

doi: 10.11918/j.issn.0367-6234.2015.11.005

基于改进增广拉格朗日乘子法的鲁棒性主成分分析

杨剑哲¹, 孙巧榆², 王君¹, 程丹松¹, 金野¹, 石大明¹

(1. 哈尔滨工业大学 计算机科学与技术学院, 150001 哈尔滨; 2. 淮海工学院 电子工程学院, 222005 江苏 连云港)

摘要: 针对增广的拉格朗日乘子法在求解鲁棒性主成分分析,特别是当数据同时受到稀疏噪声和高斯噪声的干扰时,计算精度会降低,数据降维去噪任务不能很好完成的情况,提出改进的增广拉格朗日乘子法来解决上述问题.一是用基于最优乘子初始化的改进增广拉格朗日乘子法来提高算法的计算精度,二是针对鲁棒性主成分分析,提出一个带高斯噪声的凸优化模型.实验结果表明,本文提出的最优乘子初始化改进算法赋予增广的拉格朗日乘子法一个最优的拉格朗日乘子,从而提高算法的计算精度,而凸优化模型能够清晰地将高斯噪声和稀疏噪声从数据矩阵中分离出去,进而提高数据对高斯噪声的鲁棒性.

关键词: 鲁棒性主成分分析;拉格朗日乘子的最优初始化;增广的拉格朗日乘子法;凸优化;高斯噪声

中图分类号: TP391 **文献标志码:** A **文章编号:** 0367-6234(2015)11-0027-07

Robust principal component analysis based on advanced augmented lagrange multiplier method

YANG Jianzhe¹, SUN Qiaoyu², WANG Jun¹, CHENG Dansong¹, JIN Ye¹, SHI Daming¹

(1. School of Computer Science and Technology, Harbin Institute of Technology, 150001 Harbin, China;
2. School of Electronic Engineering, Huaihai Institute of Technology, 222005 Lianyungang, Jiangsu, China)

Abstract: To solve the problem that the calculation accuracy of the robust principal component analysis is reduced when the high dimensional data is disturbed by the sparse large noise and Gaussian noise at the same time, this paper proposes the advanced augmented Lagrange multiplier method for the robust principal component analysis. On one hand, we enhance the calculation accuracy by the advanced method which is based on the optimal initialization of the Lagrange multiplier. On the other hand we propose a dual noise convex optimization model for the robust principal component analysis. As the experimental results shown, the proposed advanced method provides an optimal multiplier for the augmented Lagrange multiplier method and enhances the calculation accuracy of the method. Besides, the proposed dual noise model can separate the Gaussian noise and sparse noise from the data clearly and reinforces the robustness of the robust principal component analysis facing with dual noise.

Keywords: robust principal component analysis, optimal initialization of Lagrange multiplier, augmented Lagrange multiplier method, novel convex optimization model, Gaussian component

现实中存在的高维数据诸如图像、视频、生物信息、文档等大都分布在一个低维的数据空间上.随着科学技术和社会的发展,这些数据的维数也在快速增长.数据维数越高,对数据进行处理难度和复杂度也就越高.所以在数据处理之前进行有效的数据降维就显得尤为重要^[1-4].

主成分分析^[1] PCA (principal component

analysis)作为对高维数据进行数据降维的有效方法之一,是一种无监督的降维方法,它使用奇异值分解SVD (singular value decomposition)对数据进行降维.当高维数据受到的干扰足够小时,主成分分析可表现出良好的性能.然而当高维数据受到的噪声干扰很大时,主成分分析并不能很好地完成降维任务,有时还会给出一个与全局最优解相违背的值.所以为提高主成分分析的鲁棒性,文献[2]提出了鲁棒性主成分分析RPCA (robust principal component analysis).鲁棒性主成分分析定义原始数据矩阵 O 由两个部分组成:低秩部分 P 和稀疏噪声部分 Q ,即原始数据矩阵可以表示为 $O = P + Q$,而稀疏噪声矩阵 Q 中非零元素大都具有较大的值.实践证明即使高维数据受到很大的噪声时,鲁棒性主成分分析

收稿日期: 2014-12-11.

基金项目: 国家自然科学基金科学(61440025, 61402133); 国家博士后科学基金(20100480998); 哈尔滨市科技创新人才专项资金(2013RFQXJ110).

作者简介: 杨剑哲(1991—),男,硕士研究生;
石大明(1971—),男,教授,博士生导师.

通信作者: 程丹松, cdsinhit@hit.edu.cn.

仍能很好的完成降维任务.在所有求解鲁棒性主成分分析的算法中,增广的拉格朗日乘法是现有方法中运算速度最快、求解精度最高的算法,但是也发现增广的拉格朗日乘法还有一些方面需要进一步提升,例如当乘子的初始值不够接近最优值,算法的运算精度将会减小,并且内外层循环的次数也将变多,进而导致增广的拉格朗日乘子法的计算精度减小,这意味着通过赋予乘子一个足够优化的初始值,算法的计算精度会随之提高,而算法中运行奇异值分解的次数也会随之减少.本文提出一种迭代求解的方法来获得足够优化的拉格朗日乘子,进而提高增广拉格朗日乘子法的运算精度.

同时根据文献[5]介绍可知,除了贝叶斯鲁棒性主成分分析之外,其它用于求解鲁棒性主成分分析的方法都基于这样一个假设——原始数据矩阵由低秩数据矩阵和稀疏噪声两部分组成.但是现实中的数据矩阵常常同时受到高斯噪声和稀疏噪声的干扰,现有算法都会因受到高斯噪声的干扰而变得不准确.因此本文为鲁棒性主成分分析提出一个新的凸优化模型,把原始数据分为低秩数据、稀疏噪声和高斯噪声 3 个部分,并使用一个改进增广的拉格朗日乘子算法来求解这个新的凸优化模型.通过实验结果的对比可知,当原始数据同时受到高斯噪声和稀疏噪声的干扰时,本文方法在求解鲁棒性主成分分析的过程中表现出很好的效果.

1 鲁棒性主成分分析求解方法

鲁棒性主成分分析因其在数据受到稀疏噪声扰动时也能表现出很好的鲁棒性,所以越来越受到人们的关注,并提出了很多用于解决鲁棒性主成分分析的方法^[2,5-8,10-13],这些方法一般可被分为 3 类:基于凸优化模型的方法、基于贝叶斯理论的方法和基于 M 估计的方法.

1.1 基于贝叶斯理论的方法

贝叶斯鲁棒性主成分分析 (bayesian robust principal component analysis, BRPCA)^[6]是基于一个分层贝叶斯框架的方法.它将原始数据矩阵看作由 3 个部分构成:低秩数据部分 P ,稀疏部分 Q 和高斯噪声部分 R ,即在贝叶斯鲁棒性主成分分析中,原始数据矩阵为 $O = P + Q + R$.其对应的贝叶斯模型为 $O = U(MA)V + N \circ L + R$,其中, $U \in \mathbf{R}^{n \times k}$, $V \in \mathbf{R}^{k \times m}$, $A \in \mathbf{R}^{k \times k}$ 是一个对角矩阵, $L \in \mathbf{R}^{n \times m}$,而 \circ 表示哈达马积.此外,对角矩阵 A 对角线上的元素取值为 0 或 1,矩阵 N 的元素取值为 0 或 1 且分布稀疏.文献[6]中,使用蒙特卡罗马尔可夫链和变分贝叶斯两种方法来求解该贝叶斯模型.

1.2 基于 M 估计的方法

考虑到现实数据受到的干扰噪声并不是稀疏的,为了从受到非稀疏噪声干扰的数据中恢复原始数据,文献[7-8]提出一种针对低秩矩阵恢复的鲁棒性框架,该类方法使用鲁棒性的 M 估计来求解鲁棒性的主成分分析,然后通过求解这个带有正则项的线性逆问题来得到初始 M 估计问题的解^[9].

1.3 基于凸优化模型的方法

基于凸优化模型的方法旨在解决具有以下形式的凸优化问题:

$$\min_{P, Q} \|P\|_* + \lambda \|Q\|_1, \text{ s.t. } O = P + Q. \quad (1)$$

式中: $\|P\|_*$ 为矩阵 P 的核范数,核范数通过计算矩阵奇异值和得到可代表矩阵秩的特性; $\|Q\|_1$ 为矩阵 Q 的 l_1 范数; l_1 范数通过计算矩阵中所有元素的绝对值之和得到可代表矩阵稀疏的特性; λ 是一个大于零的权重参数.求解该模型的常用方法有迭代阈值法 IT (iterative thresholding approach)^[11]、近端梯度法 PG (proximal gradient approach)^[11] 和加速的近端梯度法 APG (accelerate proximal gradient approach)^[10,14].

2 基于最优乘子初始化的改进增广拉格朗日乘子法

增广的拉格朗日乘子法 ALM (augmented lagrange multiplier approach) 在文献[5]中提出,它几乎是现有基于凸优化模型方法中运算速度最快、精度最高的方法,在每次更新完 Y 值之后只更新一次 P_k, Q_k 值就足以求出一个收敛解.但是该方法赋予乘子 Y 的初始值不是乘子的最优值,这将导致算法的运算精度无法达到最优,因此本文提出一种基于最优乘子初始化的改进增广拉格朗日乘子法 ME-ALM (multiplier estimation based augmented lagrange multiplier approach),该方法能够赋予乘子一个最优的初始值并以此提高算法的运算精度.

根据凸优化的对偶理论,可通过求解拉格朗日函数的下确界得到式(1)的拉格朗日对偶函数为

$$d(Y) = \inf_{P, Q} L(P, Q, Y, \alpha) = \inf_{P, Q} (\|P\|_* + \lambda \|Q\|_1 + \langle Y, O - P - Q \rangle + \frac{\alpha}{2} \|O - P - Q\|_F^2). \quad (2)$$

对于乘子 Y 的每一个值,拉格朗日对偶函数都给出式(1)目标函数 $\|P\|_* + \lambda \|Q\|_1$ 的最优值的下界.可将式(2)的形式简化成式(3).

$$d(Y) = \inf_{P, Q} [(\|P\|_* - \langle Y, P \rangle) + (\lambda \|Q\|_1 - \langle Y, Q \rangle)] + \langle Y, O \rangle =$$

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{Y}, \mathbf{O} \rangle + \inf_{\mathbf{P}, \mathbf{Q}} (\|\mathbf{P}\|_* - \langle \mathbf{Y}, \mathbf{P} \rangle) + \\ & \inf_{\mathbf{P}, \mathbf{Q}} (\lambda \|\mathbf{Q}\|_1 - \langle \mathbf{Y}, \mathbf{Q} \rangle) = \\ & \begin{cases} \langle \mathbf{Y}, \mathbf{O} \rangle, & \|\mathbf{Y}\|_* \leq 1; \\ -\infty, & \text{else.} \end{cases} \quad (3) \end{aligned}$$

由于只有在 $\|\mathbf{Y}\|_* \leq 1$ 的情况下, 拉格朗日对偶函数 $d(\mathbf{Y})$ 有界, 所以将乘子 \mathbf{Y} 的定义域定义为 $\|\mathbf{Y}\|_* \leq 1$, 据此定义式 (1) 的拉格朗日对偶函数为

$$d(\mathbf{Y}) = \langle \mathbf{Y}, \mathbf{O} \rangle, \quad \|\mathbf{Y}\|_* \leq 1. \quad (4)$$

即可通过最大化 $d(\mathbf{Y})$ 的值来得到拉格朗日函数 $L(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{Y}, \alpha)$ 的最优下界. 它对应的拉格朗日对偶问题为

$$\max_{\mathbf{Y}} \langle \mathbf{Y}, \mathbf{O} \rangle, \quad \text{s.t. } \|\mathbf{Y}\|_* \leq 1. \quad (5)$$

式 (5) 在文献 [10] 中被用来直接求解鲁棒性主成分分析, 而在本文则主要用来对拉格朗日乘子提供一个最优值. 由于式 (5) 的目标函数是凸函数, 且该问题的限制条件也是凸的, 所以式 (5) 是一个凸优化问题. 可通过文献 [10] 描述的方法来求解式 (5), 从而得到乘子 \mathbf{Y} 的最优值. 此外, 由于式 (4) 满足强对偶性, 而且式 (5) 的最优解确实存在, 所以式 (1) 的任意一个最优解都对应着拉格朗日对偶函数的一个最优下界. 可通过求解拉格朗日对偶问题的解来得到鲁棒性主成分分析问题的最优解.

将这个改进算法定义为基于乘子估计的增广拉格朗日乘子法 (ME-ALM), 详细描述见算法 1.

算法 1 基于乘子估计的增广拉格朗日乘子法

输入: 原始矩阵 \mathbf{O} , 正值参数 λ

输出: $(\mathbf{P}^*, \mathbf{Q}^*)$

初始化 $\alpha_0 > 0; \rho > 0; k = 0$

乘子估计 $\mathbf{Y}^* = \arg \max_{\mathbf{Y}} \langle \mathbf{Y}, \mathbf{O} \rangle,$

s.t. $\|\mathbf{Y}\|_* \leq 1$

通过增广拉格朗日乘子法求解鲁棒性主成分分析

$$\mathbf{P}^* = \arg \min_{\mathbf{P}} L(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{Y}^*, \alpha_k),$$

$$\mathbf{Q}^* = \arg \min_{\mathbf{Q}} L(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{Y}^*, \alpha_k).$$

3 带高斯噪声的鲁棒性主成分分析模型及其增广拉格朗日乘子法

考虑到数据常常同时受到稀疏噪声和高斯噪声的共同干扰, 迫切希望将稀疏噪声和高斯噪声分别从原始数据中清晰地分离出来, 而现有的凸优化方法不能很好地完成这一任务, 所以本文提出一个新的凸优化模型, 并在此基础上提出一种改进的增广拉格朗日乘子法来对该模型进行求解.

新的鲁棒性主成分分析的凸优化模型把现实数

据分为低秩数据、稀疏噪声数据和高斯噪声 3 个部分. 该凸优化模型为

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{G}} \|\mathbf{P}\|_* + \lambda \|\mathbf{Q}\|_1 + \|\mathbf{G}\|_F, \\ \text{s.t. } \mathbf{O} = \mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{G}. \end{cases} \quad (6)$$

式中: $\|\mathbf{P}\|_*$ 为矩阵 \mathbf{P} 的核范数, $\|\mathbf{Q}\|_1$ 为矩阵 \mathbf{Q} 的 l_1 范数, l_1 范数在很宽泛的条件下是与矩阵的 l_0 范数 $\|\mathbf{Q}\|_0$ 等价的, 而 $\|\mathbf{Q}\|_0$ 指示了矩阵 \mathbf{Q} 中非零元素的个数. $\|\mathbf{G}\|_F$ 为矩阵 \mathbf{G} 的 Frobenius 范数, 它通过计算所有矩阵元素平方和的开方得到. 使用 $\|\mathbf{G}\|_F$ 以保证矩阵 \mathbf{G} 中所有元素的值足够小以满足高斯噪声的特性.

为更好地描述这个新的鲁棒性主成分分析模型并且高效地求解该凸优化模型, 提出一个改进的增广拉格朗日乘子算法, 将这个算法称为用于求解带高斯噪声的鲁棒性主成分分析的改进的增广拉格朗日乘子法 G-ALM (augmented lagrange multiplier approach for RPCA with gaussian noise).

对于一个可表示为 $\min f(x)$, s.t. $h(x) = 0$ 的约束凸优化问题, 它的拉格朗日函数为

$$L(x, y, \alpha) = f(x) + \langle y, h(x) \rangle + \frac{\alpha}{2} \|h(x)\|_F^2. \quad (7)$$

式中: y 是拉格朗日乘子. 为将增广拉格朗日乘子法用于求解新的鲁棒性主成分分析的凸优化模型为

$$\begin{aligned} x = (\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{G}), \quad f(x) = & \|\mathbf{P}\|_* + \lambda \|\mathbf{Q}\|_1 + \\ & \|\mathbf{G}\|_F, \quad h(x) = \mathbf{O} - \mathbf{P} - \mathbf{Q} - \mathbf{G}. \end{aligned} \quad (8)$$

据此可得式 (6) 的增广拉格朗日函数:

$$\begin{aligned} L(\mathbf{O}, \mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{G}, \mathbf{Y}, \alpha) = & \|\mathbf{P}\|_* + \lambda \|\mathbf{Q}\|_1 + \\ & \|\mathbf{G}\|_F + \langle \mathbf{Y}, \mathbf{O} - \mathbf{P} - \mathbf{Q} - \mathbf{G} \rangle + \\ & \frac{\alpha}{2} \|\mathbf{O} - \mathbf{P} - \mathbf{Q} - \mathbf{G}\|_F^2. \end{aligned} \quad (9)$$

根据增广拉格朗日函数表达式 (9), 将式 (6) 的解描述为

$$(\mathbf{P}^*, \mathbf{Q}^*, \mathbf{G}^*) = \arg \min_{\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{G}} L(\mathbf{O}, \mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{G}, \mathbf{Y}, \alpha). \quad (10)$$

式中: $(\mathbf{P}^*, \mathbf{Q}^*, \mathbf{G}^*)$ 为矩阵 $\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{G}$ 的最优解, 假设 $(\mathbf{P}_k, \mathbf{Q}_k, \mathbf{G}_k)$ 代表 $(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{G})$ 在第 k 次迭代中的值, 那么可通过迭代求解下面提到的 3 个子问题, 进而求解式 (10) 的最优解, 这 3 个子问题表述为:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k+1} = \arg \min_{\mathbf{P}} & \frac{1}{\alpha} \|\mathbf{P}\|_* + \frac{1}{2} \|\mathbf{O} - \mathbf{P} - \mathbf{Q}_k - \\ & \mathbf{G}_k + \frac{1}{\alpha} \mathbf{Y}_k\|_F^2 = \arg \min_{\mathbf{P}} \frac{1}{\alpha} \|\mathbf{P}\|_* + \\ & \frac{1}{2} \|\mathbf{P} - \mathbf{T}_k^{\mathbf{P}}\|_F^2, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\mathbf{Q}_{k+1} = \arg \min_{\mathbf{Q}} \frac{\lambda}{\alpha} \|\mathbf{Q}\|_1 + \frac{1}{2} \|\mathbf{O} - \mathbf{P}_k - \mathbf{Q} -$$

$$\mathbf{G}_k + \frac{1}{\alpha} \mathbf{Y}_k \|\mathbf{F}\|^2 = \arg \min_{\mathbf{Q}} \frac{\lambda}{\alpha} \|\mathbf{Q}\|_1 + \frac{1}{2} \|\mathbf{Q} - \mathbf{T}_k^{\mathbf{Q}}\|_{\mathbf{F}}^2, \quad (12)$$

$$\mathbf{G}_{k+1} = \arg \min_{\mathbf{G}} \frac{1}{\alpha} \|\mathbf{G}\|_{\mathbf{F}} + \frac{1}{2} \|\mathbf{O} - \mathbf{P}_k - \mathbf{Q}_k - \mathbf{G} + \frac{1}{\alpha} \mathbf{Y}_k \|\mathbf{F}\|^2 = \arg \min_{\mathbf{G}} \frac{1}{\alpha} \|\mathbf{G}\|_{\mathbf{F}} + \frac{1}{2} \|\mathbf{G} - \mathbf{T}_k^{\mathbf{G}}\|_{\mathbf{F}}^2. \quad (13)$$

式(11)、(12)的解可通过奇异值分解和阈值运算符^[5,7]得到,若假设 $[\mathbf{U}, \mathbf{S}, \mathbf{V}]$ 为矩阵 $\mathbf{T}_k^{\mathbf{Q}}$ 的奇异值分解,那么式(11)、(12)的解可表示为

$$\mathbf{P}_{k+1} = \mathbf{US}_{\alpha^{-1}}[\mathbf{S}]\mathbf{V}^T, \quad \mathbf{Q}_{k+1} = \mathbf{S}_{\alpha^{-1}\lambda}[\mathbf{T}_k^{\mathbf{Q}}]. \quad (14)$$

而式(13)则等价 $\min_{\mathbf{G}} \|\mathbf{G}\|_{\mathbf{F}}$ s.t. $\mathbf{O} + \frac{1}{\alpha} \mathbf{Y}_k = \mathbf{P}_k + \mathbf{Q}_k + \mathbf{G}$, 它可以通过奇异值分解的方法得到.若假设 $[\mathbf{M}, \mathbf{Z}, \mathbf{N}]$ 是矩阵 $\mathbf{O} + \frac{1}{\alpha} \mathbf{Y}$ 的奇异值分解为

$$\mathbf{G}_{k+1} = \mathbf{O} + \frac{1}{\alpha} \mathbf{Y}_k - \mathbf{MS}_{\beta}[\mathbf{Z}]\mathbf{N}^T. \quad (15)$$

式中 β 是一个为阈值运算符设定的正值参数.可根据式(14)、(15)迭代解式(11)、(12)和(13)的最优解.在运算过程中,当计算矩阵 \mathbf{P} 值时,另外两个矩阵 \mathbf{Q} 和 \mathbf{G} 的值是固定的,同样当计算矩阵 \mathbf{Q} 或者矩阵 \mathbf{G} 的值时,另外两个矩阵的值都是固定不变的.通过改进的增广拉格朗日乘子法求解带高斯噪声的鲁棒性主成分分析模型(G-ALM)的过程见算法.

算法 2 用于求解带高斯噪声的鲁棒性主成分分析的改进的增广拉格朗日乘子法

输入: 原始矩阵 \mathbf{O} , 正值参数 λ, α, β

输出: $(\mathbf{P}^*, \mathbf{Q}^*, \mathbf{G}^*)$

初始化: $\mathbf{Y}_0 = \text{sgn}(\mathbf{O}) / \mathbf{J}(\text{sgn}(\mathbf{O})), k = 0$

While not converged Do

$$\mathbf{P}_{k+1}^0 = \mathbf{P}_k^*, \mathbf{Q}_{k+1}^0 = \mathbf{Q}_k^*, \mathbf{G}_{k+1}^0 = \mathbf{G}_k^*, j = 0$$

While not converged Do

$$(\mathbf{U}, \mathbf{S}, \mathbf{V}) = \text{svd}(\mathbf{O} - \mathbf{Q}_{k+1}^j - \mathbf{G}_{k+1}^j + \alpha_k^{-1} \mathbf{Y}_k^*)$$

$$\mathbf{P}_{k+1}^{j+1} = \mathbf{US}_{\alpha_k^{-1}}[\mathbf{S}]\mathbf{V}^T$$

$$\mathbf{Q}_{k+1}^{j+1} = \mathbf{S}_{\lambda\alpha_k^{-1}}[\mathbf{O} - \mathbf{P}_{k+1}^{j+1} - \mathbf{G}_{k+1}^j + \alpha_k^{-1} \mathbf{Y}_k^*]$$

$$[\mathbf{M}, \mathbf{Z}, \mathbf{N}] = \text{svd}(\mathbf{O} + \alpha_k^{-1} \mathbf{Y}_k^*)$$

$$\mathbf{G}_{k+1}^{j+1} = \mathbf{O} + \alpha_k^{-1} \mathbf{Y}_k^* - \mathbf{MS}_{\beta}[\mathbf{Z}]\mathbf{N}^T$$

$$j = j + 1$$

End While

$$\mathbf{Y}_{k+1}^* = \mathbf{Y}_k^* + \alpha_k(\mathbf{O} - \mathbf{P}_{k+1}^* - \mathbf{Q}_{k+1}^* - \mathbf{G}_{k+1}^*)$$

$$\alpha = \alpha_{k+1}$$

$$k = k + 1$$

End While

4 实 验

本文的实验是在配置为 3.40GHz Intel(R) Core (TM) i7-2600 CPU、4GB RAM 的主机上使用 MATLAB R2014a 进行的.

4.1 数据拟合实验

两组数值实验来比较 ME-ALM, ALM 和 Dual 算法在求解鲁棒性主成分分析时的运算精确度和奇异值分解的运行次数.

在本次试验中,设定准确解为矩阵 $(\mathbf{P}_0, \mathbf{Q}_0)$,其中 $\mathbf{P}_0 \in \mathbf{R}^{m \times m}, \mathbf{Q}_0 \in \mathbf{R}^{m \times m}$.通过计算矩阵 \mathbf{U}, \mathbf{V}^T 的乘积 \mathbf{UV}^T 得到矩阵 \mathbf{P}_0 ,而矩阵 \mathbf{U} 和 \mathbf{V} 都是 $m \times r$ 的实数矩阵,它们的元素值都满足均值为 0. 方差为 1 的高斯分布.接着可通过随机地从区间 $[-500, 500]$ 中取值作为矩阵 \mathbf{Q}_0 的非零元素值,从而产生稀疏矩阵 \mathbf{Q}_0 ,最后求得矩阵 \mathbf{P}_0 与 \mathbf{Q}_0 的和矩阵 \mathbf{O} ,并将 \mathbf{O} 作为这两个算法的输入初始矩阵,同时记算法的输出为矩阵 $(\hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbf{Q}})$.

本方法共做了两组对照实验,在其中一组实验中设定矩阵 \mathbf{P}_0 的秩 $\text{rank}(\mathbf{P}_0) = 0.05 m$,而稀疏矩阵 \mathbf{Q}_0 的非零元素个数是 $0.05 m^2$,在另一组的实验中设定矩阵 \mathbf{P}_0 的秩 $\text{rank}(\mathbf{P}_0) = 0.1 m$,稀疏矩阵 \mathbf{Q}_0 的非零元素个数是 $0.1 m^2$.此外在每一组实验中都使用维数为 m 的方阵 $(\mathbf{P}_0, \mathbf{Q}_0)$,而矩阵的维数 m 在每一组实验中都分别被设置为 100、200、400 和 500,在每一种情况下都比较了 ME-ALM, ALM 和 Dual 算法的表现情况.使用 $\frac{\|\hat{\mathbf{P}} - \mathbf{P}_0\|_{\mathbf{F}}}{\|\mathbf{P}_0\|_{\mathbf{F}}}$ 来表征算法的运算精度并用算法的迭代次数代表奇异值分解的运行次数.数值拟合实验结果见表 1 中,可以看到,与 ALM 和 Dual 这两个算法相比,ME-ALM 总是能经过

较少次数的奇异值分解达到一个更小的 $\frac{\|\hat{\mathbf{P}} - \mathbf{P}_0\|_{\mathbf{F}}}{\|\mathbf{P}_0\|_{\mathbf{F}}}$ 值.这也就是说,与其它两个算法相比,ME-ALM 总是能取得更好的运算精度.

4.2 人脸阴影的去除

在这个实验中使用鲁棒性主成分分析从受到不同光照影响的人脸图像中移除遮挡和阴影,这些人脸图像都是从人脸数据集 YaleB 中选取的.实验中分别使用本文方法(ME-ALM), ALM 和 Dual 算法对相同的人脸图像矩阵进行处理,进而比较这 3 个算法剔除遮挡和阴影的效果.将每一幅人脸图像重新排列成为一个列向量,并将同一子集中的 64 幅图像重组为一个图像矩阵 \mathbf{O} ,亦即 $\mathbf{O} \in \mathbf{R}^{32 \times 256 \times 64}$,然后

将矩阵 O 作为鲁棒性主成分分析的输入矩阵, 分别使用上述 3 个算法进行处理, 最后可得到两个输出矩阵, 其中一个是人脸图像的低秩数据矩阵, 另外一个则是稀疏噪声矩阵, 分别将这两个矩阵记为 P, Q .

表 1 数值拟合实验

m	算法名称	$\frac{\ \hat{P} - P_0\ _F}{\ P_0\ _F}$	$\text{rank}(\hat{P})$	迭代次数
$\text{rank}(P_0) = 0.05 m, \ Q\ _0 = 0.05 m$				
100	ME-ALM	6.3088×10^{-7}	5	3
	ALM	3.8729×10^{-7}	5	6
	Dual	6.2472×10^{-4}	5	178
200	ME-ALM	3.7207×10^{-7}	10	3
	ALM	8.4327×10^{-7}	10	5
	Dual	4.1703×10^{-4}	10	133
400	ME-ALM	1.4746×10^{-7}	20	3
	ALM	2.8979×10^{-7}	20	5
	Dual	1.8894×10^{-4}	20	150
500	ME-ALM	1.1179×10^{-7}	25	3
	ALM	2.1070×10^{-7}	25	5
	Dual	1.3090×10^{-4}	25	151

此外通过一组对照实验来比较 G-ALM 和 ALM 这两种算法在初始数据矩阵同时受到稀疏噪声和高斯噪声干扰时鲁棒性主成分分析模型的表现. 在这组实验中将同一人脸图像集中的 64 幅图像重组为一个图像数据矩阵 O' , 即 $O' \in \mathbf{R}^{32 \times 256 \times 64}$. 在此基础上, 将一个高斯噪声矩阵 $G \in \mathbf{R}^{32 \times 256 \times 64}$ 与图像矩阵 O' 相加得到矩阵 $O, O \in \mathbf{R}^{32 \times 256 \times 64}$, 其中高斯噪声矩阵 G 的每一列都满足独立同分布的高斯分布 $N(0, 10^{-6})$. 然后将矩阵 O 作为上述两个算法的输入, 最后可得到 3 个输出矩阵. 一个是低秩数据矩阵 P , 一个是稀疏噪声矩阵 Q (人脸中存在的阴影、遮挡), 另一个是高斯噪声矩阵 G .

在图 1 中展示了 ME-ALM, ALM 和 Dual 3 个算法对同一幅人脸图像 (在鼻子、眼睛和脸颊出受到阴影干扰) 进行处理后的结果. 图 2 展示 G-ALM 和 ALM 算法在去除人脸图像阴影的效果.

根据图 1 展示的实验结果, 可发现 ME-ALM 算法可有效地完成去除人脸阴影的功能, 可将人脸图像中的阴影遮挡等稀疏噪声去除. 与 ALM 和 Dual 算法相比, 在去除人脸阴影的过程中, ME-ALM 算法具有更好的运算精度. 而从图 2 的实验结果可看出 G-ALM 算法在人脸图像受到稀疏噪声和高斯噪声共同干扰时, 也能很好地完成去除人脸阴影的任务, 并将高斯噪声和稀疏噪声分别分离出去, 进而避免低秩人脸图像和稀疏噪声图像受到高斯噪声的影

响. 而在相同的情况下 ALM 算法则不能很好地完成该任务.

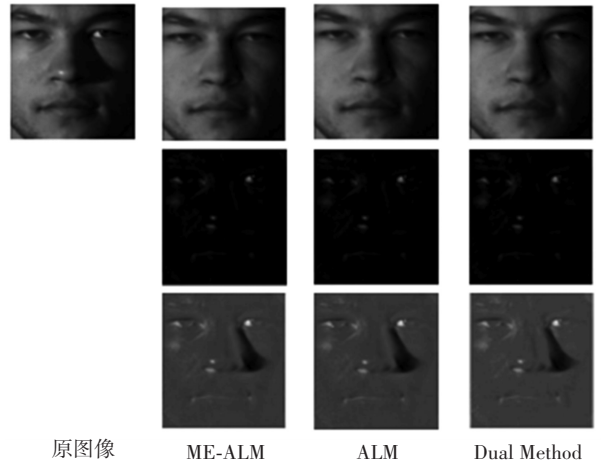


图 1 ME-ALM, ALM, Dual 在人脸阴影去除效果上的对比

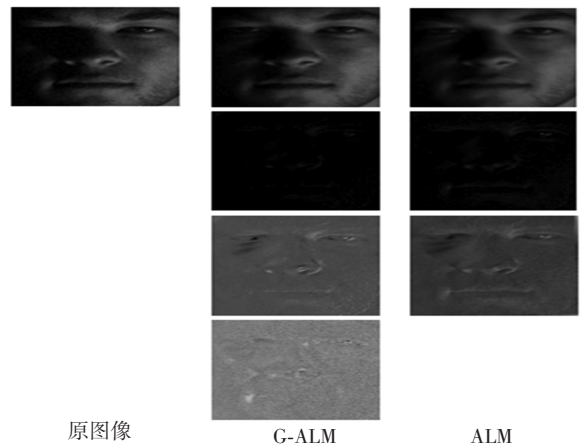


图 2 G-ALM, ALM 去除受高斯噪声干扰的人脸阴影的对比

4.3 动态前景的提取

运用 ME-ALM 和 G-ALM 算法实现从固定摄像头的视频序列中^[15], 把动态前景从静态背景中提取出来. 将视频序列中几乎静止的背景当作鲁棒性主成分分析中的低秩部分, 而将动态的前景看作稀疏噪声部分.

视频序列数据集 Walk1 拍摄于一个大厅, 在视频序列中有一个人来回地走动. 在实验中这个来回走动的人被看作是前景, 而几乎静止不动的大厅则被看作是背景. 这个视频序列总共由 611 帧视频图像构成, 每一帧图像有 384×288 个像素点. 实验中随机选取 180 帧连续的视频图像并将每一幅图像重排为一个 110592×1 的列向量, 然后将这 180 个列向量排列为一个视频数据矩阵 O , 即 $O \in \mathbf{R}^{110592 \times 180}$, 将矩阵 O 作为 ME-ALM 算法的输入矩阵. 经过 ME-ALM 算法处理后, 可得到两个输出矩阵, 其中一个代表低秩的静态背景, 另一个代表稀疏的动态前景.

视频序列数据集 EnterExitCrossingPaths2cor 拍

摄于一个走廊,在视频中有两个人在走廊中走动、相遇、然后离开.和 Walk1 数据集一样,从数据集中随机选取 140 帧连续的视频图像组成一个视频数据矩阵 O .此外,为评估 G-ALM 算法在视频序列同时受到高斯噪声和稀疏噪声干扰时提取动态前景的性能,在视频数据矩阵 O 中加入一个满足高斯分布 $N(0, 10^{-3})$ 的高斯噪声矩阵 G ,得到一个新的视频数据矩阵 O' ,亦即 $O' \in \mathbf{R}^{110 \times 592 \times 180}$.将这个视频数据矩阵 O' 作为 G-ALM 算法的输入矩阵.经过 G-ALM 算法的处理之后,可得到 3 个输出矩阵,其中之一是代表背景的低秩矩阵,一个是代表前景的稀疏矩阵,另外一个是高斯噪声矩阵.

图 3、4 则分别展示了 ME-ALM, ALM 和 Dual 这 3 个算法在这两个数据集上的运行结果,第一列中的图像是随机取自视频中的一帧原始图像,此后从左到右的每一列分别是上述 3 个算法对该视频帧图像的处理结果,在每一列中从上至下依次是低秩视频帧(背景)、稀疏视频帧(前景)和稀疏视频帧的归一化结果.根据图 3、4 展示的实验结果可看出,图 3 中由一个走动的人代表的前景和图 4 中由两个走动的人代表的前景都被成功地从背景中提取出来.与 ALM 和 Dual 算法相比,ME-ALM 算法表现出了更好的运算精度,可很好地实现从静态背景中提取动态前景.

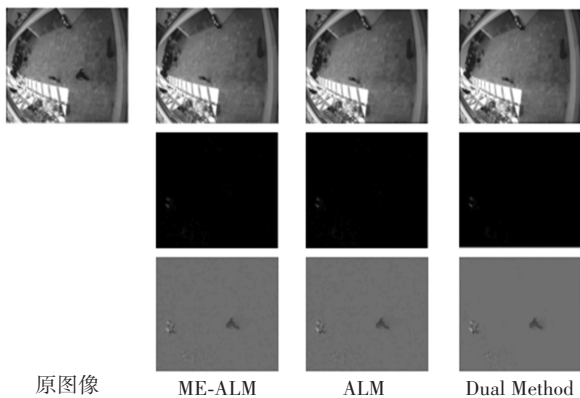


图 3 提取 Walk1 前景时的结果

有关 G-ALM 算法的实验结果将在图 5、6 中显示,其中图 5 展示了 G-ALM 算法的运行结果,每一列展示了 G-ALM 算法对一帧视频图像的处理结果,每一列中从上至下分别是原始视频帧、低秩视频帧(背景)、稀疏视频帧(前景)、稀疏视频帧的归一化结果和高斯噪声图像.图 6 展示了 G-ALM 和 ALM 这两个算法在相关数据集上的运行结果,第一列中的图像是随机取自视频中的一帧原始图像,此后每一列分别是上述两个算法对该视频帧的处理结果,在每一列中从上至下依次是低秩视频帧(背景)、稀疏视频帧(前景)、稀疏视频帧的归一化结果

和高斯噪声图像.

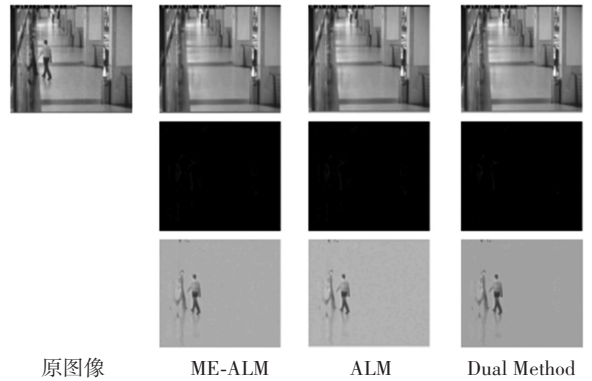


图 4 提取 EnterExitCrossingPaths2cor 前景时的处理结果

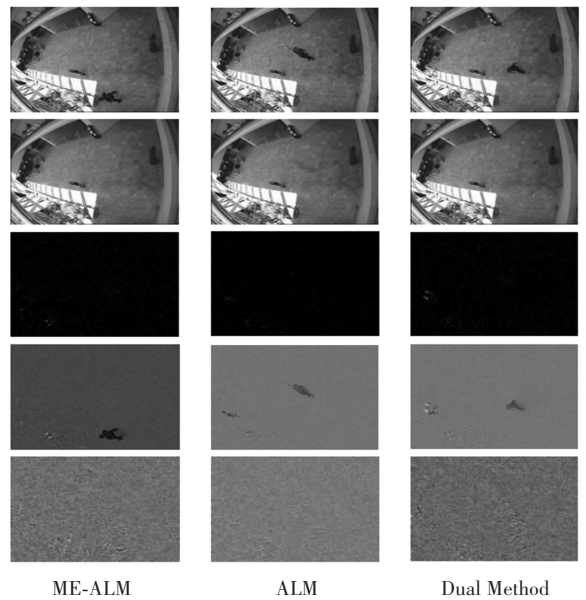


图 5 G-ALM 提取受高斯噪声干扰的前景

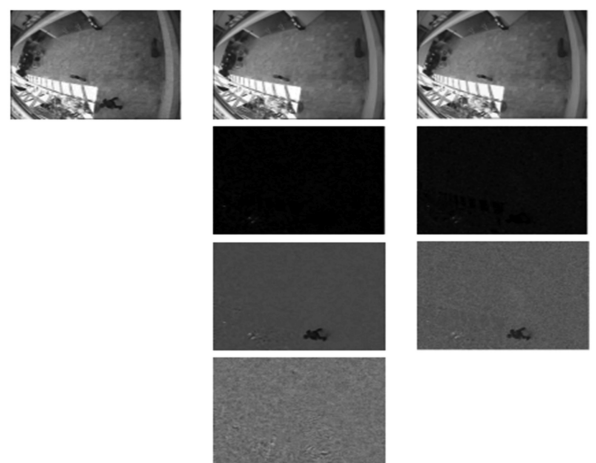


图 6 提取受高斯噪声干扰图像前景时的结果

根据图 5、6 的实验结果可知,当视频序列同时受到高斯噪声和稀疏噪声干扰时,G-ALM 算法可很好地实现从静态背景中提取动态前景,并清晰地将静态背景、动态前景和高斯噪声分别分离开来.与 ALM 算法相比,G-ALM 算法可避免分离出的静态

背景和动态前景受到高斯噪声的干扰.这也表明当数据同时受到稀疏噪声和高斯噪声的干扰,且低秩数据和稀疏噪声对图像处理都很重要时,G-ALM 能够起到非常有效的作用.

5 结 语

本文提出两个改进的用于求解鲁棒性主成分分析问题的方法.其中 ME-ALM 方法通过求解鲁棒性主成分分析的对偶问题,赋予增广的拉格朗日乘子法一个最优的拉格朗日乘子,从而提高算法的运算精度.另一个改进是用来求解新的鲁棒性主成分分析的凸优化模型,本模型认为数据矩阵由低秩数据部分、稀疏噪声部分和高斯噪声部分 3 个部分构成.提出的 G-ALM 方法能够很好地求解这个新的优化模型,清晰地将高斯噪声和稀疏噪声分别从低秩数据中分离出来,进而提高数据对高斯噪声的鲁棒性.

通过去除人脸阴影和提取动态前景的实验对比,本文提出 ME-ALM 和 G-ALM 算法都取得了很好的效果.特别是在提取动态前景的应用中,当视频序列受到高斯噪声干扰时,G-ALM 表现出其它凸优化算法所不具备的性能,可避免低秩数据和稀疏部分受到高斯噪声的干扰,而降低处理精度.

参 考 文 献

- [1] MORRE B. Principal component analysis in linear systems: Controllability, observability, and model reduction [J]. Automatic Control, IEEE Transactions on, 1981, 26(1): 17-32.
- [2] CANDÈS E J, LI X, MA Y, et al. Robust principal component analysis? [J]. Journal of the ACM (JACM), 2011, 58(3): 1-32.
- [3] TIPPING M E, BISHOP C M. Probabilistic principal component analysis [J]. Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology), 1999, 61(3): 611-622.
- [4] DUONG T D X, NGUYEN H V. Some extension of sparse principal component analysis [J]. International Journal of Machine Learning and Computing, 2012(2): 701-705.
- [5] LIN Z, CHEN M, MA Y. The augmented lagrange multiplier method for exact recovery of corrupted low-rank matrices [J]. arXiv preprint arXiv:1009.5055, 2010.
- [6] DING X, HE L, CARIN L. Bayesian robust principal component analysis [J]. Image Processing, IEEE Transactions on, 2011, 20(12): 3419-3430.
- [7] HE R, TAN T, WANG L. Robust recovery of corrupted low-rank matrix by implicit regularizers [J]. Submitted to IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence (TPAMI), 2014, 36(4): 770-783.
- [8] ZHANG T, LERMAN G. A novel m-estimator for robust pca [J]. The Journal of Machine Learning Research, 2014, 15(1): 749-808.
- [9] BECK A, TEOULLE M. A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems [J]. SIAM Journal on Imaging Sciences, 2009, 2(1): 183-202.
- [10] CHEN M, GANESH A, LIN Z, et al. Fast convex optimization algorithms for exact recovery of a corrupted low-rank matrix [J]. In Intl. Workshop on Comp. Adv. in Multi-Sensor Adapt. Processing (CAMSAP), Aruba, Dutch Antilles, 2009, 61.
- [11] WRIGHT J, GANESH A, PENG Y G, et al. Robust principal component analysis: exact recovery of Corrupted Low-Rank Matrices via Convex Optimization [J]. Advances in Neural Information Processing Systems, 2009, 87(4): 2080-2088.
- [12] BAO B K, LIU G, XU C, et al. Inductive robust principal component analysis [J]. Image Processing, IEEE Transactions on, 2012, 21(8): 3794-3800.
- [13] HE R, HU B G, ZHENG W S, et al. Robust principal component analysis based on maximum correntropy criterion [J]. Image Processing, IEEE Transactions on, 2011, 20(6): 1485-1494.
- [14] TOH K C, YUN S. An accelerated proximal gradient algorithm for nuclear norm regularized linear least squares problems [J]. Pacific Journal of Optimization, 2010, 15(6): 615-640.
- [15] Bob Fisner. popular Image Analysis Datasers/Databases [DB/OL]. 20110512http://homepages.inf.ed.ac.uk/rbf/CAVIARDATA.

(编辑 苗秀芝)