

DOI:10.11918/202501010

# 3-RSR 波浪补偿平台 T-S 模糊控制策略

王妙辉<sup>1</sup>, 谢文博<sup>2</sup>, 齐俊桐<sup>1</sup>, 吴翔<sup>2</sup>, 彭艳<sup>1</sup>

(1. 上海大学 人工智能研究院, 上海 200444; 2. 上海大学 机电工程与自动化学院, 上海 200444)

**摘要:** 为提高并联机器人波浪补偿控制的抗干扰能力与控制精度, 针对复杂海洋环境下现有方法鲁棒性不足的问题, 以 3-RSR 并联机器人为对象, 提出新型 TNL 函数观测器和 T-S 模糊控制策略。首先, 基于机构运动特性构建了包含支链约束的运动学模型, 推导关节空间与操作空间的雅可比矩阵; 通过虚功原理和牛顿-欧拉法建立非线性动力学模型, 阐明惯性力、科氏力与重力的耦合机制。其次, 针对系统的高度非线性特性, 采用 T-S 模糊模型对动力学方程进行精确逼近, 实现基于隶属度函数的局部线性化建模。创新性设计了 TNL 函数观测器, 结合 Lyapunov 稳定性理论构建 LMI 表征的鲁棒稳定性条件, 解决系统状态不可测问题。最后, 通过协同设计观测器与模糊控制器, 构建抗扰闭环系统, 利用凸优化求解满足  $H_{\infty}$  性能指标的控制器参数, 保障扰动下的动态稳定性。仿真结果表明, TNL 函数观测器较传统类型具有更优性能指标。该架构能有效解决非线性状态估计与鲁棒控制难题, 为海洋工程装备波浪补偿提供了创新方案, 对提升舰船转载、海上救援等作业性能具有重要实践价值。

**关键词:** 3-RSR 并联平台; 波浪补偿; T-S 模糊系统; TNL 函数观测器; 鲁棒控制; 凸优化; 线性矩阵不等式  
**中图分类号:** TP273 **文献标志码:** A **文章编号:** 0367-6234(2026)04-0058-11

## T-S fuzzy control strategy for the 3-RSR wave compensation platform

WANG Miaohui<sup>1</sup>, XIE Wenbo<sup>2</sup>, QI Juntong<sup>1</sup>, WU Xiang<sup>2</sup>, PENG Yan<sup>1</sup>

(1. Institute of Artificial Intelligence, Shanghai University, Shanghai 200444, China;  
2. School of Mechatronic Engineering and Automation, Shanghai University, Shanghai 200444, China)

**Abstract:** To improve the anti-interference ability and control accuracy of wave compensation control for parallel robots, and to address the problem of insufficient robustness of existing methods in complex marine environments, this study proposes a novel TNL function observer and a T-S fuzzy control strategy for a 3-RSR parallel robot. Firstly, a kinematic model incorporating limb constraints is constructed based on the kinematic characteristics of the mechanism, and the Jacobi matrices between the joint and operational spaces are deduced; a nonlinear dynamics model is established through the principle of virtual work and the Newton-Euler method to elucidate the coupling mechanism of inertial, Coriolis, and gravitational forces. Secondly, to address the highly nonlinear characteristics of the system, the T-S fuzzy model is adopted to accurately approximate the dynamical equations, thereby realizing local linearization modeling based on membership functions. The TNL function observer is innovatively designed, and the robust stability condition characterized by LMIs is constructed by combining the Lyapunov stability theory to solve the problem of unmeasurable system states. Finally, through a co-design of the observer and fuzzy controller, an anti-disturbance closed-loop system is constructed, and convex optimization is used to solve controller parameters that satisfy the  $H_{\infty}$  performance index, thereby guaranteeing dynamic stability under disturbances. Simulations show that the TNL function observer has better performance than the conventional types. The proposed architecture can effectively address the challenges of nonlinear state estimation and robust control, providing an innovative solution for wave compensation in marine engineering equipment, which is of great practical value for enhancing the performance of operations such as ship-to-ship transfer and maritime rescue.

**Keywords:** 3-RSR parallel platform; wave compensation; T-S fuzzy system; TNL function observer; robust control; convex optimization; linear matrix inequality

船舶在海洋环境中时刻受到风、浪、流等外部干扰的影响<sup>[1]</sup>。尽管动力定位 (dynamic positioning,

DP) 系统能够在一定程度上控制船舶低频状态, 但其仍难以抑制高频运动, 这不仅降低了人员与货物

收稿日期: 2025-01-08; 录用日期: 2025-04-15; 网络首发日期: 2025-11-25

网络首发地址: <https://link.cnki.net/urlid/23.1235.T.20251124.1831.008>

基金项目: 国家自然科学基金(62373237); 国家自然科学基金杰出青年基金(62225308)

作者简介: 王妙辉(2000—), 男, 硕士研究生; 谢文博(1985—), 男, 研究员, 博士生导师; 齐俊桐(1981—), 男, 教授, 博士生导师; 彭艳(1982—), 女, 教授, 博士生导师

通信作者: 谢文博, xiewenbo@shu.edu.cn

转移的效率,还带来了严重的安全隐患。为确保海上作业的安全性和效率,开发可靠的海上转运系统至关重要。目前,小船、直升机和吊篮等传统转运方式在安全性和效率方面均存在一定局限性。相比之下,安装在动力定位船上的海上廊桥成为一种更为理想的选择。动力定位系统能够补偿船舶的低频运动(如涌浪、摇摆和偏航),而廊桥的控制系统则能够进一步抑制高频运动干扰,从而保障设备和人员的安全<sup>[2]</sup>。

海上廊桥主要分为两类:固定基座式海上廊桥和基于混合机构的海上廊桥。固定基座式海上廊桥的基座直接固定在船舶上,仅依靠三自由度串联舷梯进行运动补偿。其结构简单,但运动范围有限;基于混合机构的海上廊桥则由多自由度并联机构和三自由度串联舷梯组成,虽然结构稍显复杂,但具有更高的补偿精度。然而,这些系统普遍具有复杂的非线性动力学特性,且工作环境中存在波浪干扰和时变负载等不确定性因素。为应对这些挑战,研究人员提出了多种控制策略。对于固定基座式设计,通常采用串联机械臂控制方案,通过动力学方程设计末端执行器控制策略,以补偿偏航、滚转、俯仰和摆动等方向的运动<sup>[3]</sup>。在多自由度并联机构的研究中,Stewart平台是最典型的代表,相关研究主要集中在关节空间控制策略上。例如,Chen等<sup>[4]</sup>提出了一种基于ADRC的三环控制策略,显著提升了系统的稳定性和干扰抑制能力。在任务空间控制策略研究中,Cai等<sup>[5]</sup>提出了一种自适应鲁棒双环控制方案,在车载Stewart平台的波浪补偿控制中表现出优异的性能。然而,固定基座式海上廊桥由于结构限制,无法完全补偿舷梯平台的六自由度运动;而基于混合机构的海上廊桥虽然具有更高的补偿能力,但其高复杂性、强非线性和显著耦合性使得系统对外部干扰和参数变化极为敏感。现有方法在处理高频运动干扰和复杂非线性动力学特性时仍存在显著不足。尤其是基于混合机构的廊桥系统,其高复杂性和强耦合性导致对外部干扰和参数变化极为敏感。现有控制策略在鲁棒性和精度上的局限性,严重制约了海上作业的安全性和效率。

近年来,T-S模糊系统在工业控制领域得到了广泛关注。这类系统通过隶属度函数(membership functions, MFs)将非线性系统近似表示为多个线性模型的模糊集合<sup>[6]</sup>,从而能够灵活地将线性系统控制理论应用于非线性系统的控制中<sup>[7-8]</sup>。在3-RSR并联机构的控制中,由于传感器测量的局限性,系统状态量中不可避免地存在不可测量部分。然而,要

实现波浪补偿平台的高精度控制,准确的状态估计至关重要。模糊观测器的设计主要围绕两个关键问题展开:观测器结构和不可测前件变量(unmeasurable premise variables, UPVs)。经典的全阶Luenberger观测器是设计的基础,但为了提高观测器性能并降低保守性,近期研究提出了在离散时间间隔内估计不可测状态的分段全阶观测器<sup>[9]</sup>。针对多样化和复杂的模糊系统,研究人员已提出了多种观测方法。例如,Guerra等<sup>[10]</sup>则针对T-S模糊系统设计了全阶观测器。Liu等<sup>[11]</sup>指出函数观测器可以直接估计系统状态,从而为精确的反馈控制提供支持。Wang等<sup>[12]</sup>则提出函数观测器可以估计系统状态的线性变换,从而支持滑模控制。然而,Islam等<sup>[13]</sup>指出,函数观测器增益矩阵的最优解涉及严格的秩条件,这增加了计算复杂性。

近年来,Wang等<sup>[14-15]</sup>提出了一类用于处理子系统的广义Luenberger观测器,并将其进一步发展为TNL观测器结构。这种结构通过引入更多的设计自由度,显著提高了控制精度。其中, $T$ 、 $N$ 、 $L$ 分别表示相应的设计参数矩阵。当 $T$ 和 $N$ 矩阵确定后,观测器将退化为具有 $L$ 增益矩阵的传统Luenberger类型。Wang等<sup>[16-17]</sup>还指出,参数矩阵 $T$ 和 $N$ 只需满足相对简化的秩条件,从而能够高效、便捷地求解。与函数观测器的严格秩条件相比,TNL观测器的条件更易于处理。尽管已有研究在观测器设计上取得进展,但严格的秩条件限制和不可测前件变量(UPVs)的保守性处理,仍是制约3-RSR并联机构控制性能的关键因素。

在模糊观测器设计中,处理不可测前件变量(UPVs)是一个关键问题。Pan等<sup>[18]</sup>指出,隶属度函数通常依赖于估计的前件变量。Hassani等<sup>[19]</sup>详细分析了区间型T-S模糊系统的故障检测问题,并基于UPVs的Lipschitz条件提出了解决方案。Zhou等<sup>[20]</sup>则设计了一种有限频率故障检测TNL观测器。Bezzaoucha等<sup>[21]</sup>提出了一种函数观测器,将UPVs相关因素转化为扰动,从而确保了系统的鲁棒性能。

处理不可测前件变量(UPVs)是观测器设计中的主要挑战之一,传统方法往往难以应对。为了减少稳定性分析中的保守性,研究人员提出了一些创新方法。例如,Guerra等<sup>[22]</sup>应用差分均值定理(differential mean value theorem, DMVT),将UPVs重新解释为估计误差,从而提高了估计精度。Xie等<sup>[23]</sup>则引入了一种解耦技术,将UPVs视为独立的模糊系统,进一步完善了分析和设计方法。上述研

究在观测器-控制器设计方面取得了显著进展,为 3-RSR 并联机构的 T-S 模糊系统设计提供了重要参考。然而,由于观测器结构和不可测前件变量 (UPVs) 的影响,现有方法仍存在一定的保守性,导致控制性能和鲁棒性不足。亟待解决海上廊桥系统对控制精度和鲁棒性的高要求问题。

针对上述挑战,本文提出了一种基于 TNL 型函数观测器的鲁棒控制框架,通过结合秩约束和 UPVs 解耦技术,实现了 3-RSR 并联机构的高精度干扰抑制控制。

## 1 3-RSR 系统运动学和动力学

### 1.1 系统坐标系

3-RSR 并联平台的关节示意图见图 1。铰点  $B_i$  和  $P_i$  ( $i=1,2,3$ ) 均为转动副 (R)。图中:  $B_i$  为驱动电机轴与驱动连杆  $B_iM_i$  的交点,该点位于基平面  $\{B\}$  上;  $P_i$  为从动连杆  $P_iM_i$  与动平面  $\{P\}$  的交点,位于动平面  $\{P\}$  上。点  $M_i$  为球面副 (S) 转动中心,作为铰接点连接  $B_iM_i$  和  $P_iM_i$ 。3 组 RSR 支链  $B_iM_iP_i$  将动平面  $\{P\}$  与基平面  $\{B\}$  连接,每组由安装在基平面  $\{B\}$  上的永磁同步电机驱动。通过旋转驱动连杆  $B_iM_i$  与基平面  $\{B\}$  之间的角度  $\theta_i$  ( $i=1,2,3$ ),实现动平面  $\{P\}$  相对于基平面  $\{B\}$  的运动,其中  $\theta_i \in (0^\circ, 90^\circ)$ 。

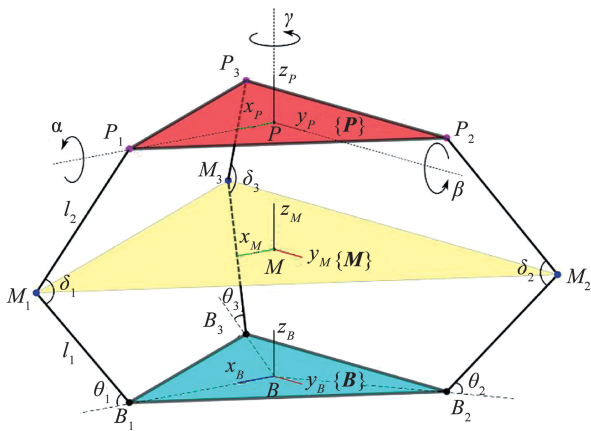


图 1 3-RSR 并联平台关节原理图

Fig. 1 Schematic diagram of 3-RSR parallel platform joint

为了便于正逆运动学的计算,所设计的 3-RSR 并联机构结构具有以下特点:

1) 铰点  $B_i$  所组成的三角形  $\Delta B_1B_2B_3$  以及铰点  $P_i$  所组成的三角形  $\Delta P_1P_2P_3$  均为等边三角形,其中  $B_iB_j = P_iP_j, i \neq j$ 。

2) 驱动连杆与从动连杆的长度相等,即  $B_iM_i = P_iM_i = l, i=1,2,3$ 。

基于上述两个特点,结合图 1 的几何关系可知,基平面  $\{B\}$  与动平面  $\{P\}$  关于中间平面  $\{M\}$  对称,

$\{M\}$  并非实际存在的平面,而是由  $M_i$  点构成的虚拟平面。

对 3-RSR 并联平台进行运动学分析,将各铰接点简化为质点,建立以下对应的坐标系。

1) 基坐标系  $B-x_By_Bz_B$ 。坐标系的原点  $B$  与三角形  $\Delta B_1B_2B_3$  的几何中心重合。 $x$  轴指向  $B_1$ ,  $z$  轴是  $\{B\}$  的法向量,  $y$  轴由右手法则确定。

2) 中间坐标系  $M-x_My_Mz_M$ 。坐标系的原点为  $M$  即  $\{B\}$  的法向量与  $\{M\}$  的交点。 $x$  轴指向  $M_1$ ,  $z$  轴是  $\{M\}$  的法向量,  $y$  轴由右手法则确定。

3) 动坐标系  $P-x_Py_Pz_P$ 。坐标系的原点  $P$  与三角形  $\Delta P_1P_2P_3$  的几何中心重合。 $x$  轴指向  $P_1$ ,  $z$  轴是  $\{P\}$  的法向量,  $y$  轴由右手法则确定。

4) 世界坐标系  $W-x_Wy_Wz_W$ 。该坐标系固定于地球,始终保持静止状态。

### 1.2 逆运动学分析

3-RSR 并联机构的逆运动学问题可描述为:根据动平面  $\{P\}$  的位置  $q_x = [x_p \ y_p \ z_p]^T$  和姿态  $q_b = [\alpha \ \beta \ \gamma]^T$ , 确定驱动关节的转角  $\theta_i$ 。  $\{P\}$  的位置和姿态可表示为向量  $[x_p \ y_p \ z_p \ \alpha \ \beta \ \gamma]^T$ 。

然而,由于 3-RSR 机构的结构特点,  $\{P\}$  的位姿向量中的 6 个元素并非完全独立。位置变量  $q_x$  是独立的,而姿态变量  $q_b$  可通过  $q_x$  解出。为实现解耦,引入中间变量  $d$  替代位置向量  $q_x$ , 其中  $d$  为点  $B$  与  $M$  之间的距离。通过已知参数  $\alpha, \beta$  和  $d$ , 3-RSR 并联机构的逆运动学解可以表达为驱动角  $\theta_1, \theta_2$  和  $\theta_3$  的函数。

根据结构特性,中间平面  $\{M\}$  和基平面  $\{B\}$  之间在  $\gamma$  方向上无相对旋转。由于  $\{B\}$  和  $\{P\}$  关于  $\{M\}$  对称,因此  $\gamma = \dot{\gamma} = 0$ 。因此,在后续分析中,将不再考虑  $\gamma$  自由度上的运动。

为清晰描述 3-RSR 系统的运动学特性,定义以下向量:  $q = [x_p \ y_p \ z_p \ \alpha \ \beta]^T$  为  $\{P\}$  的姿态,  $q_e = [\alpha \ \beta \ d]^T$  为  $\{P\}$  的等效位姿,  $q_x = [x_p \ y_p \ z_p]^T$  为  $\{P\}$  的位置,  $q_a = [\alpha \ \beta]^T$  为  $\{P\}$  的姿态,  $\omega_p = [\omega_\alpha \ \omega_\beta \ \omega_\gamma]^T$  为  $\{P\}$  相对于坐标系  $B-x_By_Bz_B$  的角速度向量,  $\theta = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3]^T$  为驱动角,  $\tau = [\tau_1 \ \tau_2 \ \tau_3]^T$  为驱动力矩。

由于  $\alpha, \beta$  已知,从  $\{P\}$  到  $\{B\}$  的旋转矩阵为

$${}^P_B R = R(y, \beta) R(x, \alpha) \quad (1)$$

由于  $\{P\}$  和  $\{B\}$  关于  $\{M\}$  对称,从  $\{M\}$  到  $\{B\}$  的旋转矩阵为

$${}^M_B R = R\left(y, \frac{\beta}{2}\right) R\left(x, \frac{\alpha}{2}\right) \quad (2)$$

从  $\{P\}$  到  $\{M\}$  的旋转矩阵为  ${}^P_M R = {}^P_B R$ , 因此

可以确定  $\{M\}$  的法向量,即

$$z_M = \frac{\{M\}}{\|B\|} R \cdot z_B \quad (3)$$

由图1可知,向量  $MM_i$  与  $z_M$  正交,即

$$(M_i - dz_{B_i})z_M = 0, i = 1, 2, 3 \quad (4)$$

通过求解式(4)可以得到驱动角  $\theta$  的表达式为

$$\cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \varphi_i (R + l \cos \theta_i) - \sin \frac{\alpha}{2} \sin \varphi_i (R + l \cos \theta_i) - \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} (d - l \sin \theta_i) = 0 \quad (5)$$

式中:  $\varphi_i = \frac{2}{3}\pi(i-1)$ ,  $i = 1, 2, 3$  为  $BB_i$  与基平面坐标系  $x$  轴正方向  $x_B$  的夹角;  $B_i$  均匀的分布在以  $B$  为圆心,以  $R$  为半径的圆上。

### 1.3 正运动学分析

正向运动学问题可描述为:根据驱动角  $\theta$ ,其目标是确定动平面  $\{P\}$  的姿态  $q_e$ 。

在  $B-x_B y_B z_B$  坐标系中,点  $M$  的坐标可表示为向量:

$$M = dz_B \quad (6)$$

由于驱动角  $\theta$  已知,点  $M_i$  的坐标可表示为  $\theta$  的函数。中间平面  $\{M\}$  的法向量  $z_M$  可通过下式计算:

$$z_M = \frac{(M_3 - M_2) \times (M_2 - M_1)}{\|(M_3 - M_2) \times (M_2 - M_1)\|} \quad (7)$$

根据  $(M - M_1)z_M = 0$ ,可推导出  $d$  的表达式如下:

$$d = \frac{M_1 z_M}{z_B z_M} \quad (8)$$

设  $z_M = [a \ b \ c]^T$ ,通过对式(2)~(4)进行转换,可确定  $\alpha \ \beta$  分别为:

$$\alpha = -2\arcsin(b) \quad (9)$$

$$\beta = 2\arcsin\left(\frac{a}{\cos \alpha}\right) \quad (10)$$

至此,正运动学分析完成。

### 1.4 雅可比矩阵计算

变量  $\dot{q}_x$  可通过式(2)和式(4)推导得出:

$$\dot{q}_x = J_1 \dot{q}_e \quad (11)$$

变量  $\dot{q}_e$  可通过式(7)~(9)推导得出:

$$\dot{q}_e = J_2 \dot{\theta} \quad (12)$$

因此,可得:

$$\dot{q}_x = J_3 \dot{\theta} \quad (13)$$

式中,  $J_3 = J_1 J_2$ 。

$\dot{q}_a$  和  $\dot{\theta}$  之间的雅可比矩阵可直接由  $J_2$  获得:

$$\dot{q}_a = J_4 \dot{\theta} \quad (14)$$

式中,  $J_4$  为  $J_2$  的前两行,并且由于  $\gamma = \dot{\gamma} = 0$ ,  $J_4 \in \mathbf{R}^{2 \times 3}$ 。

### 1.5 动力学分析

3-RSR 机构各组件的质量定义如下:驱动连杆、从动连杆和动平面  $\{P\}$  的质量分别为  $m_a$ 、 $m_b$  和  $m_c$ 。该机构中所使用的连杆具有较大的长细比(长度与截面尺寸之比),其质量分布更接近于杆状结构,两端集中质量的模型能较好地近似实际质量分布。因此,假设连杆的质量集中于其两端,忽略中间段的质量对系统整体动力学影响较小。

3-RSR 并联机构动平面  $\{P\}$  的平移动能为

$$E_{tke} = \frac{1}{2} \dot{q}_x^T m \dot{q}_x \quad (15)$$

式中,  $m = m_c + \frac{3}{2}m_b$ 。

3-RSR 并联机构动平面  $\{P\}$  的转动动能为

$$E_{rke} = \frac{1}{2} \omega_{pm}^T I_p \omega_{pm} \quad (16)$$

式中:  $\omega_{pm}$  为动平面  $\{P\}$  在坐标系  $P-x_p y_p z_p$  中的角速度矢量,  $I_p = \text{diag}\{I_x I_y I_z\}$  为动平面  $\{P\}$  相对于坐标系  $P-x_p y_p z_p$  的惯性矩阵。

$\omega_{pm}$  与  $\omega_p$  之间的关系为

$$\omega_{pm} = R(x, \alpha)^{-1} R(y, \beta)^{-1} \omega_p \quad (17)$$

$\omega_p$  与旋转矩阵  ${}^P_B R$  之间的关系为

$$\tilde{\omega}_p = \frac{P}{B} \dot{R} \frac{P}{B} R \quad (18)$$

式中,符号  $\sim$  为向量的反对称矩阵,可表示为  $\tilde{\omega}_p = -\tilde{\omega}_p^T$ 。  $\omega_p$  的反对称矩阵可表示为

$$\tilde{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_y & \omega_z \\ \omega_y & 0 & -\omega_x \\ -\omega_z & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

结合式(17)、(18),可求得  $\omega_p$ 。因此,根据式(15),动平面  $\{P\}$  的转动动能为

$$E_{rke} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I_x & 0 \\ 0 & I_y \cos^2 \alpha + I_z \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} \quad (20)$$

结合式(14)和式(19),可得到动平面  $\{P\}$  的总动能为

$$E_{ke} = E_{tke} + E_{rke} = \frac{1}{2} \dot{q}^T M_p \dot{q} \quad (21)$$

式中  $M_p$  为  $\{P\}$  的质量矩阵。

动平面  $\{P\}$  的势能可表示为

$$E_{pe} = mgz_p \quad (22)$$

根据拉格朗日函数的定义,应用拉格朗日方程可将连杆的运动方程推广至3-RSR 并联机构的动平面  $\{P\}$ ,得到如下拉格朗日方程:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i \quad (23)$$

式中:  $L$  为拉格朗日函数,定义为  $L = E_{ke} - E_{pe}$ ;  $q_i$  为

动能和势能的广义坐标;  $\tau_i$  为广义力, 是作用在坐标  $q_i$  方向上的假设力和力矩。

基于虚功原理, 可推导出系统的动力学方程:

$$\mathbf{M}(q)\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(q, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(q) = \mathbf{J}(\tau + \tau_d) \quad (24)$$

其中:

$$\mathbf{M}(q) = \begin{bmatrix} m \cdot I_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 3} & \begin{pmatrix} I_x & 0 \\ 0 & I_y \cos^2 \alpha + I_z \sin^2 \alpha \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}(q, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{4 \times 4} & \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \frac{1}{2}(I_y - I_z) \sin(2\alpha) \dot{\beta} \end{pmatrix} \\ \mathbf{0}_{1 \times 4} & (I_z - I_y) \sin(2\alpha) \dot{\alpha} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}(q) = [0 \quad 0 \quad mg \quad 0 \quad 0]^T$$

$$\mathbf{J} = [J_3^T \quad J_4^T]^T$$

式中:  $\mathbf{M}(q)$  为惯性矩阵,  $\mathbf{C}(q, \dot{\mathbf{q}})$  为科里奥利矩阵,  $\mathbf{G}(q)$  为重力矩阵,  $\mathbf{J}$  为机构的雅可比矩阵,  $\tau$  为驱动力矩,  $\tau_d$  为扰动力矩。

基于动力学模型 (23), 可建立系统的状态空间方程。设定状态变量为  $x_1 = q, x_2 = \dot{q}$ , 从而控制输入为  $u = \mathbf{J}\tau - \mathbf{G}(x_1)$ , 扰动项可表示为  $Ed = \mathbf{J}\tau_d$ , 输出为  $y = q$ , 则状态方程可表示为以下形式:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{B}(\mathbf{x})u + E\mathbf{d} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases} \quad (25)$$

其中:

$$\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2]$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{5 \times 5} & I_{5 \times 5} \\ \mathbf{0}_{5 \times 5} & -\mathbf{M}^{-1}(x_1)\mathbf{C}(x_1, x_2) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{5 \times 5} \\ \mathbf{M}^{-1}(x_1) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = [I_{5 \times 5} \quad \mathbf{0}_{5 \times 5}]$$

## 2 T-S 模糊模型

为便于分析, 将式 (25) 重构为 T-S 模糊系统, 此方法可简化稳定性分析, 并便于观测器与控制器的设计。

式 (25) 可表示为具有外部扰动的 T-S 模糊模型:

规则  $i$  若  $\varepsilon_1$  属于  $M_{i1}$  且  $\varepsilon_\nu$  属于  $M_{i\nu}$ , 则

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_i \mathbf{x} + \mathbf{B}_i u + \mathbf{E}_i d \quad (26)$$

式中:  $i = 1, 2, \dots, l, l$  为模糊规则的数量;  $\varepsilon = [\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\nu]^T \in \mathbf{R}^\nu$  为前件变量;  $M_{ij}$  为模糊集,  $j = 1, 2, \dots, \nu, \nu$  为前件变量的维度;  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$  为系统状态;  $u \in \mathbf{R}^m$  为控制输入;  $d \in \mathbf{R}^o$  为未知外部扰动, 且满足

$d \in L_2(0, \infty)$ ;  $\mathbf{A}_i \in \mathbf{R}^{n \times n}, \mathbf{B}_i \in \mathbf{R}^{n \times m}, \mathbf{E}_i \in \mathbf{R}^{n \times o}$  为系统的参数矩阵。由于式 (25) 的状态变量数量已知, 矩阵维度可直接确定为:  $n = 10, m = 5, o = 1, \nu = 3$ 。为保持一致性, 后续分析沿用上述维度符号。

在此使用扇形非线性方法来处理系统当中的非线性部分<sup>[24]</sup>, 前件变量  $\varepsilon_i \in [\varepsilon_{i\min}, \varepsilon_{i\max}] (i = 1, 2, \dots, \nu)$  为系统当中的非线性项,  $\varepsilon_{i\min}, \varepsilon_{i\max}$  分别为  $\varepsilon_i$  的最小值和最大值。对于每个  $\varepsilon_i$  可以构造两个归一化权重函数:

$$\eta_0^i = \frac{\varepsilon_{i\max} - \varepsilon_i}{\varepsilon_{i\max} - \varepsilon_{i\min}} \quad (27)$$

$$\eta_1^i = 1 - \eta_0^i \quad (28)$$

此外,  $\varepsilon_i$  可以表示为  $\varepsilon_i = \varepsilon_{i\min} \eta_0^i + \varepsilon_{i\max} \eta_1^i$ , 即两个极值的加权和。对应于这两个权重函数的模糊集定义在区间  $[\varepsilon_{i\min}, \varepsilon_{i\max}]$  上, 即  $\varepsilon_i$  取值的域。

系统动力学方程可进一步表示为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^l \Phi_i(\varepsilon) [\mathbf{A}_i \mathbf{x} + \mathbf{B}_i u + \mathbf{E}_i d] \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases} \quad (29)$$

其中:

$$\sum_{i=1}^l \Phi_i(\varepsilon) = 1$$

$$\Phi_i(\varepsilon) = \frac{\prod_{j=1}^{\nu} M_{ij}(\varepsilon_j)}{\sum_{i=1}^l \prod_{j=1}^{\nu} M_{ij}(\varepsilon_j)} \geq 0$$

对于所有  $i, \Phi_i(\varepsilon)$  为归一化的隶属度函数,  $M_{ij}(\varepsilon_j)$  为  $\varepsilon_j$  对应模糊集  $M_{ij}$  的隶属度。系统输出为  $y \in \mathbf{R}^o$ 。

对于式 (25), 前件变量的设置如下:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1}{2} \frac{(I_z - I_y) \sin(2\alpha)}{I_x} \dot{\beta} = D_1(\alpha) \dot{\beta} \\ \varepsilon_2 = \frac{(I_y - I_z) \sin(2\alpha)}{I_y \cos^2 \alpha + I_z \sin^2 \alpha} \dot{\alpha} = D_2(\alpha) \dot{\alpha} \\ \varepsilon_3 = \frac{1}{I_y \cos^2 \alpha + I_z \sin^2 \alpha} \end{cases} \quad (30)$$

由于传感器限制,  $\dot{\alpha}$  和  $\dot{\beta}$  无法直接测量。因此, 前件变量  $\varepsilon_1$  和  $\varepsilon_2$  为不可测变量, 而  $\varepsilon_3$  为可测变量, 其隶属度函数可分别表示为  $h(\sigma)$  和  $g(\zeta)$ , 其中  $\sigma = \varepsilon_3$  和  $\zeta = [\varepsilon_1, \varepsilon_2]$  分别表示可测和不可测的前件变量。

基于上述建模方法, 可得到等效的 T-S 模糊模型 (29), 其形式为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{l_\sigma} \sum_{j=1}^{l_\zeta} h_i(\sigma) g_j(\zeta) [\mathbf{A}_{ij} \mathbf{x} + \mathbf{B}_{ij} u + \mathbf{E}_{ij} d] \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases} \quad (31)$$

式中  $l_\sigma, l_\zeta$  分别为与可测和不可测前件变量相关的规则数。

3-RSR 并联机构的控制目标为保持动平面  $\{P\}$  稳定。由于  $\{P\}$  的某些状态变量不可测,因此将设计一个 TNL 函数观测器和基于观测器的控制器来完成控制任务。

### 3 主要内容

#### 3.1 观测器设计

本文提出了一种新型 TNL 函数观测器。对于式 (29), 矩阵  $C$  是满行秩的,  $C$  和  $I_n$  满足  $\text{rank} [I_n \ C]^T = n$ 。定义矩阵  $T_1 \in \mathbf{R}^{n \times n}, T_2 \in \mathbf{R}^{n \times s}$  和  $[T_1 \ T_2] \in \mathbf{R}^{n \times (n+s)}$  为满行秩矩阵<sup>[25]</sup>, 使得以下条件成立:

$$[T_1 \ T_2] \begin{bmatrix} I_n \\ C \end{bmatrix} = T_1 + T_2 C = I_n \quad (32)$$

对于式(31), 模糊观测器构造为

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \sum_{i=1}^{l_\sigma} \sum_{j=1}^{l_\zeta} h_i \hat{g}_j (N_{ij} \xi + H_{ij} u + J_{ij} y) \\ \hat{x} = \xi + T_2 y \end{cases} \quad (33)$$

式中:  $\hat{x} \in \mathbf{R}^n$  为估计状态,  $\xi \in \mathbf{R}^n$  为中间状态变量,  $N_{ij} \in \mathbf{R}^{n \times n}, J_{ij} \in \mathbf{R}^{n \times s}, H_{ij} \in \mathbf{R}^{n \times m}, T_2$  为待确定的观测器增益矩阵。

定义估计误差  $e = x - \hat{x}$ , 并考虑式(32)、(33),  $e$  可表示为

$$e = T_1 x - \xi \quad (34)$$

联立式(31)的系统方程与观测器(33), 基于式(34), 估计误差系统可推导为

$$\dot{e} = T_1 \dot{x} - \dot{\xi} = \sum_{i=1}^{l_\sigma} \sum_{j=1}^{l_\zeta} \sum_{k=1}^{l_\zeta} h_i g_j \hat{g}_k [N_{ik} e + (T_1 B_{ij} - H_{ik}) u + (T_1 A_{ij} - N_{ik} T_1 - J_{ik} C) x + T_1 E_{ij} d] \quad (35)$$

如果以下条件成立:

$$T_1 A_{ij} - N_{ik} T_1 - J_{ik} C = 0 \quad (36)$$

$$T_1 B_{ij} - H_{ik} = 0 \quad (37)$$

式(35)的描述可以进一步简化为

$$\dot{e} = \sum_{i=1}^{l_\sigma} \sum_{j=1}^{l_\zeta} \sum_{k=1}^{l_\zeta} h_i g_j \hat{g}_k (N_{ik} e + T_1 E_{ij} d) \quad (38)$$

观测器设计问题转化为求解增益矩阵  $N_{ik}, J_{ik}, H_{ik}, T_1$  和  $T_2$ , 使得式(38)在满足式(36)、(37)的情况下渐近稳定。相较于传统 TNL 观测器, 本文设计的观测器引入更多的决策变量, 设计自由度更高且保守性更低。

#### 3.2 稳定性分析

针对观测器误差式(38)的稳定性, 本文给出了

鲁棒性的具体分析方法。

**定理 1** 对于  $\forall i = 1, \dots, l_\sigma, j, k = 1, \dots, l_\zeta$ , 如果存在标量  $\gamma_1 > 0$  和矩阵  $P_o = P_o^T > 0 \in \mathbf{R}^{n \times n}, W_{ik} = P_o N_{ik}, Y = P_o Y, W_{ik} \in \mathbf{R}^{n \times n}, Y \in \mathbf{R}^{n \times (n+s)}$ , 其中  $W_{ik} \in \mathbf{R}^{n \times n}, Y \in \mathbf{R}^{n \times (n+s)}$ , 若不等式(39)成立, 则式(38)具有鲁棒稳定性, 并且具有  $H_\infty$  性能指标  $\|e\|_2 \leq \gamma_1 \|d\|_2$ , 即

$$\begin{bmatrix} \text{He} \{ W_{ik} \} + I_n & U_{ij} \\ \star & -\gamma_1^2 I_o \end{bmatrix} < 0 \quad (39)$$

其中:

$$U_{ij} = (P_o \varpi \Omega_1 + Y \beth \Omega_1) E_{ij},$$

$$\varpi = \begin{bmatrix} I_n \\ C \end{bmatrix}^\dagger, \beth = \left( I_{n+s} - \begin{bmatrix} I_n \\ C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ C \end{bmatrix}^\dagger \right), \Omega_1 = \begin{bmatrix} I_n \\ 0_{s \times n} \end{bmatrix}$$

**证明** 给定 Lyapunov 函数  $V_o = e^T P_o e \geq 0$ , 其导数  $\dot{V}_o$  为

$$\dot{V}_o = \sum_{i=1}^{l_\sigma} \sum_{j=1}^{l_\zeta} \sum_{k=1}^{l_\zeta} h_i g_j \hat{g}_k [e^T (N_{ik}^T P_o^T + P_o N_{ik}) e + d^T E_{ij}^T T_1^T P_o e + e^T P_o T_1 E_{ij} d] \quad (40)$$

假设系统初始状态为零且  $T > 0$ , 定义  $H_\infty$  性能指标  $J$  为

$$J = \int_0^T (e^T e - \gamma_1^2 d^T d + \dot{V}) dt - V_T = \int_0^T \left( \begin{bmatrix} e \\ d \end{bmatrix}^T \sum_{i=1}^{l_\sigma} \sum_{j=1}^{l_\zeta} \sum_{k=1}^{l_\zeta} \Xi_{ijk\varphi_1\varphi_2} \begin{bmatrix} e \\ d \end{bmatrix} \right) dt - V_T \quad (41)$$

其中

$$\Xi_{ijk} = \begin{bmatrix} \text{He} \{ P_o N_{ik} \} + I_n & P_o T_1 E_{ij} \\ \star & -\gamma_1^2 I_o \end{bmatrix}$$

由此可得,  $\int_0^T \|e\|^2 dt < \gamma_1^2 \int_0^T \|d\|^2 dt$  的一个充分条件是  $\Xi_{ijk} < 0$ 。

求解式(32)<sup>[25]</sup>, 可得出矩阵  $[T_1 \ T_2]$  的解为

$$[T_1 \ T_2] = \varpi + Y \beth \quad (42)$$

其中:

$$\varpi = \begin{bmatrix} I_n \\ C_1 \end{bmatrix}^\dagger, \beth = \left( I_{n+s} - \begin{bmatrix} I_n \\ C_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ C_1 \end{bmatrix}^\dagger \right)$$

$Y \in \mathbf{R}^{n \times (n+s)}$  为任意矩阵。因此,  $T_1$  和  $T_2$  可以得到:

$$T_i = (\varpi + Y \beth) \Omega_i, i = 1, 2 \quad (43)$$

其中:

$$\Omega_1 = \begin{bmatrix} I_n \\ 0_{s \times n} \end{bmatrix}, \Omega_2 = \begin{bmatrix} 0_{n \times s} \\ I_s \end{bmatrix}$$

定义  $Y = P_o Y$  和  $W_{ik} = P_o N_{ik}$ , 将式(43)代入式(40), 便可推出得到式(39)。

由于控制律和系统状态的物理限制,有必要对观测器增益矩阵施加一定的约束。因此可以设置  $N_{ij}N_{ij}^T < N_{\max}$ , 其中  $N_{\max} = NN^T > 0$ ,  $N$  为预定义的负定对角矩阵。考虑到定理 1 中的定义  $W_{ik} = P_o N_{ik}$ , 可建立如下不等式约束:

$$W_{ik}W_{ik}^T - P_o N_{\max} P_o^T < 0 \quad (44)$$

应用 Schur 补引理,上述不等式可转化为以下形式:

$$\begin{bmatrix} -P_o N_{\max} P_o^T & W_{ik} \\ \star & -I_n \end{bmatrix} < 0 \quad (45)$$

对于负定矩阵  $-P_o N_{\max} P_o^T$ , 存在预定义的常数  $\kappa_1$ , 使以下不等式成立<sup>[26]</sup>:

$$-P_o N_{\max} P_o^T \leq -\kappa_1 (P_o + P_o^T) + \kappa_1^2 N_{\max}^{-1} \quad (46)$$

应用 Schur 补引理,可得

$$\begin{bmatrix} -\kappa_1 (P_o + P_o^T) & W_{ik} & N^{-1} \\ \star & -I_n & 0 \\ \star & \star & -\frac{1}{\kappa_1^2} I_n \end{bmatrix} < 0 \quad (47)$$

$H_\infty$  性能指标  $\gamma_1$  的求解过程可转化为凸优化问题,即

$$\begin{aligned} & \min \gamma_1, \\ \text{s. t. } & \begin{bmatrix} \text{He}\{W_{ik}\} + I_n & U_{ij} \\ \star & -\gamma_1^2 I_o \end{bmatrix} < 0 \ \& \\ & \begin{bmatrix} -\kappa_1 (P_o + P_o^T) & W_{ik} & N^{-1} \\ \star & -I_n & 0 \\ \star & \star & -\frac{1}{\kappa_1^2} I_n \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (48)$$

观测器增益矩阵的计算步骤如下:

- Step 1** 根据式(43)计算  $\omega$  和  $\square$ ;
- Step 2** 通过求解凸优化问题(48)得出  $W_{ik}, Y, \gamma_1$ ;
- Step 3** 由式(43)推导  $T_1$  和  $T_2$ ;
- Step 4** 基于式(36),可得  $J_{ik} = (T_1 A_{ij} - N_{ik} T_1) C^\dagger$ ;
- Step 5** 根据式(37)计算  $H_{ik}$ 。

### 3.3 基于观测器的控制器设计

本文将设计基于状态观测的控制器。若状态  $x$  和前件变量  $\varepsilon$  不可测量,则控制器可表示为

$$u = \sum_{i=1}^{l_\sigma} \sum_{j=1}^{l_\zeta} h_i g_j K_{ij} \hat{x} \quad (49)$$

式中:  $\hat{x} = x - x_d = \tilde{x} - e$ ,  $\hat{x}$  为估计状态误差,  $x_d$  为期望状态向量,  $\tilde{x} = x - x_d$  为状态跟踪误差。针对 3-RSR 并联机构的运动控制,需保持上部平台静止,故取  $x_d = \dot{x}_d = 0$ , 后续分析中将不再考虑  $x_d$ 。

将  $u$  代入式(31),并将估计误差式(38)改写为

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \sum_{i=1}^{l_\sigma} \sum_{j=1}^{l_\zeta} \sum_{p=1}^{l_\sigma} \sum_{q=1}^{l_\zeta} h_i g_j h_p \hat{g}_q \cdot \\ & [ (A_{ij} + B_{ij} K_{pq}) \tilde{x} - B_{ij} K_{pq} e + \Phi_{ij} \eta ] \end{aligned} \quad (50)$$

$$\dot{e} = \sum_{i=1}^{l_\sigma} \sum_{j=1}^{l_\zeta} \sum_{k=1}^{l_\zeta} h_i g_j \hat{g}_k (N_{ik} e + T_1 E_{ij} d) \quad (51)$$

其中:

$$\Phi_{ij} = [A_{ij} \quad E_{ij}], \eta = [x_d^T \quad d^T]^T$$

对于式(50)~(51),定理 2 将给出其鲁棒性特性。

**定理 2** 对于  $\forall i, p = 1, \dots, l_\sigma, j, q = 1, \dots, l_\zeta$ , 如果存在标量  $\kappa_2 > 0, \gamma_2 > 0$  和矩阵  $P_{oc} = P_{oc}^T > 0 \in \mathbf{R}^{n \times n}, X = P_{oc}^{-1}, X = X^T > 0, M_{pq} = K_{pq} X$ , 使得不等式(52)成立,则式(50)鲁棒性稳定且满足性能指标  $\|\tilde{x}\|^2 \leq \gamma_2^2 (\|e\|^2 + \|\eta\|^2)$ , 即

$$\begin{bmatrix} \text{He} \left\{ \begin{matrix} A_{ij} X + \\ B_{ij} M_{pq} \end{matrix} \right\} & -B_{ij} M_{pq} & \Phi_{ij} & X & 0 \\ \star & -\kappa_2 \text{He}\{X\} & 0 & 0 & I_n \\ \star & \star & -\gamma_2^2 I_{n+o} & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & -I_n & 0 \\ \star & \star & \star & \star & -\frac{\gamma_2^2}{\kappa_2^2} I_n \end{bmatrix} < 0 \quad (52)$$

**证明** 给定 Lyapunov 函数  $V_{oc}(\tilde{x}) = \tilde{x}^T P_{oc} \tilde{x}$ , 其导数  $\dot{V}_{oc}$  为

$$\begin{aligned} \dot{V}_{oc}(\tilde{x}) &= \dot{\tilde{x}}^T P_{oc} \tilde{x} + \tilde{x}^T P_{oc} \dot{\tilde{x}} = \\ & \sum_{i=1}^{l_\sigma} \sum_{j=1}^{l_\zeta} \sum_{p=1}^{l_\sigma} \sum_{q=1}^{l_\zeta} h_i g_j h_p \hat{g}_q = \\ & [ \tilde{x}^T (A_{ij} + B_{ij} K_{pq})^T P_{oc} \tilde{x} - e^T K_{pq} B_{ij}^T P_{oc} \tilde{x} + \\ & \eta^T \Phi_{ij}^T P_{oc} \tilde{x} + \tilde{x}^T P_{oc} (A_{ij} + B_{ij} K_{pq}) \tilde{x} - \\ & \tilde{x}^T P_{oc} B_{ij} K_{pq} e + \tilde{x}^T P_{oc} \Phi_{ij} \eta ] \end{aligned} \quad (53)$$

假设系统初始状态为零且  $T > 0$ , 定义  $H_\infty$  性能指标  $J$  为

$$\begin{aligned} J &= \int_0^T \|\tilde{x}\|^2 dt - \gamma_2^2 \int_0^T (\|e\|^2 + \|\eta\|^2) dt + \dot{V}_{oc}(\tilde{x}) - \\ & V_T = \int_0^T \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ e \\ \eta \end{bmatrix}^T \sum_{i=1}^{l_\sigma} \sum_{j=1}^{l_\zeta} \sum_{p=1}^{l_\sigma} \sum_{q=1}^{l_\zeta} h_i g_j h_p \hat{g}_q \Phi_{ijpq} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ e \\ \eta \end{bmatrix} dt \end{aligned} \quad (54)$$

若满足  $\Phi_{ijpq} < 0$ , 则可保证不等式  $\int_0^T \|\tilde{x}\|^2 dt < \gamma_2^2 \int_0^T (\|e\|^2 + \|\eta\|^2) dt$  成立, 即式(50)的  $H_\infty$  性能指标得到满足, 即

$$\Psi_{ijpq} = \begin{bmatrix} \text{He} \left\{ \begin{matrix} P_{oc} A_{ij} + \\ P_{oc} B_{ij} K_{pq} \end{matrix} \right\} + I_n & -P_{oc} B_{ij} K_{pq} & P_{oc} \Phi_{ij} \\ \star & -\gamma_2^2 I_n & 0 \\ \star & \star & -\gamma_2^2 I_{n+o} \end{bmatrix} \quad (55)$$

应用 Schur 补引理, 可将上述不等式转换为

$$\begin{bmatrix} \text{He} \left\{ \begin{matrix} A_{ij} X + \\ B_{ij} M_{pq} \end{matrix} \right\} & -B_{ij} M_{pq} & \Phi_{ij} & X \\ \star & -\gamma_2^2 X^T X & 0 & 0 \\ \star & \star & -\gamma_2^2 I_{n+o} & 0 \\ \star & \star & \star & -I_n \end{bmatrix} < 0 \quad (56)$$

对于负定矩阵  $-\gamma_2^2 X^T X$ , 存在预定义的常数  $\kappa_2$ , 使得以下不等式成立<sup>[27]</sup>:

$$-\gamma_2^2 X^T X \leq -\kappa_2 (X^T + X) + (\kappa_2^2 / \gamma_2^2) I_n \quad (57)$$

代入式(56)后, 不等式(55)可改写为

$$\begin{bmatrix} \text{He} \left\{ \begin{matrix} A_{ij} X + \\ B_{ij} M_{pq} \end{matrix} \right\} & -B_{ij} M_{pq} & \Phi_{ij} & X \\ \star & \left\{ \begin{matrix} -\kappa_2 \text{He} \{X\} + \\ \frac{\gamma_2^2}{\kappa_2^2} I_n \end{matrix} \right\} & 0 & 0 \\ \star & \star & -\gamma_2^2 I_{n+o} & 0 \\ \star & \star & \star & -I_n \end{bmatrix} < 0 \quad (58)$$

再次应用 Schur 补引理, 最终得到:

$$\begin{bmatrix} \text{He} \left\{ \begin{matrix} A_{ij} X + \\ B_{ij} M_{pq} \end{matrix} \right\} & -B_{ij} M_{pq} & \Phi_{ij} & X & 0 \\ \star & -\kappa_2 \text{He} \{X\} & 0 & 0 & I_n \\ \star & \star & -\gamma_2^2 I_{n+o} & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & -I_n & 0 \\ \star & \star & \star & \star & -\frac{\gamma_2^2}{\kappa_2^2} I_n \end{bmatrix} < 0 \quad (59)$$

$H_\infty$  性能指标  $\gamma_2$  的求解可转化为凸优化问题:

$$\min \gamma_2,$$

$$\text{s.t.} \begin{bmatrix} \text{He} \left\{ \begin{matrix} A_{ij} X + \\ B_{ij} M_{pq} \end{matrix} \right\} & -B_{ij} M_{pq} & \Phi_{ij} & X & 0 \\ \star & -\kappa_2 \text{He} \{X\} & 0 & 0 & I_n \\ \star & \star & -\gamma_2^2 I_{n+o} & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & -I_n & 0 \\ \star & \star & \star & \star & -\frac{\gamma_2^2}{\kappa_2^2} I_n \end{bmatrix} < 0 \quad (60)$$

定理1和定理2分别证明了观测器与控制器的稳定性, 但需进一步验证观测器-控制器闭环系统的整体稳定性。为此, 定理3给出了式(50)~(51)的全局稳定性证明。

**定理3** 若对于  $\forall i = 1, \dots, l_\sigma, j, k = 1, \dots, l_\zeta$ , 式(38)是输入状态稳定的, 同时, 若对于  $\forall i, p = 1, \dots, l_\sigma, j, k, q = 1, \dots, l_\zeta$ , 式(50)~(51)是输入状态稳定的, 则整个系统是稳定的。

**证明** 选择 Lyapunov 函数为  $V_{oc}(\tilde{x}) = \tilde{x}^T P_{oc} \tilde{x}$ , 则存在实正常数  $\gamma_{oc1}$  和  $\gamma_{oc2}$ , 使得  $\gamma_{oc1} \|\tilde{x}\|^2 \leq V_{oc}(\tilde{x}) \leq \gamma_{oc2} \|\tilde{x}\|^2$ 。进一步计算  $V_{oc}$  的导数  $\dot{V}_{oc}$  为

$$\begin{aligned} \dot{V}_{oc}(\tilde{x}) &= \dot{\tilde{x}}^T P_{oc} \tilde{x} + \tilde{x}^T P_{oc} \dot{\tilde{x}} = \sum_{i=1}^{l_\sigma} \sum_{j=1}^{l_\zeta} \sum_{p=1}^{l_\sigma} \sum_{q=1}^{l_\zeta} h_i g_j h_p \hat{g}_q \cdot \\ & \left[ \tilde{x}^T (A_{ij} + B_{ij} K_{pq})^T P_{oc} \tilde{x} - e^T K_{pq}^T B_{ij}^T P_{oc} \tilde{x} + \right. \\ & \left. \eta^T \Phi_{ij}^T P_{oc} \tilde{x} + \tilde{x}^T P_{oc} (A_{ij} + B_{ij} K_{pq}) \tilde{x} - \right. \\ & \left. \tilde{x}^T P_{oc} B_{ij} K_{pq} e + \tilde{x}^T P_{oc} \Phi_{ij} \eta \right] \quad (61) \end{aligned}$$

对于  $\forall i = 1, \dots, l_\sigma, j, k = 1, \dots, l_\zeta$ , 可以得到以下不等式:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{oc}(\tilde{x}) &< - \sum_{i=1}^{l_\sigma} \sum_{j=1}^{l_\zeta} \sum_{p=1}^{l_\sigma} \sum_{q=1}^{l_\zeta} h_i g_j h_p \hat{g}_q (e^T K_{pq}^T B_{ij}^T P_{oc} \tilde{x} + \\ & \tilde{x}^T P_{oc} B_{ij} K_{pq} e) - \|x\|^2 + \gamma_{oc}^2 \|\eta\|^2 \quad (62) \end{aligned}$$

式中  $\gamma_{oc}$  为正常数。结合定理1中使用的 Lyapunov 函数  $V_o$ , 存在实正常数  $\gamma_{o1}$  和  $\gamma_{o2}$ , 使得  $\gamma_{o1} \|e\|^2 \leq V_o(e) \leq \gamma_{o2} \|e\|^2$ 。根据定理1中的不等式  $\dot{V}_o(e) + e^T e - \gamma_o^2 d^T d < 0$ , 可得

$$\dot{V}_o(e) < -\|e\|^2 + \gamma_o^2 \|d\|^2 < (1/\gamma_{o2}) V_o(e) + \gamma_o^2 \|d\|^2 \quad (63)$$

式中  $\gamma_o$  为正常数。进一步推导  $\dot{V}_{oc}(\tilde{x})$  的表达式为

$$\begin{aligned} \dot{V}_{oc}(\tilde{x}) &\leq 2 \sum_{i=1}^{l_\sigma} \sum_{j=1}^{l_\zeta} \sum_{p=1}^{l_\sigma} \sum_{q=1}^{l_\zeta} \|h_i g_j h_p \hat{g}_q P_{oc} B_{ij} K_{pq}\| \|x\| \|e\| - \\ & \|x\|^2 + \gamma_{oc}^2 \|\eta\|^2 \leq \\ & 2 \left( \sum_{i=1}^{l_\sigma} \sum_{j=1}^{l_\zeta} \sum_{p=1}^{l_\sigma} \sum_{q=1}^{l_\zeta} \|h_i g_j h_p \hat{g}_q P_{oc} B_{ij} K_{pq}\| \right)^2 \|e\|^2 - \\ & \frac{1}{2} \|x\|^2 + \gamma_{oc}^2 \|\eta\|^2 \leq \\ & -\frac{1}{2\gamma_{oc2}} V_{oc}(\tilde{x}) + \frac{2\bar{\alpha}}{\gamma_{o1}} V_o(e) + \gamma_{oc}^2 \|\eta\|^2 \quad (64) \end{aligned}$$

其中

$$\bar{\alpha} = \max \left( \sum_{i=1}^{l_\sigma} \sum_{j=1}^{l_\zeta} \sum_{p=1}^{l_\sigma} \sum_{q=1}^{l_\zeta} \|h_i g_j h_p \hat{g}_q P_{oc} B_{ij} K_{pq}\| \right)$$

由不等式(63)、(64)可知,  $V_o(e)$  是有界的, 并且:

$$\dot{V} \leq \Lambda V(\tilde{x}) + C \quad (65)$$

其中:

$$V = \begin{bmatrix} V_{oc}(\tilde{x}) \\ V_o(e) \end{bmatrix}, \tilde{x} = \begin{bmatrix} V_{oc}(\tilde{x}) \\ V_o(e) \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2\gamma_{oc2}} & \frac{2\bar{\alpha}}{\gamma_{o1}} \\ 0 & \frac{1}{\gamma_{o2}} \end{bmatrix} < 0, C = \begin{bmatrix} \gamma_{oc}^2 \| \eta \|^2 \\ \gamma_o^2 \| d \|^2 \end{bmatrix}$$

根据[0, Th. 4. 19], 式(65)确保了式(50) ~ (51)的输入状态稳定性。结合比较原理[0, Lemma 3. 4], 可证明式(50) ~ (51)是输入状态稳定的。

### 4 仿真试验

本文通过仿真验证所提观测器与控制器对

3-RSR并联机构的控制效果。

驱动连杆、从动连杆, 以及动平面  $\{P\}$  的质量分别定义为  $m_a$ 、 $m_b$  和  $m_c$ 。仿真中使用的 3-RSR 并联机构参数如下: 驱动连杆  $B_iM_i$  和从动连杆  $P_iM_i$  的质量均为  $m_a = m_b = 1$  kg; 动平面  $\{P\}$  的质量为  $m_c = 2$  kg;  $\Delta P_1P_2P_3$  的外接圆半径为  $r = 0.1$  m; 连杆  $B_iM_i$  和  $P_iM_i$  的长度为  $l = 0.095$  m。

由于机械结构的限制, 状态变量的范围易于确定, 具体见表 1。

根据表 1, 可得式(25)中每个子系统的矩阵  $A_{ij}$ 、 $B_{ij}$ 。矩阵  $A_{ij}$ 、 $B_{ij}$  和  $E_{ij}$  的具体形式展示在附件中。

表 1 状态变量的作用域

Tab. 1 Operation domain of state variables

变量	$x_p/m$	$y_p/m$	$z_p/m$	$\alpha/(^\circ)$	$\beta/(^\circ)$	$\dot{x}_p/(m \cdot s^{-1})$	$\dot{y}_p/(m \cdot s^{-1})$	$\dot{z}_p/(m \cdot s^{-1})$	$\dot{\alpha}/((^\circ) \cdot s^{-1})$	$\dot{\beta}/((^\circ) \cdot s^{-1})$
范围	$[-0.04, 0.04]$	$[-0.04, 0.04]$	$[0.07, 0.19]$	$[-30, 30]$	$[-30, 30]$	$[-0.03, 0.03]$	$[-0.03, 0.03]$	$[-0.03, 0.03]$	$[-20, 20]$	$[-20, 20]$

在观测器的设计过程中,  $H_\infty$  性能指标  $\gamma$  的大小通常用于衡量观测器的性能,  $\gamma$  越小, 观测器的性能越好。实验中, 将本文所设计的 TNL 型函数观测器与全阶观测器[0, Th. 1]、TNL 型观测器[0, Th. 1], 以及传统函数观测器[0, Th. 2]进行对比, 结果见表 2。

表 2  $H_\infty$  指数  $\gamma$  的比较

Tab. 2 Comparison of the  $H_\infty$  index  $\gamma$

观测器	全阶观测器	TNL 型观测器	传统函数观测器	TNL 型函数观测器
$\gamma$	$2.2076 \times 10^{-4}$	$4.5439 \times 10^{-5}$	$1.3428 \times 10^{-10}$	$2.5743 \times 10^{-13}$

从表 2 可以看出, 本文设计的 TNL 型函数观测器的  $H_\infty$  性能指标  $\gamma$  在 4 种观测器中最小, 因此该观测器的性能最优。

在  $\Delta t = 10 \sim 12$  s 内施加外部干扰  $d = -1$ 。可测量的前件变量为  $\sigma = \epsilon_3$ , 不可测量的前件变量为  $\zeta_1 = \epsilon_1, \zeta_2 = \epsilon_2$ 。相应的隶属度函数如下:

$$\begin{cases} h_1(\sigma) = h_\sigma \\ h_2(\sigma) = 1 - h_\sigma \end{cases} \quad (66)$$

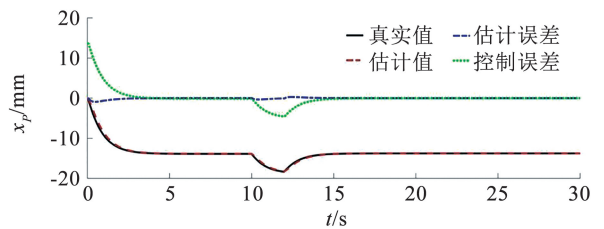
$$\begin{cases} g_1(\zeta_1, \zeta_2) = g_{\zeta_1} g_{\zeta_2} \\ g_2(\zeta_1, \zeta_2) = g_{\zeta_1} (1 - g_{\zeta_2}) \\ g_3(\zeta_1, \zeta_2) = (1 - g_{\zeta_1}) g_{\zeta_2} \\ g_4(\zeta_1, \zeta_2) = (1 - g_{\zeta_1}) (1 - g_{\zeta_2}) \end{cases} \quad (67)$$

其中:  $h_\sigma = \frac{\sigma_{1max} - \sigma_1}{\sigma_{1max} - \sigma_{1min}}$

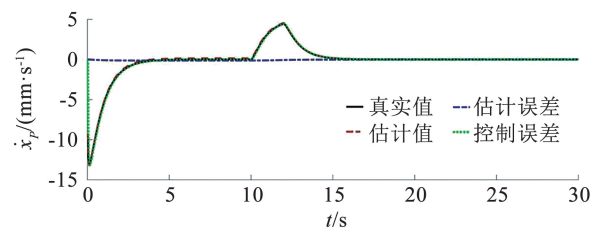
$g_{\zeta_1} = \frac{\zeta_{1max} - \zeta_1}{\zeta_{1max} - \zeta_{1min}}$

$g_{\zeta_2} = \frac{\zeta_{2max} - \zeta_2}{\zeta_{2max} - \zeta_{2min}}$

分别定义初始状态量和期望状态量:  $x = [0, 0, 80, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$ ,  $x_d = [-13.7597, 13.8654, 154.5785, -10, -10, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$ 。定理 1 和定理 2 中预定义的常量分别为  $\kappa_1 = 20$  和  $\kappa_2 = 30$ 。计算得到定理 1 和定理 2 中的决策变量分别为  $\gamma_1 = 2.5743 \times 10^{-13}$ ,  $\gamma_2 = 3.4472$ , 仿真结果见图 2 ~ 6。如图 7 所示为电机转角  $\theta$  和电机驱动力矩  $\tau$  的变化。电机转角在 5 s 内收敛, 即使在有干扰的情况下也能实现快速响应。电机的驱动力矩在 5 s 内逐渐增大, 当动平面  $\{P\}$  到达期望位置  $x_d$  时, 驱动力矩迅速趋近于 0。当受到干扰时, 驱动力矩仅有微小波动。



(a) x 方向位移



(b) x 方向速度

图 2 状态变量  $x_p$  及其导数  $\dot{x}_p$

Fig. 2 State variable  $x_p$  and its derivative  $\dot{x}_p$

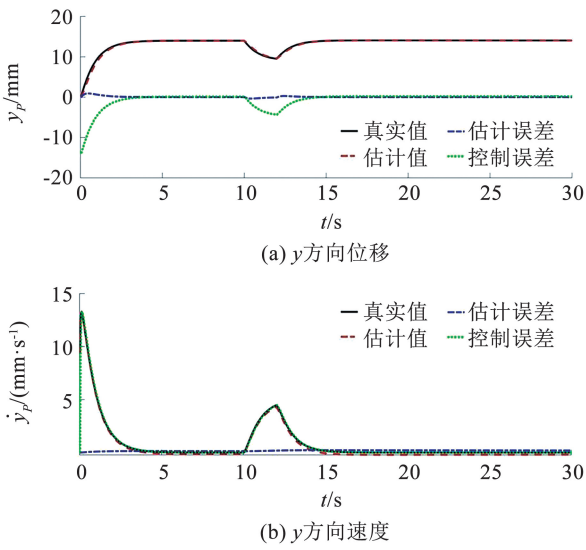


图3 状态变量  $y_p$  及其导数  $\dot{y}_p$

Fig. 3 State variable  $y_p$  and its derivative  $\dot{y}_p$

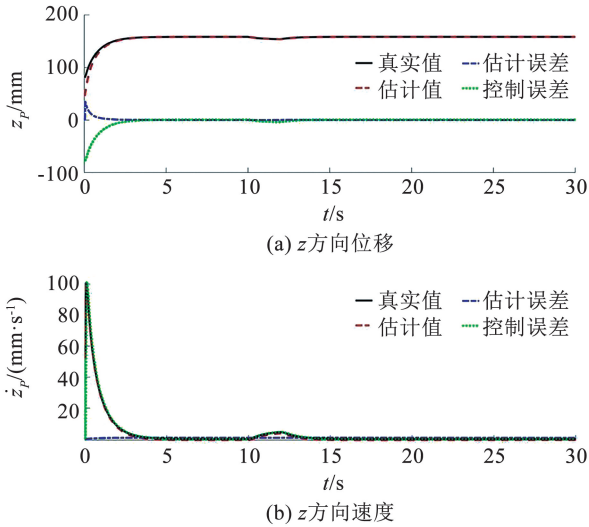


图4 状态变量  $z_p$  及其导数  $\dot{z}_p$

Fig. 4 State variable  $z_p$  and its derivative  $\dot{z}_p$

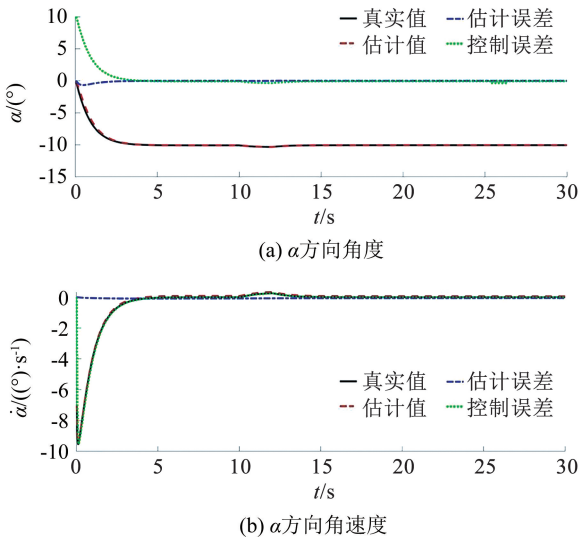


图5 状态变量  $\alpha$  及其导数  $\dot{\alpha}$

Fig. 5 State variable  $\alpha$  and its derivative  $\dot{\alpha}$

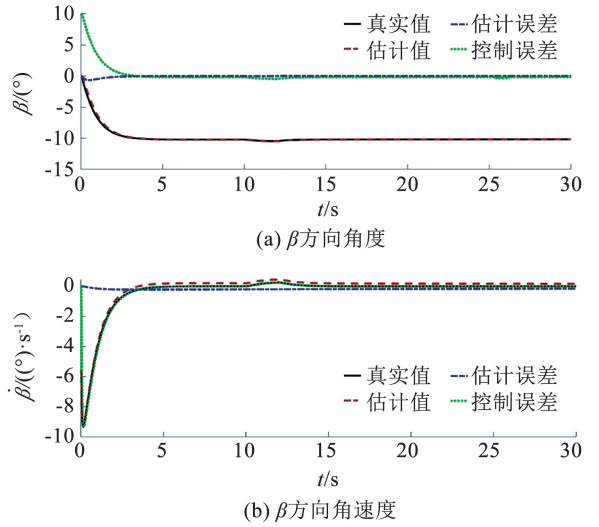


图6 状态变量  $\beta$  及其导数  $\dot{\beta}$

Fig. 6 State variable  $\beta$  and its derivative  $\dot{\beta}$

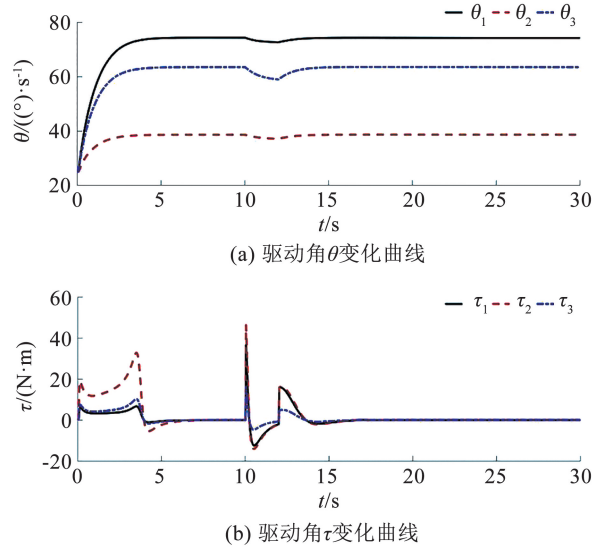
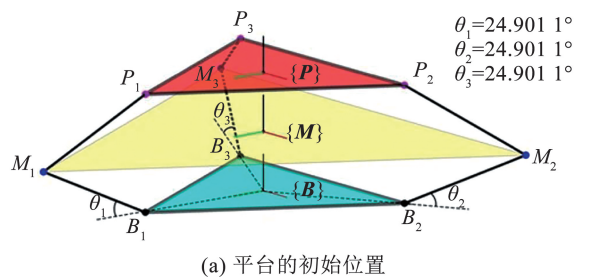


图7 电机转角  $\theta$  及驱动力矩  $\tau$

Fig. 7 Motor angle  $\theta$  and driving torque  $\tau$

平台的初始位置和最终位置见图8。在初始状态下,驱动角为  $\theta_i = 24.9011^\circ, i = 1, 2, 3$ , 在仿真结束时,驱动角为  $\theta_1 = 73.5354^\circ, \theta_2 = 38.4779^\circ, \theta_3 = 62.9741^\circ$ 。



(a) 平台的初始位置

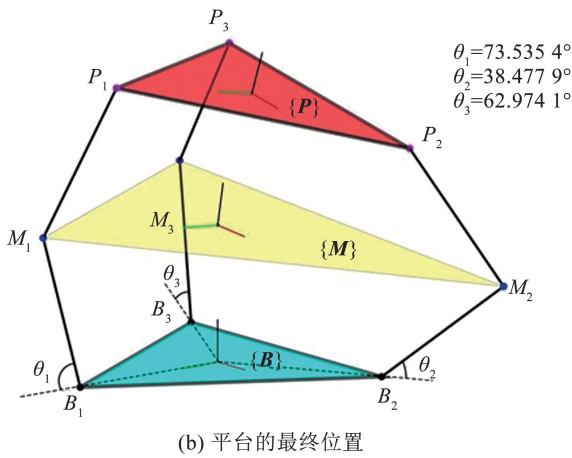


图 8 平台的始末位置

Fig. 8 Starting and ending positions of the platform

## 5 结 论

1) 通过结合秩约束方法, 显著降低了参数计算的复杂度, 同时提升了设计自由度。

2) 设计了新型 TNL 函数观测器, 提出了一种针对 UPVs 的鲁棒性处理框架, 通过放宽传统方法的保守性约束条件, 显著提升系统状态估计精度。

3) 首次提出将 TNL 函数观测器应用于 3-RSR 并联机构的控制中, 实现工程应用层面的创新。

4) 仿真试验验证表明, 所提出的控制策略在 3-RSR 并联机构中展现出优良的控制性能。

## 参 考 文 献

- [1] FOSSEN T I. Handbook of marine craft hydrodynamics and motion control[M]. 2nd ed. Hoboken: Wiley, 2021. DOI: 10.1002/9781119575016
- [2] HALVORSEN H S, OVERAAS H, LANDSTAD O, et al. Wave motion compensation in dynamic positioning of small autonomous vessels[J]. Journal of Marine Science and Technology, 2021, 26(3): 693. DOI: 10.1007/s00773-020-00765-y
- [3] LIANG Lihua, LE Zhiwen, ZHANG Songtao, et al. Modeling and controller design of an active motion compensated gangway based on inverse dynamics in joint space[J]. Ocean Engineering, 2020, 197: 106864. DOI: 10.1016/j.oceaneng.2019.106864
- [4] CHEN Weixing, WANG Shuyou, LI Jiang, et al. An ADRC-based triple-loop control strategy of ship-mounted Stewart platform for six-DOF wave compensation[J]. Mechanism and Machine Theory, 2023, 184: 105289. DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2023.105289
- [5] CAI Yunfei, ZHENG Shutao, LIU Weitian, et al. Sliding-mode control of ship-mounted Stewart platforms for wave compensation using velocity feedforward[J]. Ocean Engineering, 2021, 236: 109477. DOI: 10.1016/j.oceaneng.2021.109477
- [6] TAKAGI T, SUGENO M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 1985, SMC-15(1): 116. DOI: 10.1109/TSMC.1985.6313399
- [7] 张泽健, 黄显林, 班晓军, 等. 前提不匹配的 T-S 模糊系统的时滞相关镇定[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2013, 45(11): 1
- [8] ZHANG Zejian, HUANG Xianlin, BAN Xiaojun, et al. Delay-dependent stabilization of T-S fuzzy systems under imperfect premise matching[J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2013, 45(11): 1
- [9] 郑晶翔, 曹博, 毕树生, 等. 基于动态 T-S 模糊控制的视觉目标跟踪[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2019, 15(1): 178
- [10] ZHENG Jingxiang, CAO Bo, BI Shusheng, et al. Visual target tracking based on dynamic fuzzy-model control[J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2019, 15(1): 178. DOI: 10.11918/j.issn.0367-6234.201803093

- [9] WANG Xiaolei, YANG Guanghong.  $H_\infty$  observer design for fuzzy system with immeasurable state variables via a new Lyapunov function[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2020, 28(2): 236. DOI: 10.1109/TFUZZ.2019.2903762
- [10] GUERRA T M, ESTRADA-MANZO V, LENDEK Z. Observer design for Takagi-Sugeno descriptor models; an LMI approach[J]. Automatica, 2015, 52: 154. DOI: 10.1016/j.automatica.2014.11.008
- [11] LIU Chuang, LAM H K, FERNANDO T, et al.  $H_\infty$  Design of fuzzy functional observer-controller via higher order derivatives of Lyapunov function for nonlinear systems[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2017, 47(7): 1630. DOI: 10.1109/TCYB.2016.2554141
- [12] WANG Yingchun, ZHU Baopeng, ZHANG Huaguang, et al. Functional observer-based finite-time adaptive ISMC for continuous systems with unknown nonlinear function[J]. Automatica, 2021, 125: 109468. DOI: 10.1016/j.automatica.2020.109468
- [13] ISLAM S I, LIM C C, SHI Peng. Robust fault detection of T-S fuzzy systems with time-delay using fuzzy functional observer[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2020, 392: 1. DOI: 10.1016/j.fss.2019.03.020
- [14] WANG Zhenhua, RODRIGUES M, THEILLIOL D, et al. Actuator fault estimation observer design for discrete-time linear parameter-varying descriptor systems[J]. International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, 2015, 29(2): 242. DOI: 10.1002/acs.2469
- [15] WANG Zhenhua, LIM C C, SHEN Yi. Interval observer design for uncertain discrete-time linear systems[J]. Systems & Control Letters, 2018, 116: 41. DOI: 10.1016/j.sysconle.2018.04.003
- [16] WANG Zhenhua, SHEN Yi, ZHANG Xiaolei, et al. Observer design for discrete-time descriptor systems: an LMI approach[J]. Systems & Control Letters, 2012, 61(6): 683. DOI: 10.1016/j.sysconle.2012.03.006
- [17] WANG Zhenhua, DINH T N, ZHANG Qinghua, et al. Fast interval estimation for discrete-time linear systems; an L1 optimization method[J]. Automatica, 2022, 137: 110029. DOI: 10.1016/j.automatica.2021.110029
- [18] PAN Juntao, NGUYEN A T, GUERRA T M, et al. A unified framework for asymptotic observer design of fuzzy systems with unmeasurable premise variables[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2021, 29(10): 2938. DOI: 10.1109/TFUZZ.2020.3009737
- [19] HASSANI H, ZAREI J, CHADLI M, et al. Unknown input observer design for interval type-2 T-S fuzzy systems with immeasurable premise variables[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2017, 47(9): 2639. DOI: 10.1109/TCYB.2016.2602300
- [20] ZHOU Meng, CAO Zhengcai, ZHOU Mengchu, et al. Finite-frequency  $H^-/H^\infty$  fault detection for discrete-time T-S fuzzy systems with unmeasurable premise variables[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2021, 51(6): 3017. DOI: 10.1109/TCYB.2019.2915050
- [21] BEZZAOUCHA S, VOOS H, DAROUACH M. A new polytopic approach for the unknown input functional observer design[J]. International Journal of Control, 2018, 91(3): 658. DOI: 10.1080/00207179.2017.1288299
- [22] GUERRA T M, MÁRQUEZ R, KRUSZEWSKI A, et al.  $H_\infty$  LMI-based observer design for nonlinear systems via Takagi-Sugeno models with unmeasured premise variables[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2018, 26(3): 1498. DOI: 10.1109/TFUZZ.2017.2728522
- [23] XIE Wenbo, LIU Bing, BU Linwei, et al. A decoupling approach for observer-based controller design of T-S fuzzy system with unknown premise variables[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2021, 29(9): 2714. DOI: 10.1109/TFUZZ.2020.3006572
- [24] LENDEK Z, GUERRA T M, BABUŠKA R, et al. Stability analysis and nonlinear observer design using Takagi-Sugeno fuzzy models[M]. Berlin, Heidelberg: Springer, 2011. DOI: 10.1007/978-3-642-16776-8
- [25] STEWART J. Calculus: early transcendentals[M]. 9th ed. Boston: Cengage Learning, 2020
- [26] GUERRA T M, KRUSZEWSKI A, VERMEIREN L, et al. Conditions of output stabilization for nonlinear models in the Takagi-Sugeno's form[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2006, 157(9): 1248. DOI: 10.1016/j.fss.2005.12.006
- [27] LAM H K, LAUBER J. Membership-function-dependent stability analysis of fuzzy-model-based control systems using fuzzy Lyapunov functions[J]. Information Sciences, 2013, 232: 253. DOI: 10.1016/j.ins.2012.12.027