移为

$$\bar{u}_r=(1-n)u_r+nS_rv_r+n(1-S_r)w_r=\left(\begin{matrix}1-n+nM_f+\\nS_rM_a-nS_rM_f\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}-\begin{pmatrix}A_1(s_1\sin\theta+\mathrm{i}k_R\cos\theta)\exp(-s_1r\sin\theta-\mathrm{i}k_Rr\cos\theta)+\\d_1A_1(s_2\sin\theta+\mathrm{i}k_R\cos\theta)\exp(-s_2r\sin\theta-\mathrm{i}k_Rr\cos\theta)\end{pmatrix}\sin a_mz+\\d_2A_1(-\gamma\cos\theta+\mathrm{i}k_R\sin\theta)\exp(-\gamma r\sin\theta-\mathrm{i}k_Rr\cos\theta)\sin a_mz\end{matrix}\right)+nS_rL_a\frac{\partial p_a}{\partial r}+n(1-S_r)L_f\frac{\partial p_f}{\partial r}\tag{52}$$

$$\bar{u}_\theta=(1-n)u_\theta+nS_rv_\theta+n(1-S_r)w_\theta=\left(\begin{matrix}1-n+nM_f+\\nS_rM_a-nS_rM_f\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}\begin{pmatrix}A_1(-s_1\cos\theta+\mathrm{i}k_R\sin\theta)\exp(-s_1r\sin\theta-\mathrm{i}k_Rr\cos\theta)+\\d_1A_1(-s_2\cos\theta+\mathrm{i}k_R\sin\theta)\exp(-s_2r\sin\theta-\mathrm{i}k_Rr\cos\theta)\end{pmatrix}\sin a_mz+\\d_2A_1(\gamma\sin\theta+\mathrm{i}k_R\cos\theta)\exp(-\gamma r\sin\theta-\mathrm{i}k_Rr\cos\theta)\sin a_mz\end{matrix}\right)+nS_rL_a\frac{\partial p_a}{r\partial\theta}+n(1-S_r)L_f\frac{\partial p_f}{r\partial\theta}\tag{53}$$

4 桩的动力响应

4.1 水平阻抗

瑞利波传播过程中引起桩周非饱和土的振动，进而引起桩的振动，将非饱和土对桩的阻抗利用 Winkler 模型计算。

由边界条件可知，在桩土界面处有

$$u_r=u_{\bar{p}}\cos\theta\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t},u_\theta=-u_{\bar{p}}\sin\theta\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\tag{54}$$

式中 $u_{\bar{p}}$ 为 $\theta=0$ 方向上的无量纲水平位移幅值。由边界条件解得

$$A_1=\frac{1}{-\exp(-\mathrm{i}k_Rr)\sin(a_mz)(\mathrm{i}k_R+d_1\mathrm{i}k_R+d_2\gamma)}u_{\bar{p}}$$，令 $A_1=ku_{\bar{p}},k=\frac{1}{-\exp(-\mathrm{i}k_Rr)\sin(a_mz)(\mathrm{i}k_R+d_1\mathrm{i}k_R+d_2\gamma)}$。

桩在水平方向上，单位长度上桩侧阻抗为

$$q_h=-\int_0^{2\pi}(\sigma_r\cos\theta-\tau_{r\theta}\sin\theta)\mathrm{d}\theta\tag{55}$$

联立式(5)、(6)、(15)、(16)、(50)、(51)可得

$$\begin{aligned}\sigma_r=&\mu_s\eta_a^2[A_1(s_1^2-k_R^2)\exp(-s_1r\sin\theta-\mathrm{i}k_Rr\cos\theta)\sin a_mz+d_1A_1(s_2^2-k_R^2)\exp(-s_2r\sin\theta-\mathrm{i}k_Rr\cos\theta)\sin a_mz]-\\&2\mu_sA_1(-s_1\cos\theta+\mathrm{i}k_R\sin\theta)^2\exp(-s_1r\sin\theta-\mathrm{i}k_Rr\cos\theta)\sin a_mz-2\mu_sd_1A_1(-s_2\cos\theta+\mathrm{i}k_R\sin\theta)^2\exp(-s_2r\sin\theta-\\&\mathrm{i}k_Rr\cos\theta)\sin a_mz-2\mu_sd_2A_1(\gamma\sin\theta+\mathrm{i}k_R\cos\theta)(-\gamma\cos\theta+\mathrm{i}k_R\sin\theta)\exp(-\gamma r\sin\theta-\mathrm{i}k_Rr\cos\theta)\sin a_mz+\\&\alpha\frac{1-2\nu}{1-\nu}\left(\frac{S_e\xi_1-S_e\xi_2-\xi_1}{\xi_1\xi_2}\right)\left[\eta_b^2(s_1^2-k_R^2)-a_m^2+\kappa_1\left(\frac{\omega}{V_s}\right)^2\right]A_1\exp(-s_1r\sin\theta-\mathrm{i}k_Rr\cos\theta)\sin a_mz+\\&\alpha\frac{1-2\nu}{1-\nu}\left(\frac{S_e\xi_1-S_e\xi_2-\xi_1}{\xi_1\xi_2}\right)\left[\eta_b^2(s_2^2-k_R^2)-a_m^2+\kappa_1\left(\frac{\omega}{V_s}\right)^2\right]d_1A_1\exp(-s_2r\sin\theta-\mathrm{i}k_Rr\cos\theta)\sin a_mz\end{aligned}\tag{56}$$

$$\tau_{r\theta}=G_s\left[\begin{matrix}2A_1(s_1\sin\theta+\mathrm{i}k_R\cos\theta)(s_1\cos\theta-\mathrm{i}k_R\sin\theta)\exp(-s_1r\sin\theta-\mathrm{i}k_Rr\cos\theta)\sin a_mz+2d_1A_1(s_2\sin\theta+\\\mathrm{i}k_R\cos\theta)(s_2\cos\theta-\mathrm{i}k_R\sin\theta)\exp(-s_2r\sin\theta-\mathrm{i}k_Rr\cos\theta)\sin a_mz+d_2A_1(-\gamma\cos\theta+\mathrm{i}k_R\sin\theta)^2\cdot\\\exp(-\gamma r\sin\theta-\mathrm{i}k_Rr\cos\theta)\sin a_mz-d_2A_1(\gamma\sin\theta+\mathrm{i}k_R\cos\theta)^2\exp(-\gamma r\sin\theta-\mathrm{i}k_Rr\cos\theta)\sin a_mz\end{matrix}\right]\tag{57}$$

设单位桩长上的水平阻抗为

$$q_h=(k_h+\mathrm{i}c_h)u_{\bar{p}}\tag{58}$$

式中 k_h 和 c_h 分别为非饱和土对桩产生阻抗的刚度和阻尼系数。

4.2 桩的动力微分方程计算

将上述计算所得的水平位移(52)，单位桩长上的水平阻力(58)代入式(9)、(10)解耦得

$$\frac{\mathrm{d}^4\bar{u}_p}{\mathrm{d}z^4}+W\frac{\mathrm{d}^2\bar{u}_p}{\mathrm{d}z^2}+J\bar{u}_p=-\frac{(k_h+\mathrm{i}c_h)}{k'A_pG_p}\frac{\mathrm{d}^2(u_r\cos\theta)}{\mathrm{d}z^2}-\left(\frac{\rho_p\omega^2}{k'A_pG_pE_p}-\frac{1}{E_pI_p}\right)(k_h+\mathrm{i}c_h)u_r\cos\theta\tag{59}$$

$$\frac{\mathrm{d}^4\bar{\theta}_p}{\mathrm{d}z^4}+W\frac{\mathrm{d}^2\bar{\theta}_p}{\mathrm{d}z^2}+J\bar{\theta}_p=\frac{(k_h+\mathrm{i}c_h)(k'G_p+P)}{k'G_pE_pI_p}\frac{\mathrm{d}(u_r\cos\theta)}{\mathrm{d}z}\tag{60}$$

设 $W=\frac{\rho_p\omega^2}{E_p}+\frac{\rho_p\omega^2}{k'G_p}+\frac{A_pP}{E_pI_p}-\frac{(k_h+\mathrm{i}c_h)}{k'A_pG_p}$，$J=\frac{\rho_p^2\omega^4}{k'G_pE_p}-\frac{\rho_pA_p\omega^2}{E_pI_p}-\left(\frac{\rho_p\omega^2}{k'A_pG_pE_p}-\frac{1}{E_pI_p}\right)(k_h+\mathrm{i}c_h)$。

将式(52)代入式(59)、(60)，得

$$\frac{\mathrm{d}^4\bar{u}_p}{\mathrm{d}z^4}+W\frac{\mathrm{d}^2\bar{u}_p}{\mathrm{d}z^2}+J\bar{u}_p=I_1A_1\sin a_mz\tag{61}$$

$$\frac{\mathrm{d}^4\bar{\theta}_p}{\mathrm{d}z^4}+W\frac{\mathrm{d}^2\bar{\theta}_p}{\mathrm{d}z^2}+J\bar{\theta}_p=I_2A_1\cos a_mz\tag{62}$$

式中：$I_1=(f_1+f_2+f_3-f_4+f_5+f_6+f_7)$，$I_2=(l_1+l_2+l_3+l_4+l_5+l_6+l_7)$。其中：

$$f_1=\cos\theta\left[-\frac{(k_h+\mathrm{i}c_h)}{k'A_pG_p}a_m^2+\left(\frac{\rho_p\omega^2}{k'A_pG_pE_p}-\frac{1}{E_pI_p}\right)(k_h+\mathrm{i}c_h)\right]\left(\begin{matrix}1-n+nM_f\\+nS_rM_a-nS_rM_f\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}s_1\sin\theta\\+\mathrm{i}k_R\cos\theta\end{matrix}\right)\exp\left(\begin{matrix}-s_1r\sin\theta\\-\mathrm{i}k_Rr\cos\theta\end{matrix}\right),$$

$$f_2=\cos\theta\left[-\frac{k_h+ic_h}{k'A_pG_p}a_m^2+\left(\frac{\rho_p\omega^2}{k'A_pG_pE_p}-\frac{1}{E_pI_p}\right)(k_h+ic_h)\right]\cdot\begin{pmatrix}1-n+nM_f\\+nS_rM_a-nS_rM_f\end{pmatrix}d_1\begin{pmatrix}s_2\sin\theta\\+ik_R\cos\theta\end{pmatrix}\exp\begin{pmatrix}-s_2r\sin\theta\\-ik_Rr\cos\theta\end{pmatrix}$$

$$f_3=\cos\theta\left[\frac{k_h+ic_h}{k'A_pG_p}a_m^2-\left(\frac{\rho_p\omega^2}{k'A_pG_pE_p}-\frac{1}{E_pI_p}\right)(k_h+ic_h)\right]\cdot\begin{pmatrix}1-n+nM_f\\+nS_rM_a-nS_rM_f\end{pmatrix}d_2\begin{pmatrix}-\gamma\cos\theta\\+ik_R\sin\theta\end{pmatrix}\exp\begin{pmatrix}-\gamma r\sin\theta\\-ik_Rr\cos\theta\end{pmatrix}$$

$$f_4=nS_rL_a\cos\theta\left[-\frac{k_h+ic_h}{k'A_pG_p}a_m^2+\left(\frac{\rho_p\omega^2}{k'A_pG_pE_p}-\frac{1}{E_pI_p}\right)(k_h+ic_h)\right]\cdot\left[\frac{\eta_b^2}{\xi_2}(s_1^2-k_R^2)-\frac{a_m^2}{\xi_2}+\frac{\kappa_1}{\xi_2}\left(\frac{\omega}{V_s}\right)^2\right]\begin{pmatrix}s_1\sin\theta\\+ik_R\cos\theta\end{pmatrix}\exp\begin{pmatrix}-s_1r\sin\theta\\-ik_Rr\cos\theta\end{pmatrix}$$

$$f_5=nS_rL_a\cos\theta\left[-\frac{k_h+ic_h}{k'A_pG_p}a_m^2+\left(\frac{\rho_p\omega^2}{k'A_pG_pE_p}-\frac{1}{E_pI_p}\right)(k_h+ic_h)\right]\cdot\left[\frac{\eta_b^2}{\xi_2}(s_2^2-k_R^2)-\frac{a_m^2}{\xi_2}+\frac{\kappa_1}{\xi_2}\left(\frac{\omega}{V_s}\right)^2\right]d_1\begin{pmatrix}s_2\sin\theta\\+ik_R\cos\theta\end{pmatrix}\exp\begin{pmatrix}-s_2r\sin\theta\\-ik_Rr\cos\theta\end{pmatrix}$$

$$f_6=n(1-S_r)L_f\cos\theta\left[-\frac{k_h+ic_h}{k'A_pG_p}a_m^2+\left(\frac{\rho_p\omega^2}{k'A_pG_pE_p}-\frac{1}{E_pI_p}\right)(k_h+ic_h)\right]\cdot\left[\frac{\eta_b^2}{\xi_1}(s_1^2-k_R^2)-\frac{a_m^2}{\xi_1}+\frac{\kappa_1}{\xi_1}\left(\frac{\omega}{V_s}\right)^2\right]\begin{pmatrix}s_1\sin\theta\\+ik_R\cos\theta\end{pmatrix}\exp\begin{pmatrix}-s_1r\sin\theta\\-ik_Rr\cos\theta\end{pmatrix}$$

$$f_7=n(1-S_r)L_f\cos\theta\left[-\frac{k_h+ic_h}{k'A_pG_p}a_m^2+\left(\frac{\rho_p\omega^2}{k'A_pG_pE_p}-\frac{1}{E_pI_p}\right)(k_h+ic_h)\right]\cdot\left[\frac{\eta_b^2}{\xi_1}(s_2^2-k_R^2)-\frac{a_m^2}{\xi_1}+\frac{\kappa_1}{\xi_1}\left(\frac{\omega}{V_s}\right)^2\right]d_1\begin{pmatrix}s_2\sin\theta\\+ik_R\cos\theta\end{pmatrix}\exp\begin{pmatrix}-s_2r\sin\theta\\-ik_Rr\cos\theta\end{pmatrix}$$

$$l_1=-\frac{(k_h+ic_h)(k'G_p+P)}{k'G_pE_pI_p}a_m\cos\theta\begin{pmatrix}1-n+nM_f\\+nS_rM_a-nS_rM_f\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}s_1\sin\theta\\+ik_R\cos\theta\end{pmatrix}\exp(-s_1r\sin\theta-ik_Rr\cos\theta)$$

$$l_2=-\frac{(k_h+ic_h)(k'G_p+P)}{k'G_pE_pI_p}d_1a_m\cos\theta\begin{pmatrix}1-n+nM_f\\+nS_rM_a-nS_rM_f\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}s_2\sin\theta\\+ik_R\cos\theta\end{pmatrix}\exp(-s_2r\sin\theta-ik_Rr\cos\theta)$$

$$l_3=\frac{(k_h+ic_h)(k'G_p+P)}{k'G_pE_pI_p}d_2a_m\cos\theta\begin{pmatrix}1-n+nM_f\\+nS_rM_a-nS_rM_f\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\gamma\cos\theta\\+ik_R\sin\theta\end{pmatrix}\exp(-\gamma r\sin\theta-ik_Rr\cos\theta)$$

$$l_4=\frac{(k_h+ic_h)(k'G_p+P)}{k'G_pE_pI_p}\left[\frac{\eta_b^2}{\xi_2}(s_1^2-k_R^2)-\frac{a_m^2}{\xi_2}+\frac{\kappa_1}{\xi_2}\left(\frac{\omega}{V_s}\right)^2\right]\cdot nS_rL_aa_m\cos\theta\begin{pmatrix}-s_1\sin\theta\\-ik_R\cos\theta\end{pmatrix}\exp(-s_1r\sin\theta-ik_Rr\cos\theta)$$

$$l_5=\frac{(k_h+ic_h)(k'G_p+P)}{k'G_pE_pI_p}\left[\frac{\eta_b^2}{\xi_2}(s_2^2-k_R^2)-\frac{a_m^2}{\xi_2}+\frac{\kappa_1}{\xi_2}\left(\frac{\omega}{V_s}\right)^2\right]\cdot nS_rL_aa_md_1\cos\theta\begin{pmatrix}-s_2\sin\theta\\-ik_R\cos\theta\end{pmatrix}\exp(-s_2r\sin\theta-ik_Rr\cos\theta)$$

$$l_6=\frac{(k_h+ic_h)(k'G_p+P)}{k'G_pE_pI_p}\left[\frac{\eta_b^2}{\xi_1}(s_1^2-k_R^2)-\frac{a_m^2}{\xi_1}+\frac{\kappa_1}{\xi_1}\left(\frac{\omega}{V_s}\right)^2\right]\cdot n(1-S_r)L_fa_m\cos\theta\begin{pmatrix}-s_1\sin\theta\\-ik_R\cos\theta\end{pmatrix}\exp(-s_1r\sin\theta-ik_Rr\cos\theta)$$

$$l_7=\frac{(k_h+ic_h)(k'G_p+P)}{k'G_pE_pI_p}\left[\frac{\eta_b^2}{\xi_1}(s_2^2-k_R^2)-\frac{a_m^2}{\xi_1}+\frac{\kappa_1}{\xi_1}\left(\frac{\omega}{V_s}\right)^2\right]\cdot n(1-S_r)L_fa_md_1\cos\theta\begin{pmatrix}-s_2\sin\theta\\-ik_R\cos\theta\end{pmatrix}\exp(-s_2r\sin\theta-ik_Rr\cos\theta)$$

非齐次线性常微分方程(61)、(62)对应得齐次方程得解为

$$\bar{u}_p'(z)=M_1\cos\lambda_1z+M_2\sin\lambda_1z+M_3\operatorname{ch}\lambda_2z+M_4\operatorname{sh}\lambda_2z \tag{63}$$

$$\bar{\theta}_p'(z)=M_5\cos\lambda_1z+M_6\sin\lambda_1z+M_7\operatorname{ch}\lambda_2z+M_8\operatorname{sh}\lambda_2z \tag{64}$$

这里 $\lambda_1=\sqrt{\frac{W+\sqrt{W^2-4J}}{2}}$，$\lambda_2=\sqrt{\frac{-W+\sqrt{W^2-4J}}{2}}$，式中 $M_i(1,2,3,\cdots,8)$ 为与桩的边界条件有关的待定系数。

非齐次线性常微分方程(61)、(62)对应的特解为

$$\bar{u}_p^*(z)=b_1A_1\sin a_mz \tag{65}$$

$$\bar{\theta}_p^*(z)=b_2A_1\cos a_mz \tag{66}$$

其中：$b_1=\frac{I_1}{a_m^4-Wa_m^2+J}$，$b_2=\frac{I_2}{a_m^4-Wa_m^2+J}$。

将通解(63)、(64)代入式(9)、(10)，得

$$M_5=\chi_2M_2,M_6=\chi_1M_1,M_7=\chi_4M_4,M_8=\chi_3M_3$$

其中：$\chi_1=-\chi_2=-\frac{k'A_pG_p\lambda_1+A_pP\lambda_1}{k'A_pG_p+\rho_pI_p\omega^2+E_pI_p\lambda_1^2}$，$\chi_3=\chi_4=\frac{k'A_pG_p\lambda_2+A_pP\lambda_2}{k'A_pG_p+\rho_pI_p\omega^2-E_pI_p\lambda_2^2}$。

桩的水平位移和旋转角度表示为

$$\bar{u}_p=\bar{u}'_p(z)+\bar{u}_p^*(z) \tag{67}$$

$$\bar{\theta}_p=\bar{\theta}'_p(z)+\bar{\theta}_p^*(z) \tag{68}$$

沿桩身的弯矩和剪力由弹性力学得到

$$\bar{M}_p=E_pI_p\begin{bmatrix}M_1\chi_1\lambda_1\cos\lambda_1z-M_2\chi_2\lambda_1\sin\lambda_1z\\+M_3\chi_3\lambda_2\operatorname{ch}\lambda_2z+M_4\chi_4\lambda_2\operatorname{sh}\lambda_2z\\-b_2a_mA_1\sin a_mz\end{bmatrix} \tag{69}$$

$$\bar{Q}_p=k'A_pG_p\begin{bmatrix}-M_1(\lambda_1+\chi_1)\sin\lambda_1z\\+M_2(\lambda_1-\chi_2)\cos\lambda_1z\\+M_3(\lambda_2-\chi_3)\operatorname{sh}\lambda_2z\\+M_4(\lambda_2-\chi_4)\operatorname{ch}\lambda_2z\\+(b_1a_m-b_2)A_1\cos a_mz\end{bmatrix} \tag{70}$$

在桩顶柔性约束状态，桩端处于固定状态时，桩的边界条件为

$$\begin{cases}\bar{M}_{\mathrm{p}}(z)=K_1\bar{\theta}_{\mathrm{c}}+K_2[\bar{\theta}_{\mathrm{p}}(0)-\bar{\theta}_{\mathrm{c}}],z=0\\ \bar{Q}_{\mathrm{p}}(z)-A_{\mathrm{p}}P\bar{\theta}_{\mathrm{p}}(z)+\omega^2M_0\bar{u}_{\mathrm{p}}(z)=0,z=0\\ \bar{u}_{\mathrm{p}}(z)=0,z=H\\ \bar{\theta}_{\mathrm{p}}(z)=0,z=H\end{cases}\tag{71}$$

将边界条件代入上述位移方程，可得

$$M_1\cos\lambda_1H+M_2\sin\lambda_1H+M_3\mathrm{ch}\,\lambda_2H+M_4\mathrm{sh}\,\lambda_2H+b_1A_1\sin a_{\mathrm{m}}H=0\tag{72}$$

$$M_1\chi_1\sin\lambda_1H+M_2\chi_2\cos\lambda_1H+M_3\chi_3\mathrm{sh}\,\lambda_2H+M_4\chi_4\mathrm{ch}\,\lambda_2H+b_2A_1\cos a_{\mathrm{m}}H=0\tag{73}$$

$$M_1\chi_1\lambda_1E_{\mathrm{p}}I_{\mathrm{p}}-M_2\chi_2K_2+M_3\chi_3\lambda_2E_{\mathrm{p}}I_{\mathrm{p}}-M_4\chi_4K_2-K_2b_2A_1=K_1\bar{\theta}_{\mathrm{c}}-K_2\bar{\theta}_{\mathrm{c}}\tag{74}$$

$$M_1\omega^2M_0+M_2[k'A_{\mathrm{p}}G_{\mathrm{p}}(\lambda_1-\chi_2)-\chi_2A_{\mathrm{p}}P]+M_3\omega^2M_0+M_4[k'A_{\mathrm{p}}G_{\mathrm{p}}(\lambda_2-\chi_4)-\chi_4A_{\mathrm{p}}P]+A_1[k'A_{\mathrm{p}}G_{\mathrm{p}}(b_1a_{\mathrm{m}}-b_2)-A_{\mathrm{p}}Pb_2]=0\tag{75}$$

由桩土界面位移连续性条件可得

$$M_1\cos\lambda_1z+M_2\sin\lambda_1z+M_3\mathrm{ch}\,\lambda_2z+M_4\mathrm{sh}\,\lambda_2z+A_1[b_1\sin a_{\mathrm{m}}z+(\mathrm{i}k_{\mathrm{R}}+d_1\mathrm{i}k_{\mathrm{R}}+d_2\gamma)\exp(-\mathrm{i}k_{\mathrm{R}})\sin a_{\mathrm{m}}z]=0\tag{76}$$

由此可导出所有待定参数 $M(i=1,2,3,4)$，A_1。从而可以确定桩身水平位移、转角、弯矩和剪力解析解。

5 数值算例分析

首先通过数值算例验证了本模型的正确性，并分析了非饱和土的饱和度、竖向荷载、无量纲化频率等对桩身位移、转角、弯矩和剪力的影响。除特别说明外的参数外，所有参数如表 1 所示。

表 1 参数取值

Tab. 1 Parameter value

参数	取值	参数	取值
ρ_{s}	2.7×10^3 kg/m^3	r_0	0.5 m
ρ_{f}	1×10^3 kg/m^3	H	20 m
E_{a}	2 GPa	ρ_{p}	2.5×10^3 kg/m^3
n_{f}	0.375	E_{p}	25 GPa
S_{w0}	0.05	K_{s}	35 GPa
ν_{s}	0.4	K_{f}	2.25 GPa
n	0.4	K_{a}	145 kPa
m_{vg}	0.5	η_{f}	0.001 Pas
α_{vg}	0.000 1	η_{a}	18×10^{-6} Pas
n_{vg}	2	k'	0.75
α	0.9	ν_{p}	0.2
k_{d}	1×10^{-8} m/s	M_0	1×10^5 kg
G_{s}	2.5 MPa	P	10 GPa
d	1 m		

5.1 与现有解决方案比较

为验证本模型的准确性，取 $P=0$，将本模型与 Makris 解[22]进行比较。图 2 将 Makris 解[22]所采用的计算方法的边界条件设为柔性约束，并使用与本文相同的参数计算，从而验证文章计算模型。从对照结果可以看出两种解法较为一致。

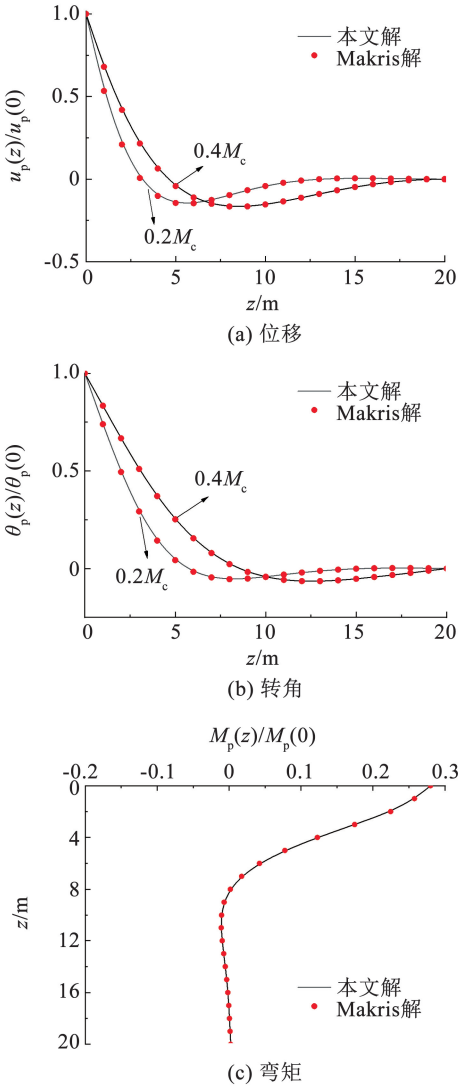


图 2 本文解与 Makris 解的比较

Fig. 2 Comparison of the solution in this article with the Makris the Yang solution

5.2 参数分析

引入无量纲频率 $a_1=\omega L_a/V_s$，$L_a=2H/\pi$，图 3 ~ 图 9 给出了在瑞利波-竖向荷载联合作用下单桩在非饱和土中的水平动力响应。从图中可以看发现，随着深度的增加，位移和转角先减小后增大直到达到桩端端时为零；剪力呈现出先减小后增大的趋势，在达到峰值后再度呈现衰减；弯矩表现为持续衰减的变化趋势，当接近桩端位置时，桩体的水平动力响应逐渐趋于稳定状态。随着激励频率的递增，在共振区间内发生共振现象后，位移、转角、弯矩及剪力保持稳定。

竖向荷载大小对单桩在非饱和土中的位移、转角、弯矩和剪力的影响如图 3、4 所示。从图 3 可以

发现，非饱和土中单桩的位移、转角、剪力和弯矩随着竖向荷载的增加均在增大。这是因为竖向荷载的存在会产生二阶效应导致水平位移增大，且改变了桩–土接触界面的应力分布规律，导致桩的位移和转角增大。当荷载接近承载极限时，结构的刚度逐渐降低。因而位移增大的趋势越来越明显。

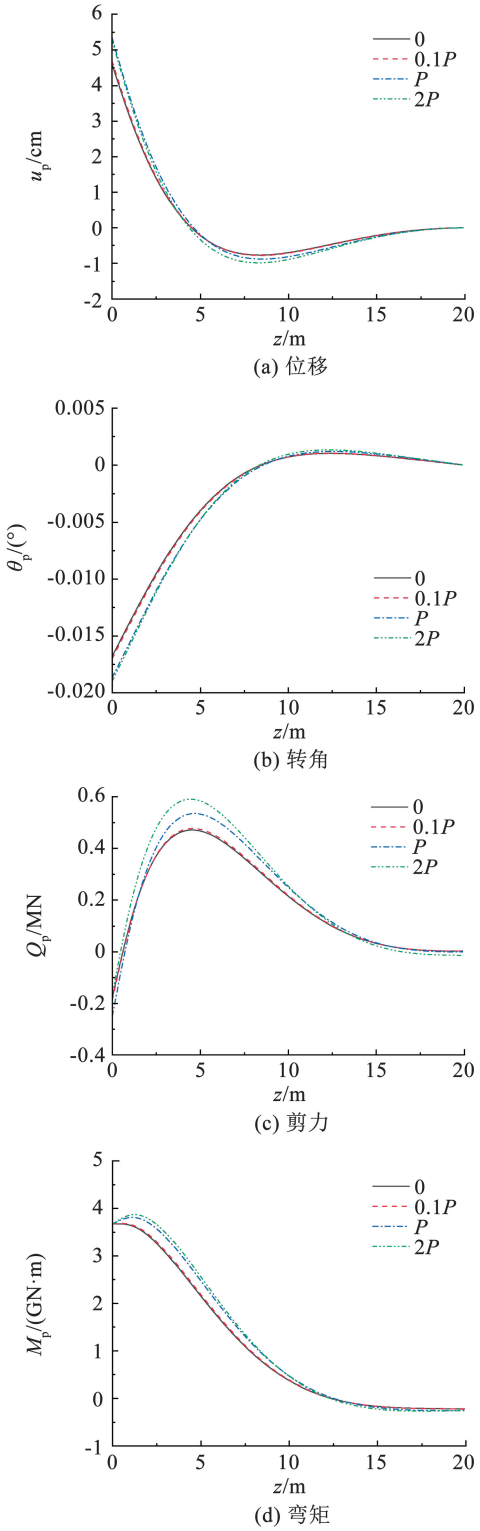


图 3　不同深度处竖向荷载对单桩水平动力响应的影响

Fig. 3　The influence of vertical load on the horizontal dynamic response of a single pile at different depths

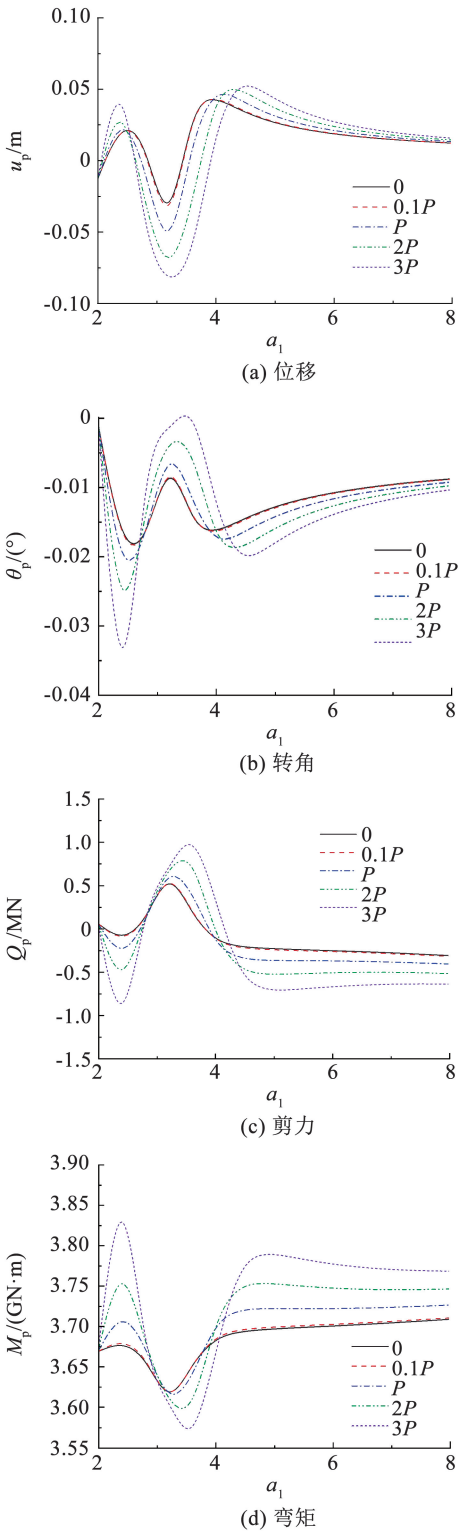


图 4　不同无量纲频率下竖向荷载改变对单桩水平动力响应的影响

Fig. 4　The influence of vertical load changes on the horizontal dynamic response of a single pile under different dimensionless frequencies

从图 4 可以看出。当激励频率接近固有频率时，系统发生共振现象。此时桩身的位移、转角、弯矩和剪力等响应会显著增大。而一旦过了共振区，由于桩土之间的相互作用及内部阻尼等因素的影响，桩土系统能量耗散增加，使得这些响应逐渐趋于

稳定。在共振区间内,随着竖向荷载的递增,桩顶位移、弯矩及剪力均呈现出整体增大的趋势,且其变化幅度表现出相对显著的特征。

不同的无量纲频率值,桩的位移、转角、弯矩和剪力的变化如图 5 所示。

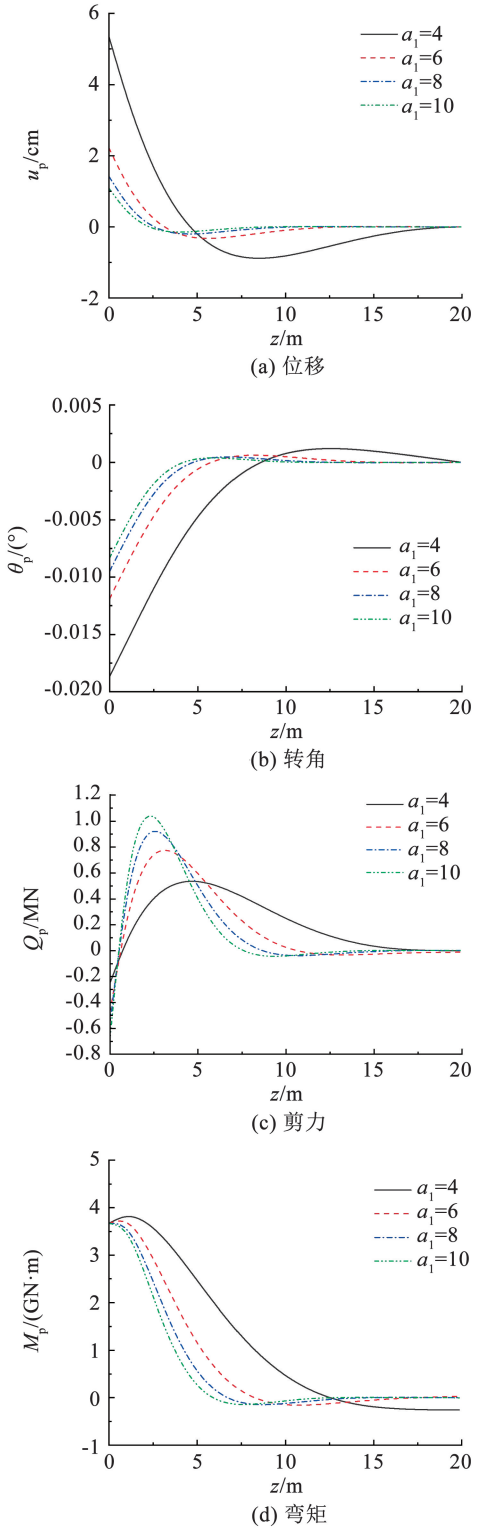


图 5 不同深度处无量纲频率改变对单桩水平动力响应的影响

Fig. 5 Effect of dimensionless frequency change at different depths on the horizontal dynamic response of a single pile

从图中可以看出当无量纲频率在 4 ~ 10 之间变化时,随频率的增加,位移、转角和弯矩逐渐减小,剪力先增大后减小。频率的增加,桩周土体的刚度效应凸显出来,土体对桩的约束增强,使得桩的变形受到限制。待无量纲频率达到某一特定值后,土体系统达到相对稳定的动力平衡状态。频率对桩基振动的影响逐渐减弱。

对于不同的屈服弯矩,桩的位移、转角、弯矩和剪力的变化如图 6、7 所示。

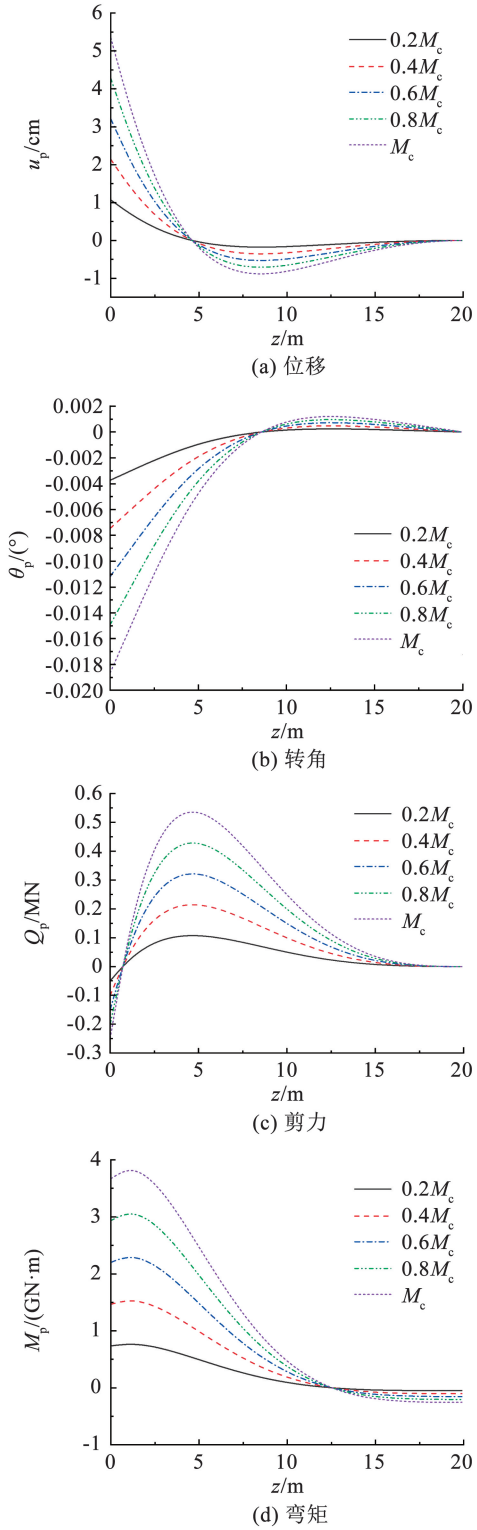
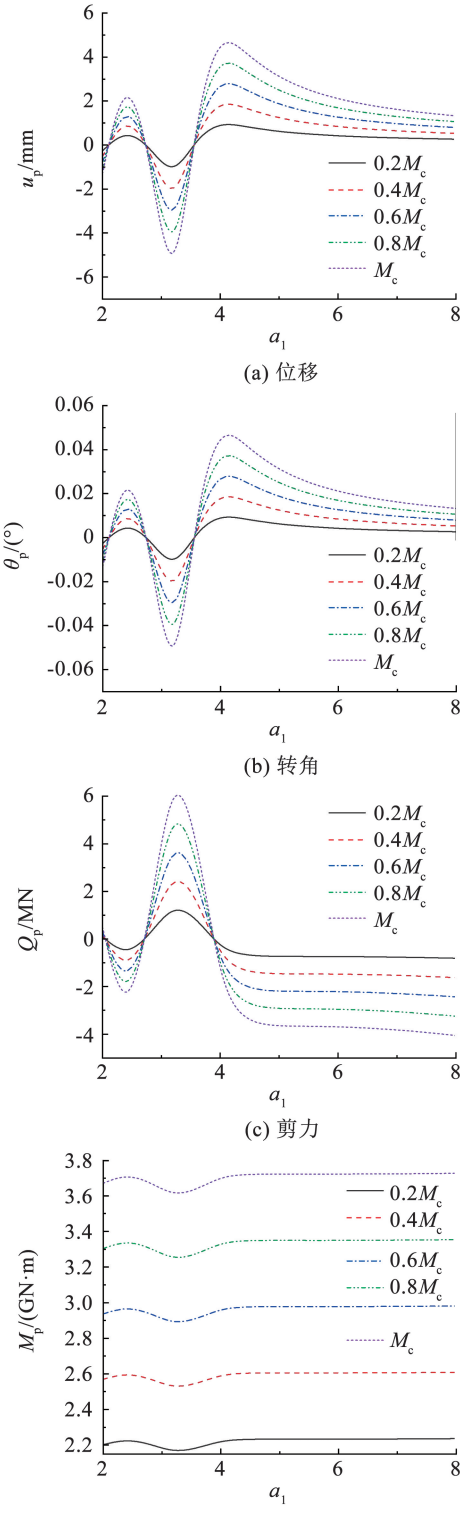


图 6 不同深度处屈服弯矩改变对单桩水平动力响应的影响

Fig. 6 Effect of yield moment change at different depths on the horizontal dynamic response ofmonopile

从图 6 可以看出，随屈服弯矩的增加，桩身在弯矩作用下产生的变形加剧。土中桩的位移、转角、弯矩和剪力都呈现出明显的增加趋势。

从图 7 可以看出，在不同的激励频率下随着屈服弯矩的增加桩顶的位移、转角、弯矩和剪力都有着明显的增加。从图中可以看到，在共振区域中，这一增加趋势尤为明显。



(a) 位移

(b) 转角

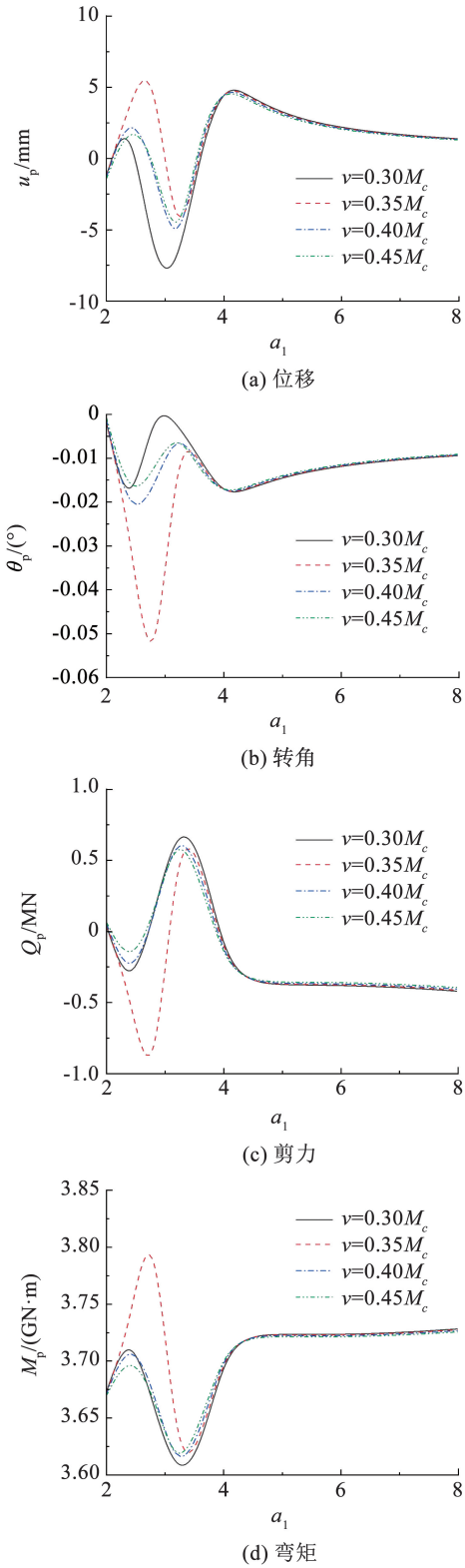
(c) 剪力

(d) 弯矩

图 7　不同无量纲频率下屈服弯矩改变对单桩水平动力响应的影响

Fig. 7　Effect of yield moment change on the horizontal dynamic response ofmonopile at different dimensionless frequencies

泊松比、饱和度的变化对于桩基础的水平动力响应随无量纲频率变化的影响也较为明显。如图 8、9 所示。



(a) 位移

(b) 转角

(c) 剪力

(d) 弯矩

图 8　不同无量纲频率下泊松比改变对单桩水平动力响应的影响

Fig. 8　The effect of Poisson's ratio change on the horizontal dynamic response ofmonopile at different dimensionless frequencies

从图 8 可以看出，随着泊松比的增加，在不同的激励频率下，桩的水平动力响应变化也不相同。可

以看到在非共振区桩的位移、转角、剪力和弯矩整体上随着泊松比的增大而增大。这是因为随着泊松比的增大,使得桩周土体对桩身的约束减弱,使得桩更容易发生变形。

从图 9 可以看出,随着饱和度的增加,在不同的激励频率下,桩的位移变化并不明显;转角、剪力和弯矩可能增大也可能减小,这是因为饱和度在0.4 ~ 0.7之间变化,饱和度对孔隙水-气压力耦合作用(基质吸力)影响不大,即饱和度对非饱和土的强度影响不大,因此,饱和度在 0.4 ~ 0.7 之间变化对桩基础的位移、转角、弯矩和剪力的影响不明显。

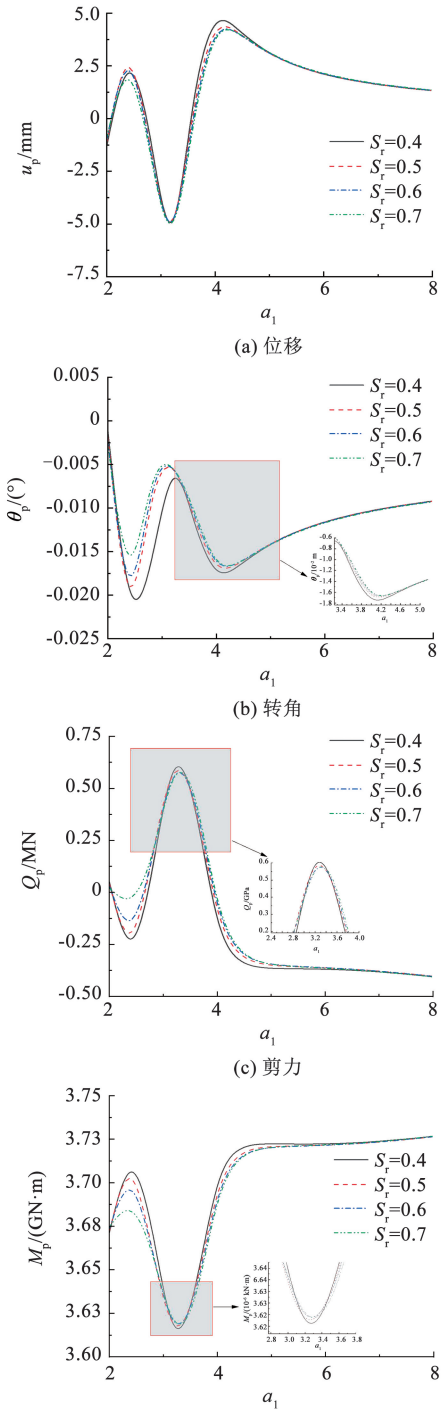


图 9 不同无量纲频率下饱和度改变对单桩水平动力响应的影响

Fig. 9 Effect of saturation change on the horizontal dynamic response of a single pile at different dimensionless frequencies

6 结 论

基于 Biot 理论,通过理论模型研究了 Rayleigh 波与竖向荷载联合作用下单桩在非饱和土中的水平动力响应。分析了屈服弯矩、竖向荷载、泊松比、饱和度以及无量纲频率等参数对桩基水平动力响应的影响。与现有单一竖向荷载或 Rayleigh 波作用对桩动力响应的研究不同,本研究考虑 Rayleigh 波与竖向荷载联合作用,建立桩基础在非饱和土中的理论模型,更符合实际工程情况,为工程实践提供更有价值的理论支持。基于上述研究结果,最终得出以下结论:

1)随着深度增加,位移与转角呈现先减小后增大的变化规律;剪力呈现出先减小后增大的趋势,在达到峰值后再度呈现衰减;弯矩表现为持续衰减的变化趋势,当接近桩端位置时,桩体的水平动力响应逐渐趋于稳定状态。

2)随着激励频率的递增递增,位移、转角、弯矩和剪力幅值在共振区域变化明显,竖向荷载 P 的存在使桩身位移和转角幅值增大了一倍,弯矩和剪力幅值具有一定程度的增大。

3)随着饱和度的增加,在不同的激励频率下,桩的位移变化并不明显。这是因为饱和度在 0.4 ~ 0.7 之间变化,对孔隙水-气压力耦合作用(基质吸力)影响不大,导致饱和度对非饱和土的强度影响不大,因此,饱和度在 0.4 ~ 0.7 之间变化对桩基础的位移、转角、弯矩和剪力的影响不明显。

参考文献

[1]易桂喜, 姚华建, 朱介寿, 等. 中国大陆及邻区 Rayleigh 面波相速度分布特征[J]. 地球物理学报, 2008(2): 402
Yi Guixi, Yao Huajian, Zhu Jieshou, et al. Distribution characteristics of Rayleigh surface wave phase velocity in the Chinese mainland and adjacent regions[J]. Chinese Journal of Geophysics, 2008(2): 402

[2]王立安, 赵建昌, 余云燕. 瑞利波在非均匀饱和地基中的传播特性[J]. 岩土力学, 2020, 41(6): 1983
Wang Li'an, Zhao Jianchang, Yu Yunyan. Propagation characteristics of Rayleigh waves in non-uniform saturated foundations[J]. Rock and Soil Mechanics, 2020, 41(6): 1983. DOI: 10.16285/j.rsm.2019.1236

[3]程先琼, 朱介寿, 蔡学林. 中国大陆 Rayleigh 面波衰减特征研究[J]. 中国地质, 2011, 38(2): 251
Cheng Xianqiong, Zhu Jieshou, Cai Xuelin. Study on the attenuation characteristics of Rayleigh surface waves in the Chinese mainland[J]. Geology in China, 2011, 38(2): 251

[4]章敏, 尚微, 周忠超, 等. 双层非饱和地基中 Rayleigh 波的传播

特性[J]. 岩土力学, 2017, 38(10): 2931
Zhang Min, Shang Wei, Zhou Zhongchao, et al. Double Rayleigh wave propagation in unsaturated foundation [J]. Rock and soil mechanics, 2017, 38(10): 2931. DOI: 10.16285/smj.r.2017.10.021

[5]陈炜昀, 陈国兴, 刘志军, 等. 不同边界条件下非饱和土地基中的 Rayleigh 波传播[J]. 水利学报, 2015, 46(11): 1329
Chen Weiyun, Chen Guoxing, Liu Zhijun, et al. Rayleigh wave propagation in unsaturated soil foundation under different boundary conditions[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2015, 46(11): 1329. DOI:10.13243/j.cnki.slxb.20141112

[6]周凤玺, 姚桃岐, 柳鸿博. 非饱和土中 Rayleigh 波传播的能量特性研究[J]. 岩土力学, 2023, 44(增刊 1): 612
Zhou Fengxi, Yao Taoqi, Liu Hongbo. Research on the energy characteristics of Rayleigh wave propagation in unsaturated soil[J]. Rock and Soil Mechanics, 2023, 44(S1): 612. DOI:10.16285/j.rsm.2022.0659

[7]周凤玺, 柳鸿博. 非饱和土中 Rayleigh 波的传播特性分析[J]. 岩土力学, 2019, 40(8): 3218
Zhou Fengxi, Liu Hongbo. Analysis of the propagation characteristics of Rayleigh waves in unsaturated soil[J]. Rock and Soil Mechanics, 2019, 40(8): 3218. DOI:10.16285/j.rsm.2022.0659

[8]王博宇, 胡志平, 张永辉, 等. 成层土中考虑桩侧土竖向作用的螺纹桩动力响应[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2024, 56(9): 161
Wang Boyu, Hu Zhiping, Zhang Yonghui, et al. Dynamic response of screw piles considering vertical action of pile-side soil in stratified soil[J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2024, 56(9): 161. DOI: 10.11918/202401087

[9]方昊, 郑俊杰, 刘洋, 等. 变速荷载作用下加筋低路堤动力响应分析[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2022, 54(8): 70
Fang Hao, Zheng Junjie, Liu Yang, et al. Dynamic response analysis of reinforced low embankments under variable-speed load [J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2022, 54(8): 70. DOI: 10.11918/202109020

[10]Yang Z, Wu W, Liu H, et al. Flexible support of a pile embedded in unsaturated soil under Rayleigh waves [J]. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 2023, 52(1): 226. DOI:10.1002/EQE.3758

[11]邹新军, 杨紫健, 吴文兵. Rayleigh 波作用下非饱和土中单桩水平振动解[J]. 建筑结构学报, 2024, 45(1): 170
Zou Xinjun, Yang Zijian, Wu Wenbing. Rayleigh wave under the action of single pile horizontal vibration of unsaturated soil[J]. Journal of Building Structures, 2024, 45(1): 170. DOI: 10.14006/j.jZJGXB.2022.0777

[12]Qu L M, Ding X M, Zheng C J, et al. An analytical solution for wave propagation in a square pile due to transient point load[J], Computers and Geotechnics, 2017(83): 77. DOI: 10.1016/j.compgeo.2016.11.002

[13]Zheng C J, Kouretzis G P, Ding X M, et al. Three-dimensional effects in low-strain integrity testing of piles: analytical solution [J]. Canadian Geotechnical Journal, 2016, 53(2): 225. DOI.org/10.1139/cgj-2015-0231

[14]Zheng C J, Gan S S, Ding X M, et al. Dynamic response of a pile embedded in elastic half space subjected to harmonic vertical loading[J]. Acta Mechanical Solida Sinica, 2017, 30: 668. DOI: 10.1016/j.camss.2017.09.006

[15]刘星, 王睿, 张建民. 液化地基中群桩基础地震响应分析[J]. 岩土工程学报, 2015, 37(12): 2326
Liu Xing, Wang Rui, Zhang Jianmin. Seismic response analysis of pile groups in liquefiable foundations [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2015, 37(12): 2326

[16]崔春义, 梁志孟, 许成顺, 等. 基于轴对称连续介质模型的径向非均质土中大直径管桩纵向振动特性研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2022, 41(5): 1031
Cui Chunyi, Liang Zhimeng, Xu Chengshun, et al. Study on longitudinal vibration characteristics of large-diameter pipe piles in radially inhomogeneous soil based on axisymmetric continuous medium model [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2022, 41(5): 1031. DOI: 10.13722/j.cnki.jrme.2021.0536

[17]栾鲁宝, 丁选明, 刘汉龙, 等. 考虑竖向荷载影响的大直径管桩水平振动响应解析解[J]. 岩土工程学报, 2015, 38(10): 1859
Luan Lubao, Ding Xuanming, Liu Hanlong, et al. Analytical solution for horizontal vibration response of large-diameter pipe piles considering the influence of vertical loads[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2015, 38(10): 1859

[18]周绪红, 蒋建国, 邹银生. 粘弹性介质中考虑轴力作用时桩的动力分析[J]. 土木工程学报, 2005, 38(2): 87
Zhou Xuhong, Jiang Jianguo, Zou Yinsheng. Dynamic analysis of piles considering axial force in viscoelastic medium[J]. China Civil Engineering Journal, 2005, 38(2): 87

[19]Stacul S, Squeglia N. Simplified assessment of pile-head kinematic demand in layered soil [J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2019, 130(C): 105975. DOI. 10.1016/j.soildyn.2019.105975

[20]Mucciacciaro M, Sica S. Nonlinear soil and pile behaviour on kinematic bending response of flexible piles[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2018, 107: 195. DOI. 10.1016/j.soildyn.2017

[21]Cao Xiaolin, Dai Guoliang, Gong Weiming, et al. Resistance of saturated soil to a laterally vibrating pile[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2021, 141: 106-496. DOI:10.1016/j.soildyn.2020.106496

[22]Makris N. Soil-pile interaction during the passage of Rayleigh waves: an analytical solution [J]. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 1994, 23(2): 153. DOI: 10.1002/EQE.3758