

doi: 10.11918/j.issn.0367-6234.2015.01.016

# 渐开线花键连接的非线性动力学特性

薛向珍, 王三民, 袁茹

(西北工业大学 机电学院, 710072 西安)

**摘要:** 为给花键连接磨损分析和寿命预估提供精确的数值基础,对渐开线花键的非线性动力学特性进行研究.利用集中质量模型建立具有齿侧间隙的花键连接四自由度非线性动力学方程,计算花键连接实际接触齿对数及综合时变啮合刚度,采用四阶 Runge-Kutta 法求解花键连接非线性动力学方程.计算结果表明:花键副啮合刚度随时间呈周期性变化,随扭矩呈分段线性分布;当系统转速为 300 r/min 时,系统呈简谐响应;转速为 348 r/min 时,系统呈两周周期响应;转速为 360 r/min 时,系统呈 5 周期响应;转速为 1 080 r/min 时,系统进入混沌响应;花键副的动载系数也呈周期性变化,并随扭矩及齿侧间隙的增大而增大.减小渐开线花键连接的齿侧间隙,有利于降低动态载荷,提高花键副工作的稳定性.

**关键词:** 渐开线花键;动态特性;有限元;时变啮合刚度;齿侧间隙

中图分类号: V233.1

文献标志码: A

文章编号: 0367-6234(2015)01-0107-05

## Nonlinear dynamic characteristics of involute spline couplings

XUE Xiangzhen, WANG Sanmin, YUAN Ru

(School of Mechanical Engineering, Northwestern Polytechnical University, 710072 Xi'an, China)

**Abstract:** To provide accurate numerical basis for the forecast of lifetime and analysis of fretting wear of the spline couplings, the nonlinear dynamic characteristics of involute splines was studied. Four degrees of freedom nonlinear dynamic equations of the spline couplings using the lumped mass model was established, the number of actual meshing teeth and the time-varying mesh stiffness of the systems were calculated, and the nonlinear dynamic equations adopting the fourth order Runge-Kutta method was solved. The results show that: the time-varying mesh stiffness changes periodically with time and is a piecewise linear distribution with torque changing; when  $n = 300$  r/min, the system presents harmonic response; when  $n = 348$  r/min, the system presents double-cycle response; when  $n = 360$  r/min, the system presents 5-cycle response; and when  $n = 1\ 080$  r/min, the system gets into chaos response. The dynamic load coefficient of the spline couplings changes periodically and increases with torque and backlash. It is concluded that reducing the clearance of the spline couplings is beneficial to lowering the dynamic load and improving the stability of involute splines.

**Keywords:** spline couplings; dynamic characteristics; finite element; the time-varying mesh stiffness; backlash

渐开线花键连接由于传输扭矩能力大,对中性好,故广泛应用于航空减速器、航天发动机涡轮泵等动力传输系统中.由于花键齿侧间隙的存在,当花键副受力时,侧隙小的花键齿先啮合,间隙次之的再啮合,依次进行,实际参与啮合的齿数小于设计齿数<sup>[1]</sup>.航空花键副受力情况复杂,在变扭

矩、轴向力及弯矩共同作用下,在起飞、巡航、着陆时都受到较大的变载荷冲击,且由于齿侧间隙使得花键副啮合刚度具有时变性<sup>[1]</sup>,导致花键副具有复杂的非线性动力学特性.Tjemberg<sup>[2]</sup>研究了花键副延轴向载荷分布情况并和有限元结果进行了对比,指出使载荷均匀分配的最好方法是沿轴向修正花键齿厚.Barrot 等<sup>[3]</sup>研究了考虑不同载荷和几何形状下花键副轴向扭矩传递情况,指出轴向扭矩分布主要影响花键副与微动磨损相关的损坏.Silvers 和 Curà 等<sup>[4-5]</sup>也对花键的载荷分配情况进行了研究. Leen 等<sup>[6]</sup>基于由实验验证的受扭

收稿日期: 2013-12-05.

基金项目: 国家高技术研究发展计划资助项目(2009AA04Z404).

作者简介: 薛向珍(1984—),女,博士研究生;

王三民(1960—),男,教授,博士生导师.

通信作者: 薛向珍, a\_zheny@163.com.

矩和轴向力载荷的花键有限元模型对花键的三维摩擦接触进行了研究,该研究考虑了轴向齿廓修形及摩擦系数的影响. Ratsimba 等<sup>[7]</sup>以及 Ding 等<sup>[8]</sup>实验测得摩擦系数及磨损系数值,利用三维有限元模型得出接触应力和滑移距离,采用修正的 Archard 方程计算了磨损深度. Ding 和 Madge 等<sup>[9-11]</sup>也对花键的磨损进行了研究. Kahraman<sup>[12]</sup>建立了渐开线花键的纯扭转动力学模型,给出了非线性动力学方程,但未对方程进行求解以及对其非线性动力学行为进行研究. 为准确预估花键副的使用寿命及磨损情况,需要精确分析渐开线花键连接动载大小.

本文在考虑渐开线花键副齿侧间隙情况下,建立了渐开线花键副纯扭转动力学模型及非线性动力学方程,分析了一个次载荷循环周期中,花键副实际参与啮合的齿数分布情况,采用 ANSYS 计算出系统综合时变啮合刚度,利用四阶 Runge-Kutta 法对非线性方程进行了求解,并对花键副系统的动力学特性进行了分析,为研究花键副磨损及预估其寿命提供了理论基础.

## 1 花键副动力学模型与动力学方程

### 1.1 动力学模型

考虑齿侧间隙情况下,利用集中质量法建立了花键副的纯扭动力学模型,如图 1 所示,图中集中质量盘 1、2、3、4 分别表示花键副输入构件、外花键、内花键及花键副输出构件.

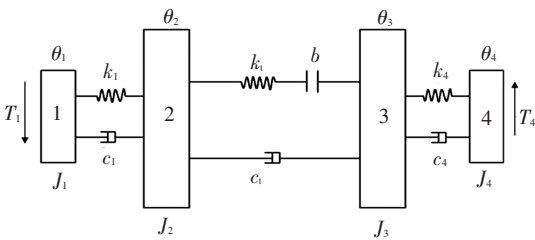


图 1 花键连接动力学模型

### 1.2 动力学方程的建立

以 4 个集中质量盘的转角  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$  为广义坐标,根据 Lagrange 方程可推导出图 1 所示系统的动力学方程为

$$\begin{cases} I_1 \ddot{\theta}_1 + c_{s1}(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + k_{s1}(\theta_1 - \theta_2) = T_1, \\ I_2 \ddot{\theta}_2 + r_2 [c_1(r_2 \dot{\theta}_2 - r_3 \dot{\theta}_3) + k_1 g(r_2 \theta_2 - r_3 \theta_3)] - \\ \quad c_{s1}(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) - k_{s1}(\theta_1 - \theta_2) = 0, \\ I_3 \ddot{\theta}_3 + c_{s4}(\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_4) + k_{s4}(\theta_3 - \theta_4) - \\ \quad r_3 [c_1(r_2 \dot{\theta}_2 - r_3 \dot{\theta}_3) + k_1 g(r_2 \theta_2 - r_3 \theta_3)] = 0, \\ I_4 \ddot{\theta}_4 + c_{s4}(\dot{\theta}_4 - \dot{\theta}_3) + k_{s4}(\theta_4 - \theta_3) = -T_4. \end{cases} \quad (1)$$

式中:  $I_i$  为转动惯量;  $\theta_i$  为转动的角度 ( $i = 1, 2, 3, 4$ );  $T_1, T_4$  分别为输入、输出扭矩,  $T_1 = T_4$ ;  $b$  为齿侧间隙;  $r_2, r_3$  分别为外、内花键节圆半径;  $c_s, c_t$  分别为扭转阻尼、啮合阻尼;  $k_s, k_t$  分别为扭转刚度、综合时变啮合刚度.

对方程组 (1) 中的各方程两边分别除以  $I_1, I_2, I_3, I_4$ , 令  $x_1 = r_2(\theta_1 - \theta_2), x_2 = r_2\theta_2 - r_3\theta_3, x_3 = r_3(\theta_3 - \theta_4)$ , 则方程组 (1) 可化为

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \left(\frac{c_{s1}}{I_1} + \frac{c_{s1}}{I_2}\right) \dot{x}_1 + \left(\frac{k_{s1}}{I_1} + \frac{k_{s1}}{I_2}\right) x_1 - \\ \quad \frac{r_2^2}{I_2} [c_1 \dot{x}_2 + k_1 g(x_2)] = \frac{r_2 T_1}{I_1}, \\ \ddot{x}_2 + \left(\frac{r_2^2}{I_2} + \frac{r_3^2}{I_3}\right) [c_1 \dot{x}_2 + k_1 g(x_2)] - \\ \quad \frac{c_{s1}}{I_2} \dot{x}_1 - \frac{k_{s1}}{I_2} x_1 - \frac{c_{s4}}{I_3} \dot{x}_3 - \frac{k_{s4}}{I_3} x_3 = 0, \\ \ddot{x}_3 + \left(\frac{c_{s4}}{I_3} + \frac{c_{s4}}{I_4}\right) \dot{x}_3 + \left(\frac{k_{s4}}{I_3} + \frac{k_{s4}}{I_4}\right) x_3 - \\ \quad \frac{r_3^2}{I_3} [c_1 \dot{x}_2 + k_1 g(x_2)] = \frac{r_3 T_4}{I_4}. \end{cases}$$

式中  $g[x(t)]$  为花键间隙分段线性位移函数,其表达式及式中参数含义见文献 [12].

## 2 花键副啮合齿对数计算

航空花键在起飞、巡航、着陆时承受着较大的变载荷冲击,所受扭矩的一个主循环伴随多个次循环,如图 2 所示.

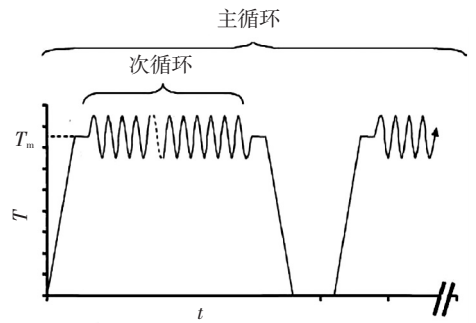


图 2 系统承受扭矩形式

当花键副承受图 2 所示扭矩时,由于齿侧间隙的存在,间隙小的齿先啮合,间隙次之的接着啮合,直到所有载荷分配完.花键副受载时实际参与啮合的齿数  $r_i$  小于设计齿数  $n$ .将花键副所受力矩中伴随一个周期次循环的扭矩值离散为  $T_{11}, T_{12}, \dots, T_{1i} (i = 1, 2, \dots, 17)$ , 其表达式为

$$T_{1i}(t) = T_m (1 + \varepsilon_T \cos \omega_T t).$$

式中:  $T_m$  为外激励扭矩的均值;  $\varepsilon_T$  为外激励扭矩

的幅值波动系数;  $\omega_T$  为系统的角速度.

随机给定两组服从正态分布<sup>[13]</sup>的齿侧间隙值  $b_j, b'_j$ , 采用 MATLAB 程序计算花键副实际参与啮合的齿数, 其流程如图 3 所示.

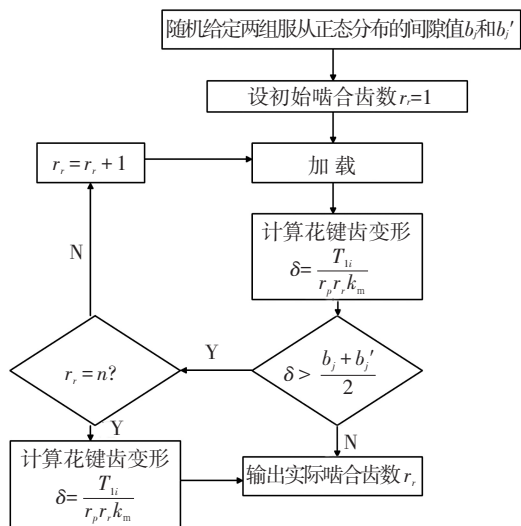


图 3 实际啮合齿数计算流程

计算得出离散的扭矩分别对应的花键副啮合齿数为  $r_{r_1}, r_{r_2}, \dots, r_{r_i} (i = 1, 2, \dots, 17)$ , 对于齿数  $n = 20$ , 平均扭矩为  $2\ 600\ \text{N} \cdot \text{m}$  的花键副计算结果如图 4 所示. 由图 4 可看出, 在伴随一个次循环周期的载荷下, 花键副实际参与啮合的齿数呈线性分段特征分布. 波动系数为 0.1 时, 实际参与啮合的齿数分布比较平稳, 波动系数为 0.5 时, 由于扭矩变化相对较大, 且齿侧间隙不同, 导致参与啮合的齿数不稳定.

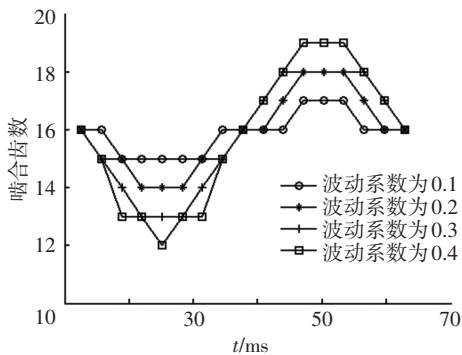


图 4 实际啮合齿数随波动系数变化规律

### 3 花键副动力学参数确定

#### 3.1 综合时变啮合刚度计算

在 PRO/E 中建立花键副实体模型并导入 ANSYS 软件中, 定义单元类型为 SOLID186. 定义材料弹性模量为  $210\ \text{GPa}$ , 泊松比 0.28、密度  $7\ 800\ \text{kg}/\text{m}^3$ 、摩擦系数取 0.3, 由于本节采用花键副全齿模型分析, 为了减少不必要的单元和提高

计算效率, 划分网格时花键齿接触处网格细化, 不会产生应力集中的部位网格相对疏松. 将内花键设置为目标面, 花键轴为接触面, 建立接触对, 接触刚度因子为 1.0, 最大渗透范围为  $0.1^{[14]}$ , ICONT 初始靠近因子选用  $1.0 \times 10^{-10}$ . 将内花键外圆柱面进行全约束, 外花键轴除绕 Z 轴旋转的自由度外其余也全约束, 在花键轴外圆柱面上连线通过轴中心对称的两条母线的各个节点处分别施加 X 和 -X 方向的力, 形成力偶, 力的大小  $F_i (i = 1, 2, \dots, 17)$  计算如下:

$$F_i = T_{i1} / (2 \times r_2 \times N)$$

式中:  $T_{i1}$  分别为  $T_1(t)$  离散的扭矩值  $T_{11}, T_{12}, \dots, T_{1i} (i = 1, 2, \dots, 17)$ ,  $N$  为每条线上节点总数. 求解后得出对应的接触压力  $F_{mi}$  及变量  $\delta_i$ . 由刚度计算公式  $k = F_n / \delta$  计算出 17 组扭矩分别对应的时变啮合刚度, 如图 5、6 所示.

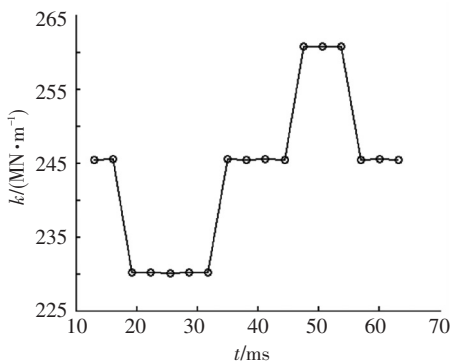


图 5 刚度随时间的变化

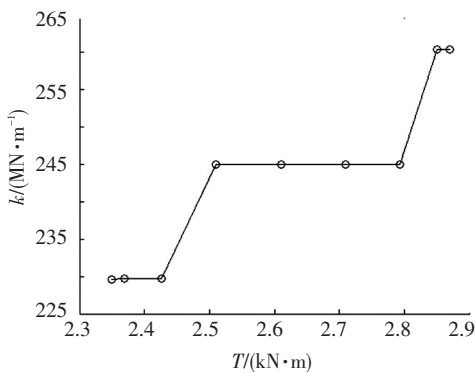


图 6 刚度随扭矩的变化

由图 5 可看出, 花键副啮合刚度随时间变化呈周期变化, 其平均啮合刚度为  $245\ \text{MN}/\text{m}$ , 频率和扭矩相同; 由图 6 可看出, 由于实际参与啮合的齿对数在一定范围的扭矩值内是不变的, 因此, 综合时变啮合刚度随扭矩呈分段线性分布. 考虑时变啮合刚度时研究花键副非线性动力学行为, 需要将时变啮合刚度曲线的函数表达式代入动力学方程中. 由于啮合刚度是周期性函数, 因此采用傅

里叶级数对其进行拟合,在初始相位为零的情况下拟合后的近似表达式为

$$k_i(t) = k_m + k_a \cos(\omega_T t).$$

式中:  $k_m$  为平均啮合刚度;  $k_a$  为刚度的波动幅值;  $\omega_T$  为系统角速度.

### 3.2 啮合阻尼的计算方法

由于花键副多个键齿同时参与啮合,其啮合阻尼比较复杂,不易准确求得.因此,参照齿轮副的啮合阻尼计算经验公式,取啮合阻尼比  $\xi$  为常数,则其啮合阻尼为

$$c_i = 2\xi\sqrt{k_m/(1/M_e + 1/M_i)}.$$

式中:  $k_m$  为花键副的平均啮合刚度;  $M_e, M_i$  分别为外、内花键副的等效质量;  $\xi$  为啮合阻尼比,其取值范围约为 0.03 ~ 0.17<sup>[15]</sup>.

### 3.3 轴的扭转刚度

根据材料力学理论,轴的扭转刚度为

$$K_S = GI_S/l_S.$$

式中:  $G$  为材料的剪切弹性模量;  $I_S$  为轴的转动惯量,  $I_S = \pi d^4/32$ ;  $d$  为轴的直径;  $l_S$  为轴的受扭长度.

### 3.4 轴的扭转阻尼

轴的扭转阻尼的经验计算公式为

$$c_s = 2\xi_s\sqrt{K_S I_S}.$$

式中:  $K_S$  为轴的扭转刚度;  $I_S$  为轴的转动惯量;  $\xi_s$  为轴的扭转阻尼比,其取值范围为 0.005 ~ 0.075<sup>[15]</sup>.

## 4 非线性动力学特性分析

### 4.1 非线性动力学特性分析

花键副齿数  $n = 20$ ,  $m = 2.5$  mm, 压力角为  $30^\circ$ , 利用龙格库塔法对该动力学方程进行求解.图 7~10 为系统平均扭矩为 2 600 N·m, 转速分别为 300、348、360、1 080 r/min 时系统第 2 自由度的动态响应.

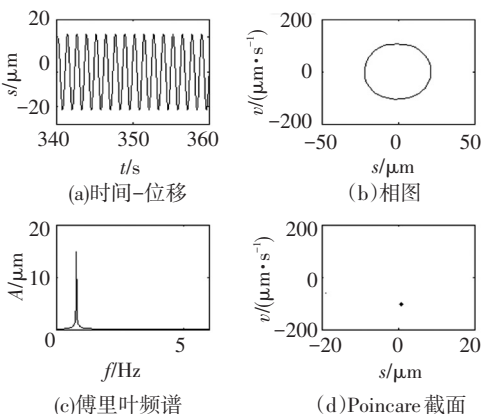


图 7 转速为 300 r/min 时系统动态响应

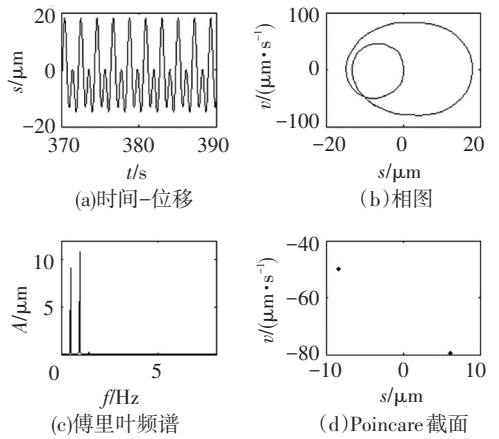


图 8 转速为 348 r/min 时系统动态响应

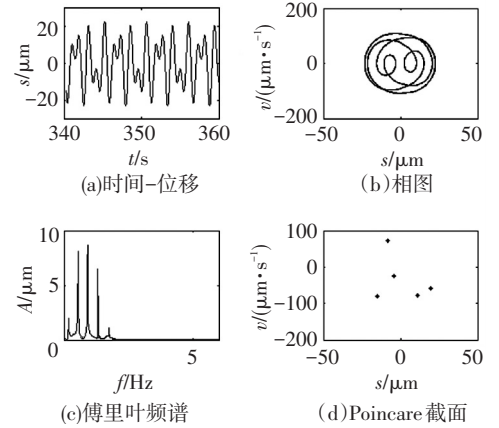


图 9 转速为 360 r/min 时系统动态响应

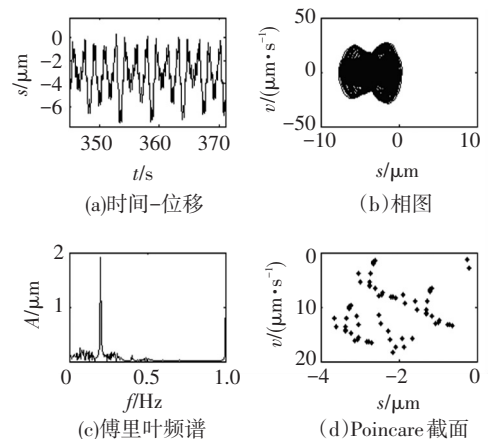


图 10 转速为 1 080 r/min 时系统动态响应

可以看出,当系统转速为 300 r/min 时,系统呈简谐响应;当系统转速为 348 r/min 时,系统呈两周期响应,傅里叶频谱图上分布着两个离散的谱线;当系统转速为 360 r/min 时,系统呈 5 周期响应,其 Poincaré 截面上有 5 个离散的点;当系统转速为 1 080 r/min 时,系统进入混沌响应.

### 4.2 花键副动载特性分析

花键副系统所受平均载荷  $F_m = T_m/r_2$ 、动态载荷为

$$F_d = F_m + k_t x_2(t),$$

则花键副动载系数为  $k_v = F_d/F_m$ . 分别改变系统

所受扭矩的平均值及给定四组不同齿侧间隙  $b_1$ 、 $b_2$ 、 $b_3$ 、 $b_4$ , 且每组对应的均值  $\sigma_{b_1} < \sigma_{b_2} < \sigma_{b_3} < \sigma_{b_4}$ , 花键副动载系数求解结果如图 11、12 所示。

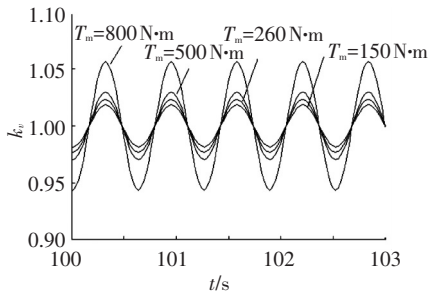


图 11 扭矩对动载系数的影响

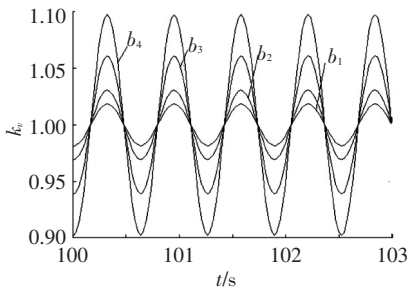


图 12 齿侧间隙对动载系数的影响

由图 11、12 可看出, 系统的动载系数也呈周期性变化, 其值随扭矩的增大而增大, 随齿侧间隙的增大而增大。

## 5 结 论

1) 花键副啮合刚度随时间变化呈周期变化, 在本文算例中其平均啮合刚度为 245 MN/m, 频率和扭矩相同; 综合时变啮合刚度随扭矩呈分段线性分布。

2) 当系统转速为 300 r/min 时, 系统呈简谐响应; 当系统转速为 348 r/min 时, 系统呈两周期响应, 傅里叶频谱图上分布着两个离散的谱线; 当系统转速为 360 r/min 时, 系统呈 5 周期响应, 其庞加莱截面上有 5 个离散的点; 当系统转速为 1 080 r/min 时, 系统进入混沌响应。

3) 花键副的动载系数也呈周期性变化, 且随扭矩和齿侧间隙的增大而增大。因此, 通过控制花键加工精度及啮合精度等措施, 减小小齿侧间隙, 能有效提高花键副工作的稳定性。

## 参考文献

[1] ROBINS R R. Tooth engagement evaluation of involute spline couplings [D]. [S. l.]: Engineering Brigham Young University, 2008.

[2] TJEMBERG A. Load distribution in the axial direction in a spline coupling [J]. Engineering Failure Analysis, 2001, 8(6): 557-570.

[3] BARROT A, PAREDES M, SARTOR M. Extended equations of load distribution in the axial direction in a spline coupling [J]. Engineering Failure Analysis, 2009, 26(1): 200-211.

[4] SILVERS J, SORENSEN C D, CHASE K W. A new statistical model for predicting tooth engagement and load sharing in involute splines [C]//American Gear Manufacturers Association Fall Technical Meeting 2010. Virginia: American Gear Manufacturers Association, 2010:1-17.

[5] CURÀ F, MURA A, GRAVINA M. Load distribution in spline coupling teeth with parallel offset misalignment [J]. Journal of Mechanical Engineering Science, 2012, 27(10): 2195-2205.

[6] LEEN S B, RICHARDSON I J, MCCOLL I R, et al. Macroscopic fretting variables in a splined coupling under combined torque and axial load [J]. The Journal of Strain Analysis for Engineering Design, 2001, 36(5): 481-496.

[7] RATSIMBA C H H, MCCOLL I R, WILLIAMS E J, et al. Analysis and prediction of fretting wear damage in a representative aeroengine spline coupling [J]. Wear, 2004, 257(11): 1193-1206.

[8] DING J, MCCOLL I R, LEEN S B. The application of fretting wear modelling to a spline coupling [J]. Wear, 2007, 262(9/10): 1205-1216.

[9] DING J, SUM W S, SABESAN R, et al. Fretting fatigue predictions in a complex coupling [J]. International Journal of Fatigue, 2007, 29(7): 1229-1244.

[10] DING J, LEEN S B, WILLIAMS E J, et al. Finite element simulation of fretting wear fatigue interaction in spline couplings [J]. Tribology, 2008 (2): 10-24.

[11] MADGE J J, LEEN S B, SHIPWAY P H. The critical role of fretting wear in the analysis of fretting fatigue [J]. Wear, 2007, 263(1-6 SPEC ISS): 542-551.

[12] KAHRAMAN A. A spline joint formulation for drive train torsional dynamic models [J]. Journal of Sound and vibration, 2001, 241(2): 328-336.

[13] CHASE K W, SORENSEN C D, DECAIRES B. Variation analysis of tooth engagement and load sharing in involute splines [C]// American Gear Manufacturers Association Fall Technical Meeting 2010. Virginia: American Gear Manufacturers Association, 2010: 54-55.

[14] 胡正根, 朱如鹏, 靳广虎, 等. 航空渐开线花键副微动摩擦接触参数分析 [J]. 中南大学学报: 自然科学版, 2013, 44(5): 1822-1828.

[15] 李润方, 王建军. 齿轮系统动力学: 振动、冲击、噪声 [M]. 北京: 科学出版社, 1997.