

# 挠性系统谐振频率摄动范围的几何解法

王永坤, 孙明玮, 刘忠信, 陈增强

(南开大学 自动化系, 300071 天津)

**摘要:** 基于  $D$  分割法研究了挠性系统弱阻尼谐振频率的摄动范围问题. 由于挠性系统的谐振频率分别出现在一次项和二次项中, 因此其摄动是非线性的. 通过引入两个摄动因子, 将问题转化为二维参数鲁棒摄动问题, 设计了一种基于  $D$  分割法的几何分析方法, 求得两个因子的鲁棒摄动区域, 该区域与特定直线的交点即为谐振频率的摄动边界值. 通过算例验证了该方法的有效性, 解决了挠性系统中谐振频率的摄动范围求解问题, 同时揭示了谐振频率摄动与  $H_\infty$  范数的对应关系.

**关键词:** 挠性系统; 鲁棒稳定性; 谐振频率; 摄动;  $H_\infty$  范数

中图分类号: TP202

文献标志码: A

文章编号: 0367-6234(2014)11--06

## Geometrical solution to perturbation range of resonant frequency for flexible systems

WANG Yongkun, SUN Mingwei, LIU Zhongxin, CHEN Zengqiang

(Dept. of Automation, Nankai University, 300071 Tianjin, China)

**Abstract:** The range of the lightly damped resonant frequency in the flexible system is investigated based on  $D$ -decomposition approach. In the flexible system, the resonant frequency exists in the first-order and second-order terms, making its perturbation possess a nonlinear form. In this paper, two perturbation factors are introduced to reformulate the problem as a two-dimension parameter perturbation problem. Then, a geometric algorithm based on the  $D$ -decomposition approach is developed to determine the precise robust area of the two factors. The perturbation range of the resonant frequency can be obtained as the intersection points between the boundary of this area and a specific line. Numerical examples are provided to illustrate the effectiveness of the proposed method. Meanwhile, the relationship between the perturbation range and the  $H_\infty$  norm is also revealed.

**Keywords:** flexible systems; robust stability; resonant frequency; perturbation;  $H_\infty$  norm

存在挠性结构或包含挠性部件的一类系统称为挠性系统. 挠性系统中的挠性部件分为很多种, 例如卫星的太阳能帆板<sup>[1-3]</sup>、机器人的机械臂<sup>[4]</sup>、大型运载火箭或具有一定范围长细比的有翼飞行器. 此类系统的一个主要特点是系统中存在弱阻尼的谐振模态, 在控制系统设计时需要特殊考虑, 以保证闭环系统稳定<sup>[5]</sup>. 挠性系统振

动模态谐振频率的理想值或者是通过理论方法计算出来的, 或者是通过地面振动试验测量出来的. 理论计算中分布质量和结构特性存在的误差, 地面试验中空天的不一致性以及测量误差等, 都会导致谐振频率误差. 飞行器在飞行过程中, 振动模态的一些特征参数会随着温度和质量的而变化, 因此通过理论计算或者模态振动试验得到的谐振频率具有一定的不确定性, 在控制系统的设计过程中必须考虑其对于闭环鲁棒稳定性的影响. 文献[6-7]指出采用  $H_\infty$  回路成形法<sup>[8-10]</sup> 设计挠性控制系统时, 由于系统中弱阻尼模态的存在, 会减小谐振频率的实际摄动范围, 并不能保证系统具有期望的鲁棒性, 但是并没有给出计算谐振频率实际摄动范围的方法, 同时文献[7]计算

收稿日期: 2013-12-02.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61174094, 61273138); 新世纪优秀人才支持计划资助项目(NCET-10-0506); 天津市自然科学基金资助项目(13JCYBJC17400, 14JCYBJC18700).

作者简介: 王永坤(1988—), 男, 博士研究生;  
刘忠信(1975—), 男, 教授, 博士生导师;  
陈增强(1964—), 男, 教授, 博士生导师.

通信作者: 孙明玮, smw\_sunmingwei@163.com.

出的系统  $H_\infty$  范数的逆并不代表系统中谐振频率扰动值的百分比, 它实际是系统综合扰动范围的一个指标. 由于谐振频率分别出现在一次项和二次项中, 导致其非线性的耦合扰动形式, 传统的线性或双线性分析方法不再适用<sup>[11-12]</sup>. 目前还没有发现文献报道存在系统性的计算方法可以直接确定挠性系统谐振频率的扰动范围. 针对这个问题, 工程上只能采用扰动试验法, 通过试凑的方式摸索得到谐振频率的稳定性边界, 该方法不仅费时费力, 而且精度难以得到保证. 因此, 本文给出了一种基于  $D$  分割法<sup>[13]</sup> 的系统鲁棒稳定性分析方法, 给出了弱阻尼模态下谐振频率扰动范围的几何求法, 并通过一个算例验证了该方法的有效性, 同时通过另一算例说明了本方法可直接推广应用到具有多个模态的挠性系统分析中.

## 1 问题描述

本文以具有太阳能帆板的卫星为例来分析挠性系统谐振频率的扰动范围, 但文中方法也可直接推广到有翼飞行器等挠性对象的分析中. 一般来说, 挠性结构振动具有无穷多个模态, 但是振动能量主要集中在低阶项上, 因此挠性系统设计时常以一阶模态为主, 将高阶模态作为未建模动态来处理. 在控制系统设计时要求控制器的增益在一阶模态频率后迅速衰减. 图 1 给出了卫星示意图. 在图 1(a) 中,  $\theta_1$  是卫星主体与星体的夹角,  $\theta_2$  是卫星姿态角, 代表星体传感器与仪表设备的夹角, 图 1(b) 所示为将传感器安装到与  $\theta_2$  相连的圆盘上的卫星等效机械系统图. 对图 1 所示模型, 假设用弹簧链接的两个质体的扭矩常数为  $k$ , 粘性阻尼系数为  $b$ , 建立线性模型如下<sup>[4]</sup>:

$$\begin{cases} J_1 \ddot{\theta}_1 + b(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + k(\theta_1 - \theta_2) = T_c, \\ J_2 \ddot{\theta}_2 + b(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) + k(\theta_2 - \theta_1) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

其中  $T_c$  为作用在主体上的控制力矩,  $J_1$ 、 $J_2$  分别是图 1(b) 中两个质体的转动惯量. 由式(1) 可得含有一维振动模态的挠性系统模型为

$$\frac{\theta_2}{T_c} = \frac{c_0}{s^2} + \frac{c_1}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}. \quad (2)$$

其中

$$\begin{cases} \omega_n = \sqrt{\frac{J_1(J_1 + J_2) \cdot k}{J_2}}, \\ \xi = \sqrt{\frac{J_1(J_1 + J_2)}{4J_2 \cdot k}} \cdot b, \\ c_0 = -c_1 = \frac{1}{J_1 + J_2}. \end{cases} \quad (3)$$

其中  $c_0$ 、 $c_1$  是模态幅值, 只考虑一阶模态时  $c_0 = -c_1$ ,  $\omega_n$  和  $\xi$  分别是系统的谐振频率和阻尼比. 在卫星飞行过程中, 参数  $k$  会随温度的波动以及外形结构特性而变化, 因此由式(3) 可知谐振频率  $\omega_n$  会发生扰动. 从式(2) 可以看出  $\omega_n$  分别出现在一次项和二次项中, 导致其扰动形式是非线性的, 其对于闭环控制系统的影响不是简单的线性或者双线性形式, 传统的分析方法无法直接应用<sup>[11-12]</sup>.

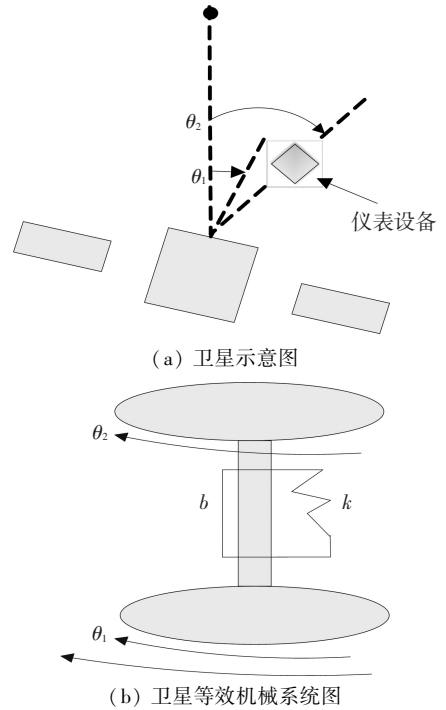


图 1 卫星及其双体

## 2 基于 $D$ 分割法的鲁棒稳定性分析

### 2.1 $D$ 分割法

考虑如下反馈控制系统的闭环特征多项式:

$$\delta(s, L, z) = [s^n + b_{n-1}(z)s^{n-1} + \dots + b_1(z)s + b_0] + [a_m(z)s^m + a_{m-1}(z)s^{m-1} + \dots + a_1(z)s + a_0]e^{msL}. \quad (4)$$

其中  $a_k(z)$  和  $b_k(z)$  分别为参数向量  $z$  的连续函数,  $z = [z_1, z_2, \dots, z_l]^T$ .  $L$  为系统的时滞常数,  $L \in \mathbf{H} \subset \mathbf{R}$ ,  $z_i \in \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}^L$ ,  $\mathbf{R}$  为实数集.

对于给定  $l$  阶向量  $z$  和  $L$ , 若特征多项式  $\delta(s, L, z)$  无非负实部零点, 则称其渐近稳定. 由于  $\delta(s, L, z)$  的零点为  $z$  和  $L$  的连续函数, 空间  $\mathbf{H} \times \mathbf{Q}$  被超曲面分割成若干个区域, 超曲面上的点对应的  $\delta(s, L, z)$  至少有一个纯虚根或  $s = \infty$ , 这种分解法称为  $\mathbf{H} \times \mathbf{Q}$  的  $D$  分割法.  $D$  分割法的实质是将  $s$  平面上的虚轴映射为参数空间  $\mathbf{H} \times \mathbf{Q}$  的超曲面, 根据实数根穿越原点和穿越无穷, 复根穿越

虚轴得出  $D$  分割边界<sup>[14]</sup>.

$$\partial D = \partial D_0 \cup \partial D_\omega \cup \partial D_\infty.$$

其中

$$\partial D_0 \equiv \{ (L, z) \in \mathbf{H} \times \mathbf{Q}; \delta(0, L, z) = 0 \},$$

$$\partial D_\omega = \{ (L, z) \in \mathbf{H} \times \mathbf{Q}; \delta(\pm j\omega, L, z) = 0, \forall \omega \in (0, \infty),$$

$$\partial D_\infty = \begin{cases} (L, z) \in \mathbf{H} \times \mathbf{Q}, \text{ 当 } m = n, L \neq 0 \text{ 时;} \\ |a_m(z)| = 1, & \text{ 当 } m = n, L = 0 \text{ 时;} \\ a_m(z) + 1 = 0. \end{cases}$$

显然,随着  $z$  和  $L$  的连续变化,稳定系统变化到不稳定系统中间必然穿越  $\partial D$ . 换句话说,研究鲁棒稳定边界只需要通过分析  $\partial D$  就可以实现.

### 2.2 一维线性不确定系统的鲁棒稳定性分析

由于本文所研究问题的时滞特性可以忽略,因此考虑如下特征多项式:

$$P_c(s) = a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n. \quad (5)$$

其中  $a_i (i = 0, 1, \dots, n)$  是多项式系数,假设  $a_i (i = 0, 1, \dots, n)$  均可由特定参数  $d$  的线性函数表示,  $d$  是式(5)中的不确定参数,则上式可写为

$$P_c(s) = p(s)d + q(s). \quad (6)$$

其中  $p(s)$  和  $q(s)$  是两个互质的多项式. 假设当式(6)中的  $d = 0$  时,  $P_c(s)$  是稳定的.

此时,基于  $D$  分割法,鲁棒稳定边界  $\partial D$  上的  $p(s)$  和  $q(s)$  分别是

$$\begin{cases} p(j\omega) = f(\omega) + j\omega \cdot e(\omega), \\ q(j\omega) = h(\omega) + j\omega \cdot g(\omega). \end{cases}$$

其中  $f(\omega), e(\omega), h(\omega), g(\omega)$  均为实数多项式. 由  $P_c(j\omega) = 0$  有

$$\begin{cases} h(\omega) + d \cdot f(\omega) = 0, \\ \omega(g(\omega) + d \cdot e(\omega)) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

消去上式中  $d$ , 可得

$$\omega[g(\omega)f(\omega) - h(\omega) \cdot e(\omega)] = 0. \quad (8)$$

求解式(8)得到的正实根  $\omega_i$ , 表示系统的截止频率. 将  $\omega_i$  代入式(7)可得

$$d_i = \begin{cases} -h(\omega_i)/f(\omega_i), & f(\omega_i) \neq 0; \\ -g(\omega_i)/e(\omega_i), & e(\omega_i) \neq 0; \\ \infty, & f(\omega_i) = 0, \omega_i e(\omega_i) = 0. \end{cases}$$

定义

$$\begin{cases} d^+ = \min_{d_i > 0} (d_i), \\ d^- = \max_{d_i < 0} (d_i). \end{cases}$$

其中  $d^+, d^-$  即为在满足系统鲁棒稳定前提下,不确定参数  $d$  的正负摄动边界.

### 2.3 二维线性不确定系统的鲁棒稳定性分析

当式(5)的某些系数中存在  $d_1, d_2$  两个不确

定参数,并且这些系数均可表示为  $d_1, d_2$  的双线性函数形式时,就成为一个二维线性不确定问题. 假设当  $d_1 = d_2 = 0$  时,  $P_c(s)$  是稳定的. 为了确定  $d_1, d_2$  的鲁棒稳定区域,首先,令  $d_2 = 0$ ,采用 2.2 节的方法求得此时参数  $d_1$  的鲁棒稳定区域为  $[d_1^-, d_1^+]$ ; 然后,在区域  $[d_1^-, d_1^+]$  内均匀采样  $N$  个点,对于其中每一个  $d_{1,i} (i = 1, 2, \dots, N)$ ,求解此时关于不确定参数  $d_2$  的鲁棒稳定区域  $[d_{2,i}^-, d_{2,i}^+]$ ; 最后,分别连接点  $(d_{1,i}, d_{2,i}^-)$  和  $(d_{1,i+1}, d_{2,i+1}^-), (d_{1,i}, d_{2,i}^+)$  和  $(d_{1,i+1}, d_{2,i+1}^+)$ , 其中  $i = 1, 2, \dots, N - 1$ , 不确定参数的鲁棒稳定区域如图 2 阴影部分所示. 对于多维线性不确定系统,其鲁棒性分析方法类似. 对于存在二维或者多维不确定参数的系统,当各个不确定参数之间存在一定的关系,而参数之间的关系曲线与上述得到的鲁棒稳定区域的交点即为各个参数的摄动边界. 而摄动点一般在摄动边界内选取是有意义的.

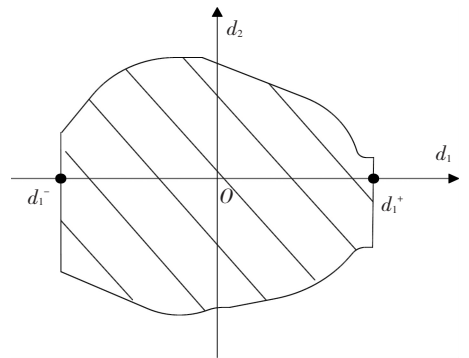


图 2 不确定参数鲁棒稳定区域示意图

### 2.4 挠性系统的鲁棒稳定性分析

考虑式(2)所表示的挠性系统,系统的闭环特征多项式为

$$s^4 + 2\xi\omega_n s^3 + \omega_n^2 s^2 + C(s) \cdot$$

$$[(c_0 + c_1)s^2 + 2c_0\xi\omega_n s + c_0\omega_n^2] = 0. \quad (9)$$

其中  $C(s)$  是控制器,谐振频率  $\omega_n$  是摄动因子,分别出现在一次项和二次项中.

现在考虑一个更广义的二维不确定性系统. 将式(9)中  $\omega_n$  的一次项和二次项分别表示为

$$\begin{cases} \omega_n = \hat{\omega}_n(1 + d_1), \\ \omega_n^2 = \hat{\omega}_n(1 + d_1) \cdot \hat{\omega}_n(1 + d_2). \end{cases} \quad (10)$$

其中  $\omega_n$  和  $\omega_n^2$  分别表示谐振频率摄动后的一次项和二次项,  $\hat{\omega}_n$  是谐振频率的标称值,  $d_1$  和  $d_2$  分别表示摄动的百分比,此时存在  $d_1$  和  $d_2$  两个不确定参数,转化为二维不确定性问题. 采用 2.3 节的方法,假设在给定  $\hat{\omega}_n, \xi, c_0, c_1$  和  $C(s)$  的情况下,绘制出不确定参数鲁棒稳定区域即图 3 中的阴影部分.

由于  $\omega_n^2 = \omega_n \cdot \omega_n$ ,即为两个相同的因子相乘,

因此  $\omega_n^2$  的两个扰动因子值相等. 在图 3 中绘制出直线  $d_1 = d_2$ , 与闭合区域边界的交点分别为  $(d_+, d_+)$  和  $(d_-, d_-)$ ,  $d_+$  和  $d_-$  分别是  $\omega_n$  在正负两个方向允许扰动的最大百分比. 由于阴影区域边界是连接采样点的折线段, 为了求取直线  $d_1 = d_2$  与边界的具体交点, 只需要顺序搜索相邻折线段端点, 直到其位于直线  $d_1 = d_2$  的两侧为止, 也就是折线段端点的纵横坐标之差首次发生符号改变为止.

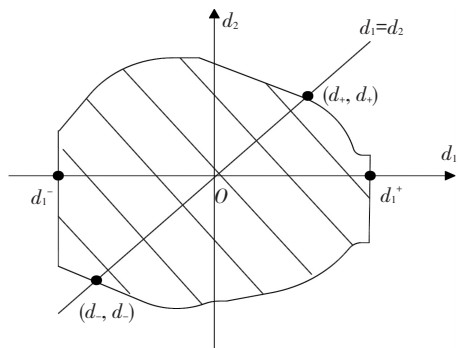


图 3 鲁棒稳定参数区域

对于包含二阶振动模式的挠性系统, 即存在  $\omega_{n1}$  和  $\omega_{n2}$  两个不确定参数. 首先令  $\omega_{n2}$  固定为标称值, 通过上述方法求得  $\omega_{n1}$  的扰动区间. 然后在  $\omega_{n1}$  的扰动区间内均匀采样, 对于每一个采样值, 可以求出  $\omega_{n2}$  的扰动边界值, 最终得到  $[\omega_{n1}, \omega_{n2}]$  的整体扰动区域. 对于包含多阶振动模式的挠性系统, 分析方法类似.

### 3 算例

**例 1** 考虑具有两个太阳能帆板的卫星模型<sup>[7]</sup>, 其中  $c_0 = 1.7319 \times 10^{-5}$ ,  $c_1 = 3.7859 \times 10^{-4}$ ,  $\omega_{n1} = 1.539 \text{ rad/s}$ ,  $\xi_1 = 0.003$ , 此类系统具有明显的挠性, 一阶模态的  $c_1$  大于刚性模态的  $c_0$ .

这里直接引用文献[7]中的控制器设计结果, 通过回路成形法得到  $H_\infty$  控制器. 首先给被控对象加入串联补偿环节, 使其具有期望的开环特性, 即回路成形. 然后针对补偿后的广义对象, 设计  $H_\infty$  控制器, 保证闭环系统的稳定性. 其中补偿函数选择为

$$W = 10\,000 \frac{s + 0.4}{s} \quad (11)$$

由式(2)、(10)和(11)可得广义的系统传递函数为

$$G_s(s) = \frac{s + 0.4}{s} \left( \frac{0.173}{s^2} + \frac{3.7869}{s^2 + 0.0092(1+d_1)s + 2.369(1+d_1)(1+d_2)} \right)$$

当  $d_1 = d_2 = 0$  时, 针对标称系统设计的  $H_\infty$  控

制器为

$$K_\infty(s) = \frac{2.27477(s^2 + 0.2792s + 0.04533)}{(s + 4.424)(s + 0.4048) \frac{(s^2 + 0.1796s + 1.043)}{(s^2 - 0.08909s + 0.1366)}}$$

因此可得闭环特征多项式

$$1 + G_s(s)K_\infty(s) = 0$$

令  $d_2 = 0$ , 根据 2.2 节一维不确定参数分析方法可以计算出  $d_1$  的允许扰动区间为  $[-0.6114, 0.3123]$ . 由于直线  $d_1 = d_2$  只通过第一、三象限, 因此针对每一个采样的  $d_{1,i}$ ; 当  $d_{1,i} \geq 0$  时, 只需求出此时对应的  $d_2$  扰动的上边界值  $d_{2,i}^+$ ; 当  $d_{1,i} < 0$  时, 只需求出此时对应的  $d_2$  扰动的下边界值  $d_{2,i}^-$ , 结果如图 4 所示. 直线  $d_1 = d_2$  与一、三象限边界的交点分别为  $(0.1386, 0.1386)$  和  $(-0.3514, -0.3514)$ , 表明谐振频率  $\omega_{n1}$  增加 13.86% 或减小 35.14% 后, 系统处于临界稳定状态,  $\omega_{n1}$  的扰动范围即为  $[-35.14\%, 13.86\%]$ .

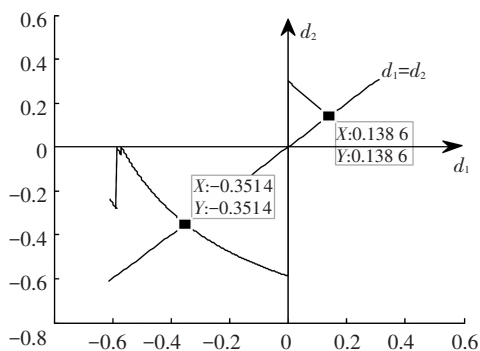


图 4 谐振频率  $\omega_{n1}$  的扰动范围

扰动系统的阶跃响应曲线如图 5 所示, 其中实线表示标称系统的响应曲线, 短虚线和长虚线分别代表谐振频率扰动 -35.14% 和 13.86% 时的响应曲线. 可以看出当  $\omega_{n1}$  的扰动达到所求的正负边界时, 系统出现等幅振荡, 验证了本文提出方法的正确性.

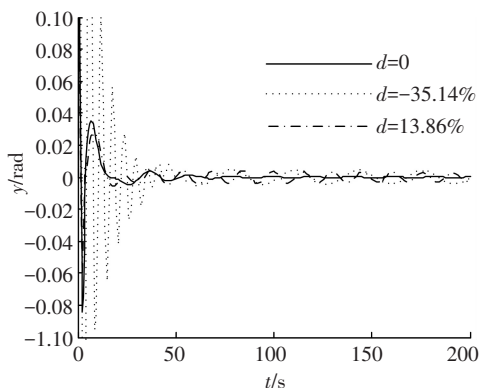


图 5 系统的阶跃响应曲线

而采用文献[7]的分析方法, 求得系统的  $H_\infty$

范数  $\gamma = 2.486$ , 则  $\gamma^{-1} \approx 0.4023$ , 根据小增益定理可得只要对象的摄动小于 40.23%, 就可以保证闭环鲁棒稳定. 而实际情况是当谐振频率正摄动 14% 时就达到了稳定边界, 文献[7]得出的结论是: 此情况的出现是由于对象存在弱阻尼模态, 压缩了实际允许的摄动范围, 因此导致  $H_\infty$  回路成形法设计的系统并不一定具有鲁棒性.

本文经过分析,  $\gamma^{-1} \approx 0.4023$  表示当系统中的不确定参数  $\omega_{n_1}$  摄动值达到最大时, 对应整体不确定项的  $H_\infty$  范数为 0.4023. 定义

$$\Delta G = G - G_0.$$

其中  $G$  和  $G_0$  分别表示实际对象和标称对象,  $\Delta G$  表示对象的整体不确定项, 其  $H_\infty$  范数与  $\Delta\omega_{n_1}$  的关系如图 6 所示, 其中横坐标表示谐振频率的摄动值, 纵坐标表示  $\|\Delta G\|_\infty$ . 从图中可以看出当谐振频率  $\omega_{n_1}$  摄动达到正向边界即 13.86% 时,  $\|\Delta G\|_\infty$  为 0.4075, 几乎等于文献[7]给出的 0.4023. 因此, 系统  $H_\infty$  范数的逆并不表示某一参数的摄动范围, 而是一种结构参数摄动引起的非结构不确定性变化范围, 二者本质上是不同的.

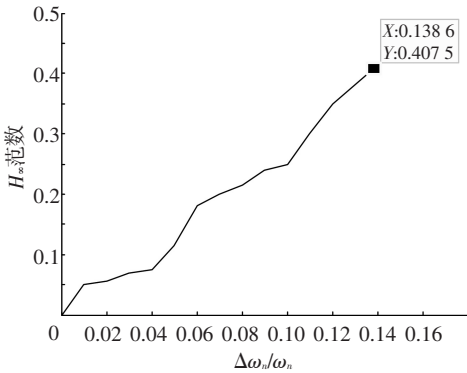


图 6 整体不确定项的  $H_\infty$  范数

**例 2** 仍采用算例 1 的模型以及控制器设计结果, 并在此基础上加入一个二阶振动模态, 得到如下包含两个振动模态的挠性系统:

$$G(s) = \frac{c_0}{s^2} + \sum_{i=1}^2 \frac{c_i}{s^2 + 2\xi_i\omega_{n_i}s + \omega_{n_i}^2}.$$

其中  $c_0, c_1, \omega_{n_1}, \xi_1$  保持例 1 中的数值不变,  $c_2 = 1.02 \times 10^{-4}$ ,  $\omega_{n_2} = 5.2$ ,  $\xi_2 = 0.002$ , 谐振频率  $\omega_{n_1}$  和  $\omega_{n_2}$  是系统中的不确定参数.

首先令  $\omega_{n_2}$  固定为标称值, 对  $\omega_{n_1}$  进行摄动分析. 通过本文提出的方法可得  $\omega_{n_1}$  的摄动比例为  $d_1 \in [-0.36, 0.163]$ . 对比例 1 可见, 由于二阶模态的能量比较低, 对于一阶模态振动频率的摄动范围影响不是很大, 因此一般在对挠性系统进行分析时, 通常只需考虑能量较大的低阶振动模态即可. 当  $\omega_{n_1}$  的摄动达到临界值时, 系统的阶跃

响应曲线如图 7 所示出现等幅振荡.

在区间  $[-0.36, 0.163]$  内均匀采样, 对于每一个对应的  $\omega_{n_1}$  值, 求得  $\omega_{n_2}$  摄动比例的边界值, 最终可得  $\omega_{n_1}, \omega_{n_2}$  的摄动鲁棒稳定区域, 即图 8 中曲线与坐标轴所围区域, 曲线表示摄动的边界. 需要说明的是二阶模态谐振频率  $\omega_{n_2}$  的摄动没有上界, 反映了谐振频率越高对于整个刚体的影响越小, 符合实际经验. 在求得区域选取内点  $(-0.2, -0.5)$ , 阶跃响应如图 9(a) 所示, 可以看出此时系统处于收敛的趋势; 在边界上选取  $(-0.32, -0.713)$  和  $(0.07, -0.793)$ , 阶跃响应如图 9(b) 所示, 输出产生等幅振荡.

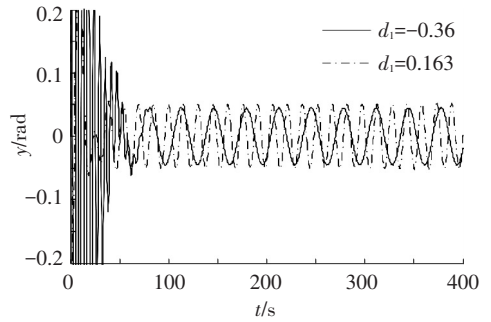


图 7  $\omega_{n_1}$  摄动时系统的阶跃响应曲线

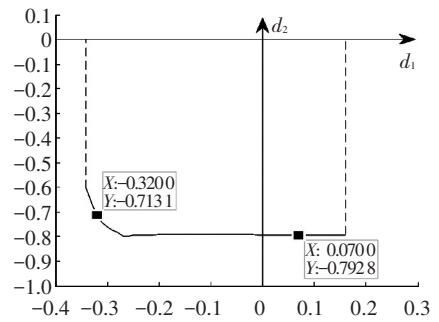
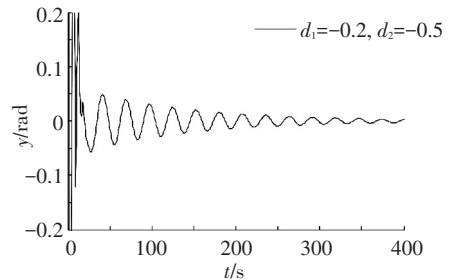
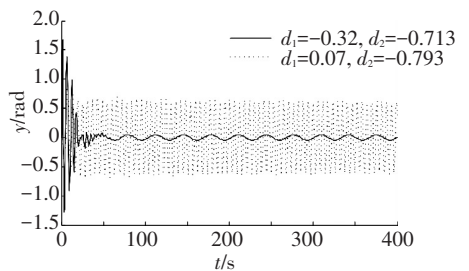


图 8 谐振频率  $\omega_{n_1}, \omega_{n_2}$  的摄动鲁棒稳定范围



(a) 内点摄动



(b) 边界点摄动

图 9  $\omega_{n_1}, \omega_{n_2}$  摄动时系统的阶跃响应曲线

## 4 结 语

本文针对挠性系统中不确定谐振频率的鲁棒稳定性分析问题,设计了一种基于  $D$  分割法的几何分析方法,给出了振动模态谐振频率的精确摄动范围. 通过数值算例验证了该方法的有效性,对于实际工程具有一定参考价值. 该方法由于突破了传统鲁棒稳定性分析要求摄动参数必须是线性或者双线性的形式限制,也可推广到其他含参数非线性摄动形式的场合,通过绘制相应的几何曲线求取特定参数的鲁棒稳定性范围.

## 参考文献

- [1] MCFARLANE D C, GLOVER K. Robust controller design using normalized coprime factor plant descriptions [M]. New York: Springer Verlag, 1990: 205–208.
- [2] 刘瞰, 杨大明. 挠性卫星动力学及姿态控制模型的建立[J]. 哈尔滨工业大学学报, 1985, 17(A8): 1–17.
- [3] 崔乃刚, 刘家夫, 荣思远. 柔性太阳帆航天器动力学建模与姿态控制[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2011, 43(7): 1–5.
- [4] FRANKLIN G F, POWELL J D, ABBAS E N. Feedback control of dynamic systems [M]. 4th Edition. Reading, MA: Addison-Wesley, 1986: 488–491.
- [5] 游江, 赵国良, 罗耀华.  $H_\infty$  混合灵敏度的鲁棒性设计及在挠性系统控制中的应用[J]. 仪器仪表学报, 2006, 27(6): 556–558.
- [6] 何朕, 孟范伟, 刘伟, 等.  $H_\infty$  回路成形设计的鲁棒性[J]. 自动化学报, 2010, 36(6): 890–893.
- [7] 何朕, 孟范伟, 王广雄, 等. 挠性系统的控制设计和  $H_\infty$  回路成形法[J]. 控制理论与应用, 2013, 30(8): 1014–1020.
- [8] MCFARLANE D C, GLOVER K. A loop shaping design procedure using  $H_\infty$  synthesis [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1992, 37(6): 759–769.
- [9] KAITWANIDVILAI S, OLRANTHICHACHAT P. Robust loop shaping—fuzzy gain scheduling control of a servopneumatic system using particle swarm optimization approach [J]. Mechatronics, 2011, 21(1): 11–21.
- [10] OSINUGA M, PATRA S, LANZON A. Smooth weight optimization in  $H_\infty$  loop-shaping design [J]. Systems & Control Letters, 2010, 59(11): 663–670.
- [11] WEDELL E, CHUANG C H, WIE B. Stability robustness margin computation for structured real-parameter perturbations [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1991, 14(3): 607–614.
- [12] WIE B, LU J B. Two real critical constraints for real parameter margin computation [J]. Journal of Guidance, Control, and Guidance, 1994, 17(3): 561–569.
- [13] GRYAZINA E N, POLYAK B T. Stability regions in the parameter space: D-decomposition revisited [J]. Automatica, 2006, 42(1): 13–26.
- [14] GRYAZINA E N. The D-decomposition theory [J]. Automation and Remote Control, 2004, 65(12): 1872–1884.

(编辑 张 宏)