

DOI:10.11918/202207090

# 一种新的高斯双模态随机疲劳损伤分析方法

袁奎霖, 靳宏义

(大连理工大学 船舶工程学院, 大连 116024)

**摘要:** 为能够准确地对高斯双模态随机过程的疲劳损伤进行评估, 提出了一种名为改进频带法的疲劳损伤频域计算方法。该方法从功率谱分割的角度出发, 首先分别将低频模态和高频模态的功率谱密度函数分割成很多份极窄的频带, 利用损伤等效原则进行等效转换, 得到相应的等效窄带过程。然后, 将高频等效窄带过程向低频等效窄带过程再次进行等效转换。在此过程中, 为考虑低频模态与高频模态之间的相互作用, 引入与一个高、低频模态频率比、能量比以及 S-N 曲线材料参数  $m$  有关的修正因子对总零阶谱矩进行修正。最后, 利用窄带过程疲劳损伤解析解即可计算高斯双模态过程的总疲劳损伤。以时域雨流计数法计算的疲劳损伤结果作为基准, 分别采用理想矩形双模态谱和真实双模态谱进行数值试验, 将该方法与多种现有频域疲劳损伤分析方法进行了对比。研究表明, 提出的改进频带法与传统频域方法相比, 具有计算精度更高并且易于编程的优点, 该方法在实际工程应用中将具有很大的潜力。

**关键词:** 高斯随机过程; 双模态; 疲劳损伤; 改进频带法; 频域法; 数值试验

中图分类号: U661.43

文献标志码: A

文章编号: 0367-6234(2023)08-0135-08

## Development of a new frequency-domain method for fatigue damage assessment in bimodal Gaussian random processes

YUAN Kuilin, JIN Hongyi

(School of Naval Architecture Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

**Abstract:** To accurately evaluate the fatigue damage of bimodal Gaussian random process, a new frequency-domain analysis method called as the improved bands method was proposed. The basic idea of the proposed method was developed from the spectral decomposition approach. Firstly, the power spectrum density functions of low-frequency and high-frequency modes were split into a large number of infinitesimal frequency bands. According to the damage equivalence principle, the equivalent conversions were separately performed for the low-frequency and high-frequency components to obtain the corresponding equivalent narrow-band processes. Subsequently, another equivalent conversion from high-frequency equivalent narrow-band process to low-frequency mode was conducted. In order to account for the interaction between the low-frequency and high-frequency modes, a correction factor, which depends on characteristic frequency ratio, energy ratio and material parameter  $m$  of the S-N curves, was introduced to modify the summed zero-order spectral moment. When the final equivalent narrow-band process was obtained, the total damage of bimodal Gaussian process could be calculated by the analytical solution of narrow-band fatigue damage. Through numerical tests of ideal rectangular bimodal spectrum and real bimodal spectrum, by taking the fatigue damage estimated by time-domain rain-flow counting method as reference, the accuracy and robustness of the present method was validated against several popular frequency-domain methods. Results showed that the improved bands method is not only more accurate than other traditional frequency-domain methods but also easier to be implemented in computer programming, which also indicates its great potential in actual engineering practice.

**Keywords:** Gaussian random process; bimodal; fatigue damage; improved bands method; frequency-domain method; numerical tests

船舶与海洋工程结构物在服役期间遭受交变环境载荷作用, 疲劳破坏是其结构失效的主要模式之

一。目前, 疲劳损伤分析方法主要分为时域方法和频域方法。基于雨流计数法的时域方法计算精度高

收稿日期: 2022-07-21; 录用日期: 2022-10-24; 网络首发日期: 2023-07-03

网络首发地址: <https://kns.cnki.net/kcms2/detail/23.1235.T.20230703.1235.006.html>

基金项目: 国家自然科学基金(52001058)

作者简介: 袁奎霖(1987—), 男, 博士, 讲师

通信作者: 袁奎霖, [yuan\\_kuilin@dlut.edu.cn](mailto:yuan_kuilin@dlut.edu.cn)

且应用范围广,因此常被作为评价其他计算方法准确性的基准。然而,在实际工程应用中使用时域方法的计算代价往往过于庞大,与此相比,通过结构物的应力响应功率谱来计算疲劳损伤的频域方法则更为可行、有效<sup>[1-2]</sup>。

当结构的随机应力响应过程在频域下为窄带且服从高斯分布时,其应力幅值服从 Rayleigh 分布,疲劳损伤存在解析解。然而,对于宽带高斯随机应力过程,仍采用理想窄带假设方法计算疲劳损伤则难以保证准确性。因此,学者们提出了一系列近似方法进行宽带随机应力疲劳损伤的评估,例如 SM (single-moment) 方法<sup>[3]</sup>、Dirlik 方法<sup>[4]</sup>以及 TB (Tovobenasciutti) 方法<sup>[5]</sup>等。对于船海结构物,其结构应力响应在功率谱上常常呈现出两个分开的显著峰值即高斯双模态特征<sup>[6-8]</sup>。高斯双模态随机过程作为宽带随机过程的一种特例,需要专门处理此类问题的疲劳损伤频域计算方法。

目前,高斯双模态随机过程疲劳损伤频域分析方法中,最早的理论模型由 Jiao 等<sup>[9]</sup>提出,称为 JM 方法。JM 方法从雨流应力循环的角度出发,将疲劳损伤来源划分为大应力循环和小应力循环两个部分。在该理论框架下,Fu 等<sup>[10]</sup>改进了大、小循环的计数规则,认为大循环与小循环的总循环次数等于高频过程的循环次数,而大循环的循环次数则与低频过程循环次数相等,从而提出了 FC 方法。Benasciutti 等<sup>[11]</sup>对 FC 方法进行了修正,将大循环计数单独修正为 JM 法的计数规则。Low<sup>[12]</sup>通过引入相位角参数进一步反映了低频分量与高频分量间的相互作用,使得 Low 方法的精度较 JM 方法有了大幅提升,但该方法需要计算变上限三重积分,导致其难以在实际工程中得到广泛应用。

近年来,有学者<sup>[13-15]</sup>从功率谱分割的思想出发,提出了一系列新的高斯双模态疲劳损伤分析方法。Benasciutti 等<sup>[13]</sup>率先提出了功率谱分割法,即将功率谱离散为许多份足够窄的频带,认为每个窄带过程均为服从 Rayleigh 分布的理想窄带高斯随机过程,并利用 PbP (projection-by-projection) 准则对每个窄带过程的损伤进行组合来计算总疲劳损伤。Gao 等<sup>[14]</sup>指出基于 PbP 准则的功率谱分割法忽略了低频模态与高频模态间的耦合作用,通过引入模态耦合系数对原有功率谱分割法<sup>[13]</sup>进行了改进,提出 GZ 方法。类似于功率谱分割法,Braccesi 等<sup>[15]</sup>将功率谱离散后得到的各个窄带视作相互独立的随机变量,从随机变量叠加和损伤等效的角度出发提出了频带法 (Bands method, BM)。该方法的计算过程仅涉及零阶谱矩,便于编程且计算量少,适合在实

际工程中应用。

然而,采用现有频带法计算高斯双模态疲劳损伤时,由于未能考虑到有别于一般宽带过程的双模态特征,随着高频模态与低频模态能量比的降低和特征频率比的增大,频带法结果与雨流法结果的差异逐渐增大<sup>[15]</sup>。针对该问题,本文在频带法基础上考虑了双模态过程中高频模态与低频模态间的相互作用,提出了一种适用于高斯双模态随机疲劳损伤分析的改进频带法。首先,针对双模态过程中的高频模态和低频模态分别利用频带法进行等效转换得到相应的等效窄带过程。然后,将高频等效窄带过程向低频等效窄带过程再次进行等效转换,同时引入与频率比  $\gamma$ 、能量比  $\beta$  以及 S-N 曲线材料参数  $m$  有关的修正因子  $\mu$  对第 2 次等效过程中的高频零阶谱矩进行修正。最后,可利用基于窄带假设的疲劳损伤解析计算的等效窄带过程的疲劳损伤即高斯双模态随机过程的总疲劳损伤。

## 1 窄带高斯随机过程疲劳损伤分析基本理论

### 1.1 随机过程的谱参数

对于一个平稳高斯随机过程  $X(t)$  而言,其单边功率谱密度函数为  $S_{XX}(\omega)$ , 则其  $n$  阶谱矩定义如下:

$$\lambda_n = \int_0^{\infty} \omega^n \cdot S_{XX}(\omega) d\omega, n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

式中  $\omega$  为角频率, rad/s。谱矩可以对随机过程的带宽进行表征,工程中常用的 Vanmarcke 带宽系数  $\delta$ <sup>[16]</sup> 定义为

$$\delta = \sqrt{1 - \frac{\lambda_1^2}{\lambda_0 \lambda_2}} \quad (2)$$

式中  $\delta$  的取值范围为  $[0, 1.0]$ 。当  $\delta$  越趋近于 0 时,表明该随机过程越趋近于理想窄带随机过程,反之则为宽带随机过程。工程上一般认为  $\delta < 0.1$  时,可将一个随机过程近似看作窄带随机过程。

根据随机过程理论, $X(t)$  的平均跨零率  $\nu_0$  和平均峰值率  $\nu_p$  也可以利用谱矩进行表示:

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_0}}, \nu_p = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\lambda_4}{\lambda_2}} \quad (3)$$

### 1.2 理想窄带高斯随机过程的疲劳损伤解

根据 Palmgren-Miner 线性累积损伤理论,随机应力过程在作用时间  $T$  下的疲劳损伤可表示为

$$D = \frac{\nu_p \cdot T}{K} \int_0^{\infty} s^m \cdot f_s(s) ds \quad (4)$$

式中:  $\nu_p$  为单位时间内应力循环数,即平均峰值率;

$f_s(s)$  为应力范围  $S$  的概率密度函数;  $m$ 、 $K$  分别为 S-N 曲线中的材料参数, 其中  $N = K \cdot S^{-m}$ , 表示在应力范围在  $S$  这一水平下, 材料发生疲劳破坏所需的应力循环数为  $N$ 。

对于一个零均值窄带高斯随机过程  $X(t)$ , 其应力峰值服从 Rayleigh 分布, 且应力峰值和谷值在每一个循环中对称出现, 由此可知应力幅值  $R$  服从 Rayleigh 分布如下:

$$f_R(r) = \frac{r}{\lambda_0} \exp\left(-\frac{r^2}{2\lambda_0}\right) \quad (5)$$

由于应力范围  $S$  是应力幅值  $R$  的 2 倍, 也服从 Rayleigh 分布, 并且平均峰值率  $\nu_p$  等于平均跨零率  $\nu_0$ , 由式(4)、(5)可得时间  $T$  范围内的窄带疲劳损伤的解析解为

$$D = \frac{\nu_0 T}{K} (2 \sqrt{2\lambda_0})^m \Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right) \quad (6)$$

式中  $\Gamma(\cdot)$  为 gamma 函数。

## 2 基于改进频带法的高斯双模态疲劳损伤分析方法

### 2.1 频带法基本原理

Braccesi 等<sup>[15]</sup> 于 2015 年提出了一种基于频带法的疲劳损伤频域评估方法。将一个高斯随机过程的功率谱切分为  $n$  份足够窄的频带, 每一频带由其中心频率  $\omega_i$  表征, 其应力幅值服从 Rayleigh 分布, 并将它们看作是  $n$  个相互独立的随机变量。对于窄带随机过程, 平均跨零率  $\nu_{0i}$  与其中心频率  $\omega_i$  之间关系为  $\nu_{0i} = \omega_i/2\pi$ , 每一个窄带频段的平均跨零率  $\nu_{0i}$  都不相同。因此需要将这些窄带过程按照一定规则进行等效转换后, 计算等效过程的零阶谱矩再进行叠加得到一个总的零阶谱矩, 进而可利用基于窄带假设的解析解计算总疲劳损伤。

由于每个窄带的中心频率并不相等, 在进行零阶谱矩加和之前需要将这些窄带的中心频率  $\omega_i$  “移动”至某一固定频率处, 即参考频率  $\omega_r$ 。由 Braccesi 等<sup>[15]</sup> 的研究可知, 该参考频率可任意取值且对计算结果无影响。如图 1 所示, 根据损伤等效原则将第  $i$  个窄带频段中心频率  $\omega_i$  移动至参考频率  $\omega_r$  后, 存在如下关系:

$$d_i = \frac{2^{m/2} \cdot T}{K} \Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right) \nu_{0i} \lambda_{0i}^{m/2} = \frac{2^{m/2} \cdot T}{K} \Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right) \nu_{0r} \lambda_{0ri}^{m/2} \quad (7)$$

式中:  $\nu_{0i}$ 、 $\lambda_{0i}$  分别为第  $i$  个窄带的平均跨零率和零阶谱矩,  $\nu_{0r}$  为在参考频率处等效频带的平均跨零率,

$\lambda_{0ri}$  为第  $i$  个窄带等效后的零阶谱矩。由式(7)可得

$$\lambda_{0ri} = \left(\frac{\nu_{0i}}{\nu_{0r}}\right)^{2/m} \lambda_{0i} \quad (8)$$

考虑  $\nu_{0i} = \omega_i/2\pi$  和  $\nu_{0r} = \omega_r/2\pi$ , 式(8)可改写为

$$\lambda_{0ri} = \left(\frac{\omega_i}{\omega_r}\right)^{2/m} \lambda_{0i} \quad (9)$$

对每一个窄带频段进行上述等效操作之后, 可得到一个中心频率为参考频率  $\omega_r$  且零阶谱矩为等效零阶谱矩总和  $\lambda_{0r}$  的等效窄带过程, 如图 1 所示。等效窄带过程的零阶谱矩可由下式计算:

$$\lambda_{0r} = \sum_i \lambda_{0ri} = \sum_i \left(\frac{\nu_{0i}}{\nu_{0r}}\right)^{2/m} \lambda_{0i} \quad (10)$$

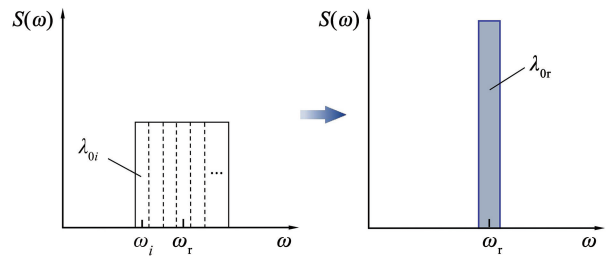


图 1 频带法示意图

Fig. 1 Schematic illustration of the bands method

将式(10)代入式(6)可得到等效窄带过程的疲劳损伤为

$$D = \frac{\nu_{0r} T}{K} (2 \sqrt{2\lambda_{0r}})^m \Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right) \quad (11)$$

### 2.2 改进频带法

对于双模态功率谱, 当高频模态和低频模态中心频率相距较远或存在宽带模态时, 整个功率谱的带宽系数会较大, 采用现有频带法进行损伤等效转换而产生的误差会明显增大。因此, 本文在原有频带法的基础上, 通过引入修正因子以考虑双模态过程中高频模态与低频模态之间的相互作用, 从而提出改进频带法。

改进频带法的具体计算步骤如下: 首先, 采用频带法分别对双模态功率谱中的低频模态和高频模态进行第 1 次等效转换, 计算它们的等效窄带过程零阶谱矩  $\lambda_{0r}^{LF}$  和  $\lambda_{0r}^{HF}$ , 如图 2 所示; 然后, 将等效后中心频率为  $\omega_r^{HF}$  的高频窄带过程向低频等效窄带过程再进行一次等效转换, 即将高频模态的等效零阶谱矩  $\lambda_{0r}^{HF}$  由中心频率  $\omega_r^{HF}$  移动至  $\omega_r^{LF}$ , 与此同时乘以一个修正因子  $\mu$ , 从而得到一个可代替原双模态过程的总的等效窄带过程 (如图 2 所示), 其零阶谱矩  $\lambda_{0, total}$  的计算如式(12); 最后, 将式(12)代入窄带疲劳损伤闭合解式(6)中, 即可计算双模态随机过程的总疲劳损伤值为:

$$\lambda_{0, \text{total}} = \lambda_{0r}^{\text{LF}} + \lambda_{0r}^{\text{LF\&HF}} = \lambda_{0r}^{\text{LF}} + \left(\frac{\nu_{0r}^{\text{HF}}}{\nu_{0r}^{\text{LF}}}\right)^{2/m} \cdot \lambda_{0r}^{\text{HF}} \cdot \mu \quad (12)$$

$$D_{\text{total}} = \frac{\nu_{0r}^{\text{LF}} T}{K} (2 \sqrt{2 \lambda_{0, \text{total}}})^m \Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right) \quad (13)$$

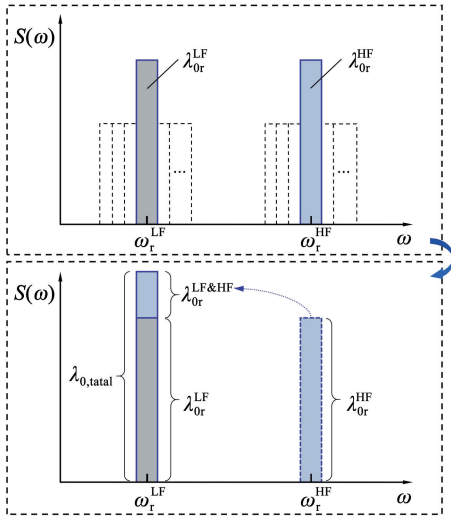


图 2 针对双模态过程的改进频带法示意图

Fig. 2 Illustration of the improved bands method proposed for bimodal process

### 2.3 修正因子 $\mu$ 的确定

通过理论推导得到修正因子  $\mu$  的具体表达式是十分困难的。因此,本文以高、低频模态均为矩形谱的双模态随机过程为研究对象(如图 3 所示),通过时域模拟结果拟合修正因子  $\mu$  的近似表达式。其中,  $\omega_c^{\text{LF}}$ 、 $\omega_c^{\text{HF}}$  分别为低频模态和高频模态的中心频率,  $\lambda_0^{\text{LF}}$ 、 $\lambda_0^{\text{HF}}$  则分别为其 0 阶谱矩。定义高、低频模态间的频率比  $\gamma = \omega_c^{\text{HF}} / \omega_c^{\text{LF}}$ , 能量比  $\beta = \lambda_0^{\text{HF}} / \lambda_0^{\text{LF}}$ 。基于双模态功率谱特征和疲劳损伤相关理论,修正因子  $\mu$  主要与频率比  $\gamma$ 、能量比  $\beta$  以及 S-N 曲线中材料参数  $m$  相关。因此,针对 3 个参数选取不同数值进行组合,通过逆傅里叶变换法模拟生成大量的高斯双模态随机时间序列。采用时域方法计算雨流损伤值,将其代入式(13)左侧反推出相应的  $\mu$  值,再由非线性拟合方法得到修正因子  $\mu$  的经验表达式。

本文以船舶与海洋工程结构为研究对象,选取

的特征参数  $\gamma$ 、 $\beta$  和  $m$  的具体取值如下:  $\gamma = 3, 4, 5, \dots, 15$ ,  $\beta = 0.1, 0.2, \dots, 1.0, 2.0, \dots, 10.0$ ,  $m = 3, 4, 5$ 。需要指出,在已往研究中发现,采用由理想矩形双模态功率谱确定修正因子  $\mu$  时,需要根据计算工况中的高频模态是窄带过程或是宽带过程进行区分。对于计算工况为“窄带低频 + 窄带高频”和“宽带低频 + 窄带高频”两种情况,采用双窄带功率谱拟合修正因子  $\mu$ , 其中高频和低频模态的 Vanmarcke 带宽系数均设为 0.03 以保证其满足窄带假设。对于计算工况为“窄带低频 + 宽带高频”和“宽带低频 + 宽带高频”的情况,则采用高频和低频模态的 Vanmarcke 带宽系数均设为 0.3 的双宽带功率谱进行拟合。

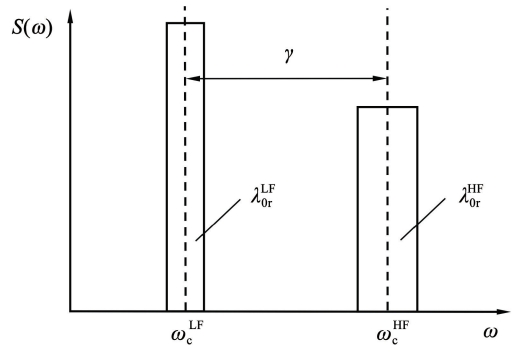


图 3 理想矩形双模态功率谱

Fig. 3 Ideal rectangular bimodal power spectral

在建立  $\mu$  值与特征参数  $\gamma$ 、 $\beta$  和  $m$  之间的关系式时,参考 Gao 等<sup>[14]</sup>的工作,在固定材料参数  $m$  的前提下建立修正因子  $\mu$  以  $\gamma$  和  $\beta$  为自变量的函数式如下:

$$\mu = [P_1 + P_2 \cdot \ln(\gamma) + P_3 \cdot \ln(\beta) + P_4 \cdot [\ln(\gamma)]^2 + P_5 \cdot [\ln(\beta)]^2 + P_6 \cdot \ln(\gamma) \cdot \ln(\beta)] / [1 + P_7 \cdot \ln(\gamma) + P_8 \cdot \ln(\beta) + P_9 \cdot [\ln(\gamma)]^2 + P_{10} \cdot [\ln(\beta)]^2 + P_{11} \cdot \ln(\gamma) \cdot \ln(\beta)] \quad (14)$$

式中,  $P_1 \sim P_{11}$  为 11 个待定拟合系数。此外,当材料参数  $m$  不同时,  $\mu$  与  $\gamma$  和  $\beta$  的非线性关系是存在差异的,拟合系数  $P_1 \sim P_{11}$  也相应有所变化。因此针对高频模态为窄带或是宽带,不同  $m$  值对应的拟合系数  $P_1 \sim P_{11}$  的数值见表 1。在船舶与海洋工程结构物领域,  $m = 3, 4, 5$  为较为常见的 S-N 曲线材料参数。

表 1 拟合系数  $P_1$  至  $P_{11}$

Tab. 1 Fitted coefficients  $P_1$  to  $P_{11}$

$P_i$	窄带高频			宽带高频		
	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$
$P_1$	1.118 00	1.112 00	1.108 00	1.021 00	0.984 10	0.927 00
$P_2$	-0.581 80	-0.630 80	-0.630 10	-0.289 00	-0.225 10	-0.099 82
$P_3$	0.194 70	0.121 30	0.064 09	0.120 40	0.113 20	0.126 60
$P_4$	0.136 90	0.137 20	0.127 40	0.196 40	0.152 40	0.153 60

续表 1

$P_i$	窄带高频			宽带高频		
	$m=3$	$m=4$	$m=5$	$m=3$	$m=4$	$m=5$
$P_5$	0.056 59	0.052 94	0.044 20	0.073 12	0.086 18	0.118 90
$P_6$	0.031 04	0.037 33	0.038 09	0.169 20	0.154 10	0.187 40
$P_7$	-0.497 90	-0.555 50	-0.562 20	-0.355 30	-0.330 10	-0.259 30
$P_8$	0.234 10	0.168 90	0.117 80	0.152 40	0.147 70	0.145 80
$P_9$	0.124 20	0.128 20	0.121 00	0.212 50	0.175 90	0.181 30
$P_{10}$	0.052 50	0.046 15	0.035 35	0.067 72	0.077 99	0.109 70
$P_{11}$	0.018 31	0.022 46	0.022 95	0.166 70	0.159 10	0.211 10
决定系数 $R^2$	0.999 30	0.998 70	0.997 20	0.999 90	0.999 90	0.999 70

### 3 算例验证

#### 3.1 理想双模态矩形谱

本文先以理想矩形双模态功率谱为算例,以时域方法计算雨流损伤值作为参考值对本文提出的改进频带法进行计算精度验证,并与 Low 法<sup>[12]</sup>、GZ 法<sup>[14]</sup>、TB 法<sup>[5]</sup>以及频带法(BM 法)<sup>[15]</sup>进行对比。如修正因子  $\mu$  的确定中提到,窄带高频的修正因子  $\mu$  对于“窄带低频+窄带高频”和“宽带低频+窄带高频”两种情况是同样适用的,而宽带高频的修正因子  $\mu$  适用于“窄带低频+宽带高频”和“宽带低频+宽带高频”的组合,即两组修正因子对于低频为窄带或宽带过程并不敏感。由于篇幅考虑,本文仅展示“窄带低频+窄带高频”和“宽带低频+宽带高频”两种双模态矩形谱的验证结果。

对于“窄带低频+窄带高频”的双模态矩形谱验证算例,低频和高频模态的 Vanmarcke 带宽系数设为  $\delta_{LF} = \delta_{HF} = 0.052 4$ 。图 4 给出了 S-N 曲线材料系数  $K=1$ ,  $m=3$  和  $m=5$ , 频率比  $\gamma=3, 6, 9$ , 能量比  $\beta=0.1, 0.5, 1.0, 2.0, 5.0, 10.0$  的“窄带低频+窄带高频”双模态矩形谱各频域方法与时域雨流法结果的相对误差。相对误差的定义为

$$\rho = \left( \frac{D - D_{RFC}}{D_{RFC}} \right) \times 100\% \quad (15)$$

式中,  $D$ 、 $D_{RFC}$  分别为频域方法和时域雨流法所计算得到的疲劳损伤值。

由图 4 可知,当  $m=3$  时,由于频带法忽略了高频与低频间的相互作用,其在能量比  $\beta=0.10$  时的计算误差与其他方法相比要大的多。相比之下,本文所提出的改进频带法在计算精度上有显著提升,且与 Low 法和 GZ 法精度相当。此外,作为通用宽带谱方法的 TB 法在处理双模态问题时精度略差。当  $m=5$  时,因为疲劳损伤与应力循环的非线性关系会随着  $m$  的增大而增强,此时 TB 法与频带法的误差都明显增大。同样,Low 法的精度与  $m=3$  时相比略微下降。只有 GZ 法和本文的改进频带法依

然保持较好的计算精度,最大误差均在 3% 以内。

对于“宽带低频+宽带高频”的双模态矩形谱验证算例,低频和高频模态的 Vanmarcke 带宽系数分别设为  $\delta_{LF} = 0.148 0$  和  $\delta_{HF} = 0.256 4$ 。图 5 展示了 S-N 曲线材料系数  $K=1$ ,  $m=3$  和  $m=5$ , 频率比  $\gamma=3, 6, 9$ , 能量比  $\beta=0.1, 0.5, 1.0, 2.0, 5.0, 10.0$  的“宽带低频+宽带高频”双模态矩形谱的分析结果,其中 GZ ( $M=4$ ) 表示采用 GZ 方法处理高频模态时需要划分 4 个子模态<sup>[14]</sup>。

由图 5 可知,当  $m=3$  时,频带法在能量比  $\beta \leq 1.0$  时的计算误差仍是 5 种方法中最大的,最大误差达到了 -16%。尽管 Low 法是基于双窄带假设推导的,但是对于双宽带工况在  $m=3$  时,依然保持较为准确的精度,最大误差约为 -9%。TB 法的计算精度尚可,误差均在 7% 以内。参照 Gao 等<sup>[14]</sup>,采用 GZ 法时将宽带高频模态划分为 4 个子模态后,可以得到非常准确的计算结果,绝大多数误差都在 3% 以内。相比于其他 4 种方法,本文提出的改进频带法的计算精度最好,误差均在 1% 以内。当  $m=5$  时,Low 法、TB 法和频带法与雨流法相比均出现了较大的偏差,最大误差分别为 -19%、-22% 和 -28%。GZ 法的计算结果依然保持很好的精度,绝大部分结果误差控制在 5% 以内,最大误差也未超过 8%。相比之下,改进频带法对于双宽带工况依然保持良好的精度,最大误差未超过 2%。

#### 3.2 真实双模态应力谱

由于理想双模态矩形谱和真实双模态应力谱仍存在一定的差异,因此有必要选取船舶与海洋工程结构遭受的一些真实响应谱对本文所提出方法的有效性进一步进行验证。第 1 个算例为如图 6 所示的“佛蒂尼”号远洋散货船实船测得的应力响应谱<sup>[7]</sup>,其中包含了两个比较明显的峰值,第 1 个峰值对应波频响应,第 2 个峰值为该船的二阶共振频率。该功率谱中双模态的参数信息见表 2,其中低频模态带宽系数  $\delta_{LF} = 0.344 7$ ,高频模态带宽系数  $\delta_{HF} = 0.076 1$ 。因此,该双模态功率谱为“宽带低频+窄

带高频”的组合,应采用修正因子  $\mu$  的确定中窄带高频对应的修正因子  $\mu$ 。分别采用改进频带法、Low 法、GZ 法、TB 法以及频带法对实测应力谱进行疲劳损伤评估,各方法计算结果与雨流法结果的误差见

表 3。可以看出在  $m = 3, 4, 5$  时,Low 方法、GZ 法和改进频带法的计算结果与雨流法结果非常接近,相对误差均在 1% 以内,优于 TB 法和频带法。

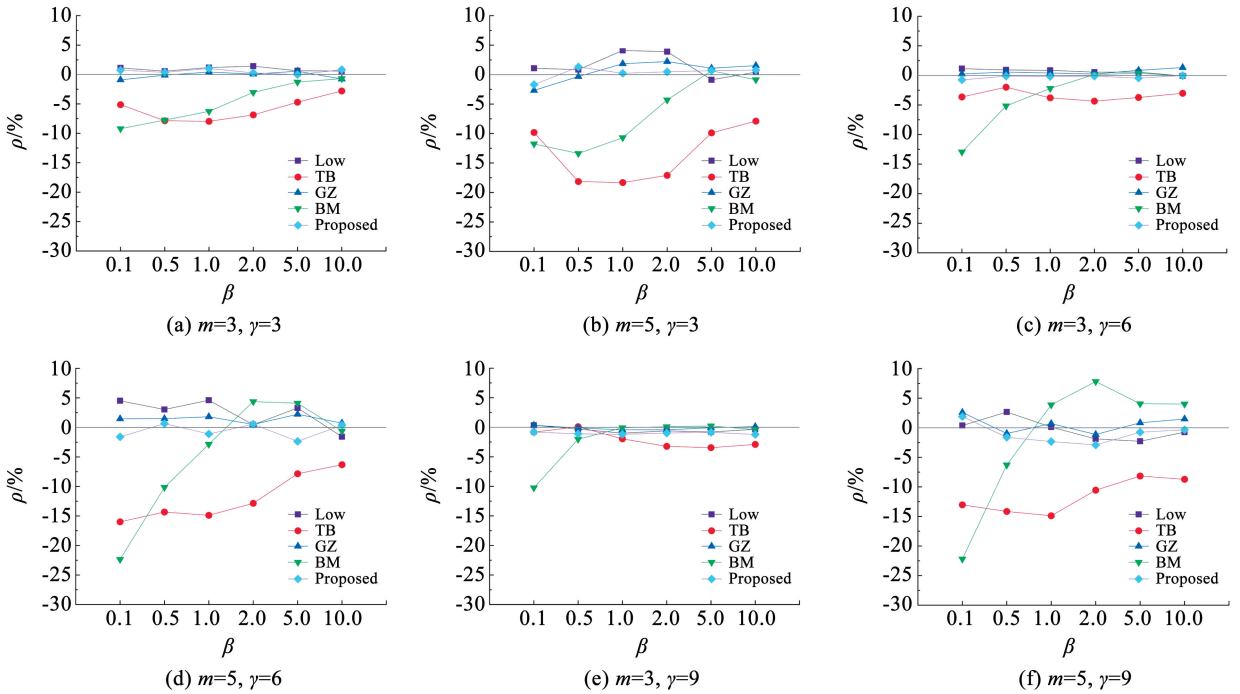


图 4 窄带低频 + 窄带高频矩形谱下各方法计算结果相对于雨流法的相对误差

Fig. 4 Relative errors of different methods compared with RFC method for NB-LF & NB-HF rectangular spectra

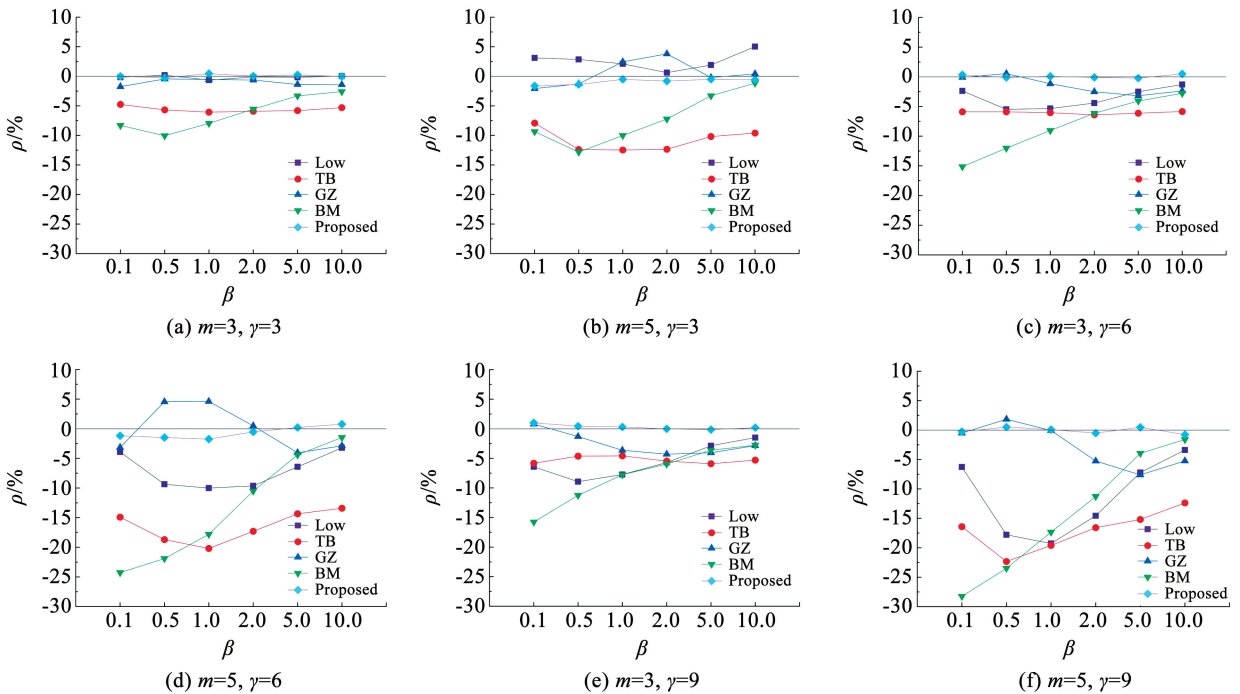


图 5 宽带低频 + 宽带高频矩形谱下各方法计算结果相对于雨流法的相对误差

Fig. 5 Relative errors of different methods compared with RFC method for WB-LF & WB-HF rectangular spectra

第 2 个算例为如图 7 所示的某海洋工程结构的双模态响应谱<sup>[8]</sup>,低频模态对应涌浪响应,高频模态对应波频响应。该功率谱中双模态的参数信息见

表 2,其中低频模态带宽系数  $\delta_{LF} = 0.090 2$ ,高频模态带宽系数  $\delta_{HF} = 0.319 5$ 。因此,该双模态功率谱为“窄带低频 + 宽带高频”的组合,应采用修正因子

$\mu$  的确定中宽带高频对应的修正因子  $\mu$ 。表 4 给出了当  $m = 3, 4, 5$  时, Low 法、TB 法、GZ 法、频带法以及改进频带法的计算结果与雨流法结果的对比误差。可以看出, 对于该工况 Low 法的计算误差在 5 种方法中是最大的, 最大误差已达到  $-22.97\%$ 。与 Low 法相比, TB 法和频带法的计算精度略好, 最大误差分别为  $-11.59\%$  和  $-7.21\%$ 。GZ 法和改进频带法给出的结果仍然与雨流结果非常接近, 相对误差均在 3% 以内。

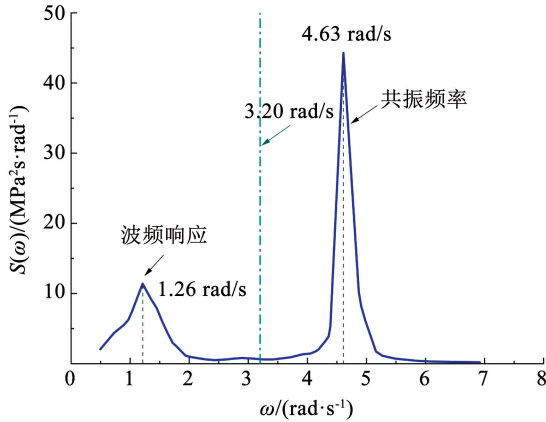


图 6 大型船舶弹振响应双模态谱<sup>[7]</sup>

Fig. 6 Bimodal response spectrum of a large cargo induced by springing<sup>[7]</sup>

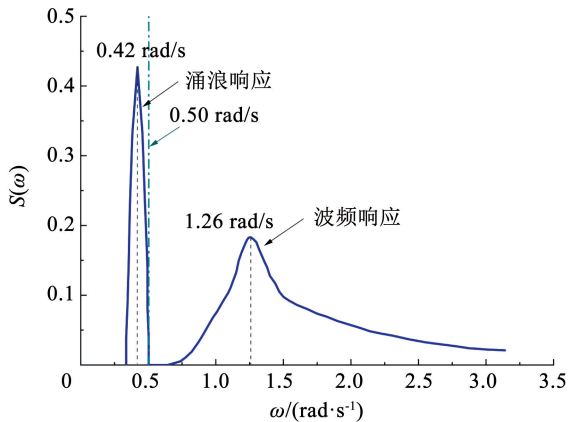


图 7 涌浪和波频响应双模态谱<sup>[8]</sup>

Fig. 7 Bimodal spectrum composed of a swell response and a wind sea response<sup>[8]</sup>

表 2 功率谱中各模态参数信息

Tab. 2 Spectral characteristics of each mode in spectrum

参数	算例 1		算例 2	
	低频模态	高频模态	低频模态	高频模态
特征频率/ (rad·s <sup>-1</sup> )	1.26	4.63	0.42	1.26
频率范围/ (rad·s <sup>-1</sup> )	[0.51, 3.20]	[3.20, 6.85]	[0.33, 0.50]	[0.50, 3.15]
Vanmarcke 带宽	0.344 7	0.076 1	0.090 2	0.319 5

表 3 算例 1 中各频域方法结果相对于雨流法结果的相对误差

Tab. 3 Relative errors of different methods in Case 1 %

m	Low	TB	GZ	BM	Proposed
3	-0.54	-6.77	-0.92	-3.48	-0.22
4	0.27	-11.81	-0.56	-3.83	-0.12
5	0.24	-17.44	-1.18	-5.03	-0.58

表 4 算例 2 中各频域方法结果相对于雨流法结果的相对误差

Tab. 4 Relative errors of different methods in Case 2 %

m	Low	TB	GZ (m = 4)	BM	Proposed
3	-22.97	-5.53	-2.62	-6.15	-1.61
4	-22.47	-9.30	-2.80	-7.21	-2.41
5	-21.54	-11.59	-2.46	-7.11	-2.62

## 4 结 论

1) 现有频带法在计算高斯双模态随机过程疲劳损伤时仍然保持一定的准确性。但当双模态过程的能量比变小和频率比变大时, 该方法与雨流结果之间的误差逐渐增大, 最大误差可达到  $-30\%$  左右。

2) 与现有频带法相比, 本文提出的改进频带法通过引入与频率比、能量比以及 S-N 曲线材料参数  $m$  有关的修正因子  $\mu$  对计算结果进行修正使其与雨流结果更加接近, 计算精度明显提高。

3) 对于高斯双模态随机过程, 改进频带法中修正因子  $\mu$  的经验公式适用范围为频率比  $\gamma = 3 \sim 15$ , 能量比  $\beta = 0.1 \sim 10.0$  和 S-N 曲线材料参数  $m = 3, 4, 5$ 。通过大量数值试验对改进频带法的有效性进行了验证, 并与 Low 法、TB 法、GZ 法以及频带法进行对比, 结果表明本文提出的新方法具有精度高、适用性强的优点, 并且理论简单、易于编程实现。

## 参考文献

[1] 康海贵, 田茂金, 龙丽吉, 等. 基于谱分析方法的海上风机支撑结构疲劳寿命分析[J]. 可再生能源, 2013, 31(7): 41  
KANG Haigui, TIAN Maojin, LONG Liji, et al. Spectral-based fatigue analysis of a support structure for offshore wind turbines[J]. Renewable Energy Resources, 2013, 31(7): 41. DOI:10.13941/j.cnki.21-1469/tk.2013.07.009

[2] 秦培江, 马永亮, 韩超帅, 等. 海上风机支撑结构的频域疲劳评估方法研究[J]. 浙江大学学报(工学版), 2017, 51(9): 1712  
QIN Peijiang, MA Yongliang, HAN Chaoshuai, et al. Frequency-domain fatigue assessment of support structure for offshore wind turbine[J]. Journal of Zhejiang University (Engineering Science), 2017, 51(9): 1712. DOI:10.3785/j.issn.1008-973X.2017.09.005

[3] LARSEN C E, LUTES L D. Predicting the fatigue life of offshore structures by the single-moment spectral method[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 1991, 6(2): 96. DOI: 10.1016/0266-8920(91)90023-W

[4] DIRLIK T. Application of computers in fatigue analysis [D].

- Coventry, West Midlands, UK: University of Warwick, 1985
- [5] BENASCIUTTI D, TOVO R. Spectral methods for lifetime prediction under wide-band stationary random processes [J]. *International Journal of Fatigue*, 2005, 27(8): 867. DOI:10.1016/j.ijfatigue.2004.10.007
- [6] 郑向远, 高山, 李炜. 一种新的高斯多模态随机疲劳损伤频域分析方法[J]. *哈尔滨工业大学学报*, 2020, 52(10): 85  
ZHENG Xiangyuan, GAO Shan, LI Wei. A new frequency-domain method for analysis of Gaussian multi-modal random fatigue damage [J]. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 2020, 52(10): 85. DOI:10.11918/201908054
- [7] STIANSEN S G, MANSOUR A E. Ship primary strength based on statistical data analysis[C]// Annual Meeting of the Society of Naval Architects and Marine Engineers. New York: Society of Naval Architects and Marine Engineers, 1975
- [8] OLAGNON M, GUÉDÉ Z. Rainflow fatigue analysis for loads with multimodal power spectral densities [J]. *Marine Structures*, 2008, 21(2/3): 160. DOI:10.1016/j.marstruc.2007.12.004
- [9] JIAO G, MOAN T. Probabilistic analysis of fatigue due to Gaussian load processes [J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 1990, 5(2): 76. DOI: 10.1016/0266-8920(90)90010-H
- [10] FU T T, CEBON D. Predicting fatigue lives for bi-modal stress spectral densities [J]. *International Journal of Fatigue*, 2000, 22(1): 11. DOI:10.1016/S0142-1123(99)00113-9
- [11] BENASCIUTTI D, TOVO R. On fatigue damage assessment in bimodal random processes [J]. *International Journal of Fatigue*, 2007, 29(2): 232. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2006.03.013
- [12] LOW Y M. A method for accurate estimation of the fatigue damage induced by bimodal processes [J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2010, 25(1): 75. DOI:10.1016/j.probenmech.2009.08.001
- [13] BENASCIUTTI D, CRISTOFORI A, TOVO R. Analogies between spectral methods and multiaxial criteria in fatigue damage evaluation [J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2013, 31: 39. DOI: 10.1016/j.probenmech.2012.12.002
- [14] GAO Shan, ZHENG Xiangyuan. An improved spectral discretization method for fatigue damage assessment of bimodal Gaussian processes [J]. *International Journal of Fatigue*, 2019, 119: 268. DOI:10.1016/j.ijfatigue.2018.09.027
- [15] BRACCESI C, CIANETTI F, TOMASSINI L. Random fatigue. A new frequency domain criterion for the damage evaluation of mechanical components [J]. *International Journal of Fatigue*, 2015, 70: 417. DOI:10.1016/j.ijfatigue.2014.07.005
- [16] VANMARCKE E H. Properties of spectral moments with applications to random vibration [J]. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 1972, 98(2): 425. DOI:10.1061/jmcea3.0001593

(编辑 张红)

(上接第 134 页)

- LUO Yongpeng, HUANG Fanglin, HAN Jianping, et al. A sensitivity modal interval analysis method and its application to uncertain parameter identification [J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2016, 29(4): 577. DOI: 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2016.04.003
- [12] 姜东, 费庆国, 吴邵庆. 基于区间分析的不确定性结构动力学模型修正方法[J]. *振动工程学报*, 2015, 28(3): 352  
JIANG Dong, FEI Qingguo, WU Shaoqing. Updating of structural dynamics model with uncertainty based on interval analysis [J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2015, 28(3): 352. DOI: 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2015.03.003
- [13] DENG Zhongmin, GUO Zhaopu, ZHANG Xinjie. Interval model updating using perturbation method and Radial Basis Function neural networks [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2017, 84: 699. DOI: 10.1016/j.ymsp.2016.09.001
- [14] WANG Chong, QIU Zhiping. Modified perturbation method for eigenvalues of structure with interval parameters [J]. *Science China Physics, Mechanics & Astronomy*, 2015, 58(1): 1. DOI: 10.1007/s11433-013-5328-6
- [15] DENG Zhongmin, GUO Zhaopu. Interval identification of structural parameters using interval overlap ratio and Monte Carlo simulation [J]. *Advances in Engineering Software*, 2018, 121: 120. DOI: 10.1016/j.advengsoft.2018.04.006
- [16] 邓振鸿, 张保强, 苏国强, 等. 基于近似似然的频响函数不确定性模型修正[J]. *振动、测试与诊断*, 2020, 40(3): 548  
DENG Zhenhong, ZHANG Baoqiang, SU Guoqiang, et al. Uncertainty model updating of frequency response function based on approximate likelihood function [J]. *Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis*, 2020, 40(3): 548. DOI: 10.16450/j.cnki.issn.1004-6801.2020.03.018
- [17] 王巨涛, 王春洁, 宋顺广. 结构加速度频响函数模型修正的 Kriging 方法[J]. *工程科学学报*, 2017, 39(7): 1087  
WANG Jutao, WANG Chunjie, SONG Shunguang. Structural model updating of acceleration frequency response function based on Kriging method [J]. *Chinese Journal of Engineering*, 2017, 39(7): 1087. DOI: 10.13374/j.issn2095-9389.2017.07.015
- [18] 张娜, 雷明. 基于小波变换的小样本随机振荡序列灰色预测模型[J]. *数学的实践与认识*, 2020, 50(9): 28  
ZHANG Na, LEI Ming. Grey prediction model of sample random oscillation sequence based on wavelet transform [J]. *Mathematics in Practice and Theory*, 2020, 50(9): 28
- [19] MIRJALILI S, LEWIS A. The whale optimization algorithm [J]. *Advances in Engineering Software*, 2016, 95: 51. DOI: 10.1016/j.advengsoft.2016.01.008
- [20] BI Sifeng, BROGGI M, BEER M. The role of the Bhattacharyya distance in stochastic model updating [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2019, 117: 437. DOI: 10.1016/j.ymsp.2018.08.017
- [21] YANG Xinshe. Flower pollination algorithm for global optimization [C]// International Conference on Unconventional Computing and Natural Computation. Berlin Heidelberg: Springer, 2012: 240. DOI: 10.1007/978-3-642-32894-7\_27

(编辑 张红)