

doi: 10.11918/j.issn.0367-6234.2015.01.007

# 平面铰链四杆机构的轨迹综合方法

于红英, 赵彦微, 许栋铭

(哈尔滨工业大学 机电工程学院, 150001 哈尔滨)

**摘要:** 为提高平面铰链四杆机构轨迹综合的速度与精度, 提出基于B样条曲线的综合方法. 采用三次非均匀B样条曲线对连杆曲线进行拟合, 将B样条曲线控制多边形各相邻两边的夹角作为连杆曲线的特征参数, 将大量连杆曲线特征参数和对应的机构尺寸参数存入计算机以建立电子图谱库; 当输入一定数目的有序离散数据点时, 通过B样条曲线拟合得到期望曲线, 提取期望曲线的特征参数; 再利用神经网络将期望曲线的特征参数与电子图谱库中特征参数进行匹配, 从而找到满足要求的机构, 最终达到轨迹综合的目的. 设计实例表明, 该方法可快速实现四杆机构的轨迹综合, 综合的精度高且所提取的特征参数与连杆曲线方位、缩放比例无关, 减少了图谱库的数据冗余.

**关键词:** 平面四杆机构; 轨迹综合; 连杆曲线; B样条曲线; 特征参数

**中图分类号:** TH112.1      **文献标志码:** A      **文章编号:** 0367-6234(2015)01-0040-08

## A path synthesis method of planar hinge four-bar linkage

YU Hongying, ZHAO Yanwei, XU Dongming

(School of Mechatronics Engineering, Harbin Institute of Technology, 150001 Harbin, China)

**Abstract:** To improve the speed and accuracy of path synthesis of planar hinge four-bar linkage, a path synthesis method based on B-spline curves was proposed. The method adopted cubic non-uniform B-spline curves to fit coupler curves and used angles between the two adjacent sides of the B-spline curve control polygon as characteristic parameters of coupler curves. Characteristic parameters with dimension parameters of the corresponding four-bar linkage were put into computer to establish an electronic atlas. When a certain number of ordered discrete points were given, a desired curve that passed through these points was constructed by B-spline curve fitting. Characteristic parameters of the desired curve were extracted. Then characteristic parameters of the desired curve with characteristic parameters of the electronic atlas were matched by neural networks to find the four-bar linkage which met the requirements. Ultimately the goal of path synthesis was achieved. Calculation examples show that it can quickly realize path synthesis of four-bar linkage and has high accuracy of path synthesis. And the extracted characteristic parameters have nothing to do with location and scale of coupler curve, reducing the atlas data redundancy.

**Keywords:** planar four-bar linkage; path synthesis; coupler curves; B-spline curves; characteristic parameters

轨迹综合是平面连杆机构综合的3类基本问题之一, 其主要目的是找到一个连杆机构, 使其连杆平面上某一点能依次通过某一预先给定的轨迹. 平面铰链四杆机构的轨迹综合一般有3种方法: 图解法、解析法和图谱法.

传统的图解法存在作图误差大, 综合精度低

等缺点, 目前已经很少使用. 解析法通常与各种优化方法结合运用, 通过寻求最小目标函数来获得最优解<sup>[1-4]</sup>, 求解精度较高, 但通常要受到初值选择以及寻优方法的影响而难于收敛. 随着计算机技术的发展, 计算机的海量存储能力和快速检索能力使得图谱法在轨迹综合中应用得越来越广泛. 文献[5]通过建立已知机构的连杆转角曲线数据库, 将要实现的封闭轨迹曲线也转化成连杆转角曲线, 再与数据库中已有转角曲线比较, 进而获得满足要求的机构. 文献[6-7]中提出利用神经

收稿日期: 2014-04-09.

作者简介: 于红英(1968—), 女, 教授, 博士生导师.

通信作者: 于红英, mcadyhy@hit.edu.cn.

网络对平面连杆机构进行轨迹综合, 通过运动学仿真建立了一个大样本库, 然后对神经网络进行训练, 可以通过训练好的神经网络找到综合问题的近似解. 文献[8-9]中采用小波分析方法提取连杆轨迹的特征参数, 构建连杆曲线图谱库进行轨迹综合. 文献[10]中采用均匀 B 样条曲线来拟合连杆轨迹, 提取 B 样条曲线控制顶点的坐标作为轨迹特征参数进行轨迹综合. 文献[11]中将连杆曲线进行快速傅里叶变换, 提取傅里叶级数作为描述连杆曲线的谐波特征参数, 然后生成连杆曲线的电子图谱库, 再从库中检索出满足要求的机构. 上述各种方法中有些方法图谱库中存储数据较多, 有些方法需要进行复杂后处理才能得到机构的实际尺寸和安装尺寸, 导致不易用编程的方法快速找到合适的机构.

本文以曲柄摇杆机构为例, 采用三次非均匀 B 样条曲线来拟合平面连杆曲线, 通过程序自动获取连杆曲线的型值点进行 B 样条曲线拟合, 将 B 样条曲线的控制多边形各相邻两边间的夹角作为表征连杆曲线形状特征的参数, 连同对应的机构尺寸参数建立连杆曲线的电子图谱库, 再利用人工神经网络进行特征参数匹配, 快速获得合适的平面铰链四杆机构, 最终达到轨迹综合的目的.

### 1 原始连杆曲线的生成

如图 1 为曲柄摇杆机构 ABCD, 其中假设 AB 为曲柄, 各杆实际杆长为  $l_1, l_2, l_3, l_4$  和  $l_5$ , BP 与连杆 BC 沿逆时针方向所成的角为  $\delta (0^\circ \leq \delta < 360^\circ)$ .

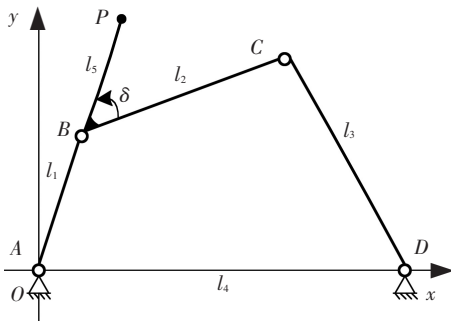


图 1 曲柄摇杆机构的参数

为研究方便, 本文采用量纲一的相对杆长, 即取曲柄  $r_1 = l_1/l_1 = 1, r_2 = l_2/l_1, r_3 = l_3/l_1, r_4 = l_4/l_1, r_5 = l_5/l_1$ . 众所周知, 只有  $r_1, r_2, r_3$  及  $r_4$  满足一定的长度关系时, 才能构成以  $r_1$  为曲柄的曲柄摇杆机构. 现以  $r_2 = a (a \geq 1)$  为例说明如何确定  $r_3, r_4$  的取值范围. 如图 2 所示, 建立以相对杆长  $r_2, r_3, r_4$  为坐标轴的三维直角坐标系  $Or_2r_3r_4$ . 过  $r_2$

轴上的一点  $(a, 0, 0)$  作一平行于  $Or_3r_4$  的平面  $M$ , 在平面  $M$  内过点  $(a, 1, a)$  和点  $(a, a, 1)$  作两条与  $r_3$  轴正向成  $45^\circ$  的射线  $EE'$  和  $FF'$ , 连接  $E, F$  两点. 可以证明, 线段  $EF$  与两射线  $EE', FF'$  所围成的条形区域为  $r_3, r_4$  的取值范围. 如图 2 中  $G$  点的坐标为  $(a, b, c)$ , 则代表  $r_1 = 1, r_2 = a, r_3 = b, r_4 = c$  的曲柄摇杆机构尺寸型. 当  $r_2$  变化时,  $r_3, r_4$  在条形区域内的值应满足如下关系:

$$\begin{aligned} r_2 - r_3 + r_1 &< r_4 < r_2 + r_3 - r_1, & r_3 < r_2; \\ r_3 - r_2 + r_1 &< r_4 < r_2 + r_3 - r_1, & r_3 \geq r_2. \end{aligned}$$

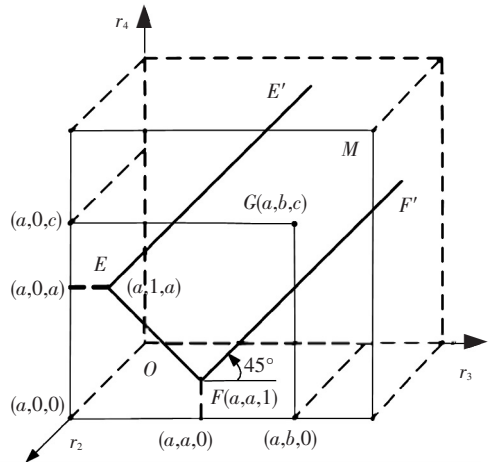


图 2 曲柄摇杆机构杆长尺寸分布

本文按照一定的步长变化  $r_2, r_3, r_4$  的值, 编写程序生成了一定数量的曲柄摇杆机构的尺寸型. 对于每一个尺寸型的曲柄摇杆机构, 随连杆点  $P$  位置的不同 (即  $r_5$  和  $\delta$  发生变化) 产生的连杆曲线也不同. 文献[12]在连杆平面上取了 5 行 10 列共 50 个点作为连杆点  $P$  的 50 个位置 (见图 3).

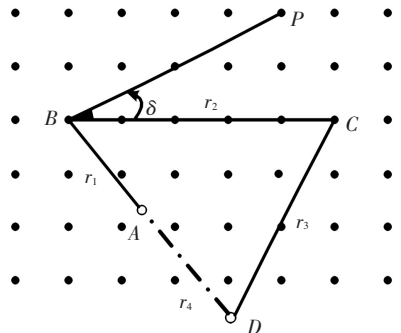


图 3 连杆点位置分布

本文为丰富图谱库中连杆曲线, 选取了 11 行 21 列共 231 个点作为  $P$  的 231 个位置, 其坐标值可表示为

$$\begin{aligned} x_p &= x_B + r_5 \cos \delta, \\ y_p &= y_B + r_5 \sin \delta. \end{aligned}$$

根据曲柄摇杆机构的尺寸参数变化, 利用计算机可批量完成连杆曲线的数据采集, 即每一个

尺寸型的曲柄摇杆机构的每一个连杆点在曲柄旋转一周时所形成的连杆曲线上  $N$  个点  $Q_i (i = 1, 2, 3, \dots, N)$  的坐标. 通过试验, 每条连杆曲线上取  $N = 720$  时即可代表该曲线.

## 2 连杆曲线的归一化

为便于连杆曲线特征匹配, 需要对连杆曲线进行归一化处理, 使所有曲线的长、短和放置方式统一, 无论待识别的曲线是正放、竖放、斜放, 或大或小都能被识别出来. 归一化具体方法如下.

1) 曲柄摇杆机构  $A_0B_0C_0D_0P_0$  的起始位置和曲柄沿逆时针旋转时生成的连杆曲线如图 4(a) 所示, 找出连杆曲线上相距最远的两个点  $G_0, H_0$ .

2) 将机构  $A_0B_0C_0D_0P_0$  和连杆曲线平移, 使偏左的点  $G_0$  与坐标原点重合, 平移变换公式如式 (1) 所示:

$$\begin{bmatrix} x_{i01} \\ y_{i01} \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_1 \begin{bmatrix} x_{i0} \\ y_{i0} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_{G_0} \\ 0 & 1 & -y_{G_0} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i0} \\ y_{i0} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

式中  $\mathbf{T}_1$  为平移变换矩阵,  $i$  代表归一化过程中需要进行坐标变换的各点的标号. 变换后机构和连杆曲线如图 4(b) 所示.

如图 4(c) 所示.

$$\begin{bmatrix} x_{i02} \\ y_{i02} \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{R}_1 \begin{bmatrix} x_{i01} \\ y_{i01} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_0 & \sin \alpha_0 & 0 \\ -\sin \alpha_0 & \cos \alpha_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i01} \\ y_{i01} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

式中  $\mathbf{R}_1$  为旋转变换矩阵.

4) 如图 4(c) 所示, 为使曲线凸起部分靠近  $y$  轴, 找到当前曲线上距  $x$  轴最远的点  $I_{02}, J_{02}$  到  $x$  轴的垂足为点  $J_{02}$ . 计算  $G_{02}J_{02}$  和  $J_{02}H_{02}$  的长度, 若  $\overline{G_{02}J_{02}} > \overline{J_{02}H_{02}}$ , 则将机构  $A_{02}B_{02}C_{02}D_{02}P_{02}$  连同连杆曲线绕  $y$  轴做反射变换, 再平移, 使  $H_{02}$  与坐标原点重合, 变换公式如式 (3) 所示, 变换结果如图 4(d) 所示; 若  $\overline{G_{02}J_{02}} \leq \overline{J_{02}H_{02}}$ , 则保持原图, 不进行变换, 但交换  $G_{02}, H_{02}$  两点代号, 即使  $H_{02}$  点位于坐标原点.

$$\begin{bmatrix} x_{i03} \\ y_{i03} \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{S}_1 \begin{bmatrix} x_{i02} \\ y_{i02} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

式中:  $\mathbf{S}_1$  为反射变换矩阵,  $\mathbf{T}_2$  为平移变换矩阵, 且当  $x_{I_{02}} > x_{H_{02}} - x_{I_{02}}$  时,

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_{H_{02}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

当  $x_{I_{02}} \leq x_{H_{02}} - x_{I_{02}}$  时,

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5) 如图 4(d) 所示, 为保证曲线凸起部分在  $x$  轴的上方较大, 需判断  $I_{03}$  点纵坐标的正负, 然后进行式 (4) 的变换. 若  $y_{I_{03}} < 0$ , 则绕  $x$  轴做反射变换; 若  $y_{I_{03}} \geq 0$ , 则不变化. 变换结果如图 4(e) 所示.

$$\begin{bmatrix} x_{i04} \\ y_{i04} \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{S}_2 \begin{bmatrix} x_{i03} \\ y_{i03} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

式中  $\mathbf{S}_2$  为反射变换矩阵, 且当  $y_{I_{03}} < 0$  时,

$$\mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

当  $y_{I_{03}} \geq 0$  时,

$$\mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

6) 如图 4(e) 所示, 将机构  $A_{04}B_{04}C_{04}D_{04}P_{04}$

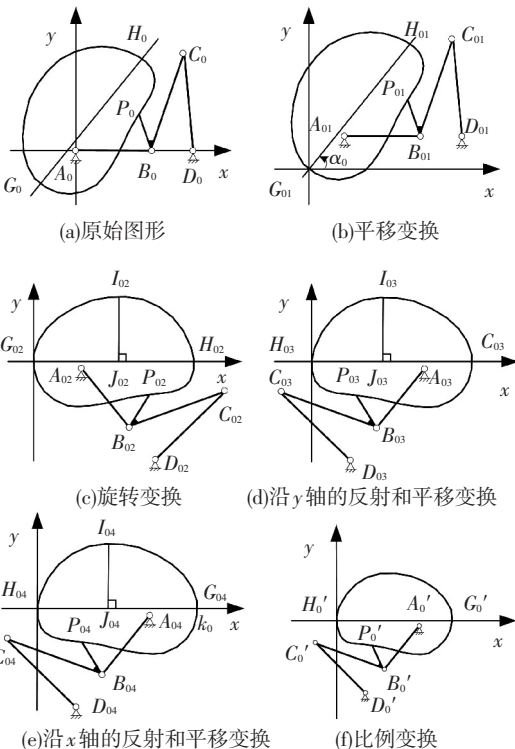


图 4 连杆曲线归一化过程

3) 如图 4(b) 所示, 计算  $G_{01}H_{01}$  与  $x$  轴正向逆时针所成的角  $\alpha_0$ , 将机构  $A_{01}B_{01}C_{01}D_{01}P_{01}$  和连杆曲线顺时针旋转  $\alpha_0$  使  $G_{01}H_{01}$  与  $x$  轴重合, 旋转变换公式如式 (2) 所示, 变换后机构和连杆曲线

连同连杆曲线缩小  $k_0$  ( $k_0 = \overline{G_0H_0}$ ) 倍, 比例变换公式如式(5)所示, 变换结果如图 4(f) 所示。

$$\begin{bmatrix} x'_{i0} \\ y'_{i0} \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{S} \begin{bmatrix} x_{i04} \\ y_{i04} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{k_0} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_0} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i04} \\ y_{i04} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

式中  $\mathbf{S}$  为比例变换矩阵。

机构  $A_0B_0C_0D_0P_0$  连同连杆曲线经过归一化处理, 得到归一化后的机构  $A'_0B'_0C'_0D'_0P'_0$  和归一化后的连杆曲线以及在归一化过程中相关的 6 个归一化参数:  $x_{G_0}, y_{G_0}, \alpha_0, x_{I_{02}}, y_{I_{03}}, k_0$ . 归一化变换矩阵是以上 6 个变换矩阵的乘积, 即

$$\mathbf{M} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{T}_1.$$

### 3 连杆曲线型值点的选择

在使用 B 样条曲线对连杆曲线进行拟合时, 连杆曲线上型值点的选择对曲线的特征参数提取及其最终的拟合精度具有重大影响。由于本文利用神经网络进行曲线特征参数的匹配, 而神经网络的输入特征参数的数目必须是固定的, 连杆曲线又形态各异, 初始型值点数目可能并不相等, 因此必须设计一套型值点自动选择算法, 从连杆曲线的 720 个点中找到  $m$  个能够描述曲线特征的特征点  $q_i$  ( $i = 0, 1, \dots, m - 1$ )。具体过程如下:

1) 通过数值构造的方式计算出连杆曲线上各点的一阶导数、二阶导数、曲率, 选取轨迹上的极值点、拐点以及曲率极值点作为初始型值点, 如图 5(a) 中“+”所示。

2) 删去步骤 1) 中较为密集型值点, 遵循删去曲率较小点的原则, 剩余的型值点如图 5(b) 中“o”所示。

3) 步骤 2) 中剩余型值点数为  $s$ , 设最终有  $m + t$  个特征参数作为神经网络的输入, 其中  $t$  为连杆曲线精确拟合时再次插入的型值点数。为了保证神经网络输入特征参数数目的一致性, 应使初始型值点数由  $s$  变到  $m$ 。若  $s > m$ , 则将另外的  $s - m$  个型值点依次插入到两个距离最远的型值点中; 若  $s < m$ , 则在型值点密集处删去  $m - s$  个点。经过反复试验,  $m = 12$  时在型值点数目较小的情况下拟合效果较好, 如图 5(c) 中“◁”所示。

4) 对初始型值点进行调整, 步骤 3) 中获得的初始型值点并不能完全满足拟合精度的要求。因此必须要对初始型值点进行调整。已知连杆曲线的  $N$  个点  $Q_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, N$ ), 结合下文中的 B 样条曲线拟合方法, 由  $m$  个初始型值点得到初始拟

合曲线上的  $N$  个点  $W_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, N$ )。为了便于度量拟合质量, 定义最大拟合误差  $e_{\max} = \max(\|Q_i - W_i\|)$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, N$ )、平均拟合误差  $e_s = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\|Q_i - W_i\|)$ , 其中  $\|Q_i - W_i\|$  表示点  $Q_i$  到点  $W_i$  的距离。最大拟合误差反应了拟合曲线和连杆曲线最大分离程度, 而平均拟合误差则反应了整体的拟合效果。规定  $e_{\max} < 0.010$  和  $e_s < 0.008$  时满足初始拟合精度要求。分别检查  $e_{\max}$  和  $e_s$ , 若满足要求则可以不再调整型值点, 若达不到要求, 则找到连杆曲线上出现最大拟合误差的曲线段的两个型值点, 按照一定步长调整左右型值点位置, 重新拟合曲线。重复以上步骤, 保证型值点数目不变情况下调整型值点的位置, 使拟合误差满足预期的精度要求, 得到  $m$  个型值点  $q_i$  ( $i = 0, 1, \dots, m - 1$ )。最终得到的型值点如图 5(d) 中“\*”所示。

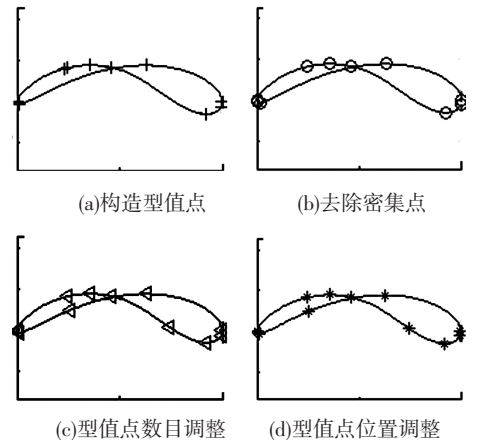


图 5 初始型值点选择的过程

### 4 曲线特征提取与图谱库建立

给定连杆轨迹曲线 (通常都是封闭的曲线) 上的一组首尾重合的数据点, 可构造出一条通过该组数据点且满足误差要求的  $C^{k-1}$  连续 (具有  $k - 1$  阶参数连续性) 的  $k$  次封闭的 B 样条插值曲线<sup>[13-15]</sup>。本文采用具有二阶参数连续性的三次非均匀 B 样条闭合的插值曲线对连杆曲线上的数据点进行拟合, 将提取的型值点  $q_i$  ( $i = 0, 1, \dots, m - 1$ ) 作为已知的数据点, 拟合的 B 样条曲线由  $n + 1$  个控制顶点  $d_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) 与节点矢量  $\mathbf{U} = [u_0, u_1, \dots, u_{n+k+1}]$  来定义。

首先, 要确定节点矢量  $\mathbf{U}$ 。本文对于封闭的三次非均匀 B 样条曲线定义域  $[u_k, u_{n+1}] = [u_3, u_{n+1}] = [0, 1]$  内的节点采用规范积累弦长参数化法来确定, 该方法能够如实反映数据点按弦长的



制,可在  $4 \leq f \leq N$  范围内任意给定),应用本文所述方法进行轨迹综合,寻找满足要求机构的步骤如下:

1) 将给定的  $f$  个离散点进行 B 样条曲线拟合,得到一条封闭的期望曲线.

2) 利用与图谱库中连杆曲线相同的处理方法,对期望曲线进行归一化处理,记录此过程中期望曲线的 6 个归一化参数:  $x_{G_1}$ 、 $y_{G_1}$ 、 $\alpha_1$ 、 $x_{I_{12}}$ 、 $y_{I_{13}}$ 、 $k_1$ ,并对归一化后期望曲线进行型值点的选择以及特征参数的提取.

3) 将期望曲线特征参数  $\theta_{1,i}(i = 1, 2, \dots, m + t)$  输入到已训练好并保存的神经网络中,输出与期望曲线对应的量纲一的机构尺寸参数  $(r_{2,1}$ 、 $r_{2,2}$ 、 $r_{2,3}$ 、 $r_{2,4}$ 、 $r_{2,5}$ 、 $\delta_2$ ),对应的机构为  $A_2B_2C_2D_2P_2$ .

4) 由于神经网络具有自学习能力,输出的满足给定轨迹要求的机构尺寸参数可能并不对应图谱库中任何一组数据.因此,需要利用与图谱库中连杆曲线相同的处理方法,将输出机构  $A_2B_2C_2D_2P_2$  及其描绘的连杆曲线也进行一次归一化处理,得到归一化后机构  $A'_2B'_2C'_2D'_2P'_2$ .

5) 将归一化后的期望曲线连同步骤 4) 中的机构  $A'_2B'_2C'_2D'_2P'_2$ ,按照步骤 2) 中记录的 6 个归一化参数进行反归一化,得到满足要求的实际机构  $A_1B_1C_1D_1P_1$  及其实际参数  $(l_{1,1}$ 、 $l_{1,2}$ 、 $l_{1,3}$ 、 $l_{1,4}$ 、 $l_{1,5}$ 、 $\delta_1$ ).

6) 计算期望曲线与实际机构描绘的连杆曲线的综合误差,包括误差平均值  $e_s$  和误差最大值  $e_{smax}$ .并计算误差与期望曲线上最远两点间距离  $k_1$  的比值,即  $K_s = e_s/k_1$  和  $K_{smax} = e_{smax}/k_1$ ,将  $K_s$ 、 $K_{smax}$  作为度量在有量纲情况下轨迹综合的精度参数.

反归一化过程与归一化过程相反,对归一化后的机构和期望曲线进行反归一化的具体方法如下:

a) 将归一化后的机构  $A'_2B'_2C'_2D'_2P'_2$  和期望曲线放大  $k_1$  倍,比例变换公式如式 (8) 所示,  $i$  代表反归一化过程中需要进行坐标变换的各点的标号.

$$\begin{bmatrix} x_{i14} \\ y_{i14} \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{S}^{-1} \begin{bmatrix} x'_{i1} \\ y'_{i1} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_{i1} \\ y'_{i1} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

式中  $\mathbf{S}^{-1}$  为比例变换矩阵.

b) 判断  $y_{I_{13}}$  的正负性,若  $y_{I_{13}} < 0$ ,即期望曲线在归一化时绕  $x$  轴进行了反射变换,则要对当前图形做反射变换,反射变换公式如式 (9) 所示;若  $y_{I_{13}} \geq 0$ ,则不变化.

$$\begin{bmatrix} x_{i13} \\ y_{i13} \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{S}'_1 \begin{bmatrix} x_{i14} \\ y_{i14} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

式中  $\mathbf{S}'_1$  为反射变换矩阵,且当  $y_{I_{13}} < 0$  时,

$$\mathbf{S}'_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

当  $y_{I_{13}} \geq 0$  时,

$$\mathbf{S}'_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

c) 判断  $x_{I_{12}}$  和  $k_1 - x_{I_{12}}$  的大小,若  $x_{I_{12}} > k_1 - x_{I_{12}}$ ,即期望曲线归一化时先绕  $y$  轴进行了反射和平移变换,则将当前图形绕  $y$  轴先做反射变换再平移,变换公式如式 (10) 所示;若  $x_{I_{12}} \leq k_1 - x_{I_{12}}$ ,则不变化.

$$\begin{bmatrix} x_{i12} \\ y_{i12} \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}'_1 \cdot \mathbf{S}'_2 \begin{bmatrix} x_{i13} \\ y_{i13} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

式中:  $\mathbf{S}'_2$  为反射变换矩阵,  $\mathbf{T}'_1$  为平移变换矩阵.

且当  $x_{I_{12}} > k_1 - x_{I_{12}}$  时,

$$\mathbf{S}'_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{T}'_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & k_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

当  $x_{I_{12}} \leq k_1 - x_{I_{12}}$  时,

$$\mathbf{S}'_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{T}'_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

d) 将当前图形逆时针旋转  $\alpha_1$  角,旋转变换公式如式 (11) 所示:

$$\begin{bmatrix} x_{i11} \\ y_{i11} \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{R}'_1 \begin{bmatrix} x_{i12} \\ y_{i12} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & -\sin \alpha_1 & 0 \\ \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i12} \\ y_{i12} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

式中  $\mathbf{R}'_1$  为旋转变换矩阵.

e) 将当前图形平移,平移变换公式如式为

$$\begin{bmatrix} x_{i1} \\ y_{i1} \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}'_2 \begin{bmatrix} x_{i11} \\ y_{i11} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_{G_1} \\ 0 & 1 & y_{G_1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i11} \\ y_{i11} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

式中  $\mathbf{T}'_2$  为平移变换矩阵,得到实际机构  $A_1B_1C_1D_1P_1$ .

反归一化变换矩阵是以上 6 个变换矩阵的乘积,即

$$\mathbf{M}' = \mathbf{T}'_2 \cdot \mathbf{R}'_1 \cdot \mathbf{T}'_1 \cdot \mathbf{S}'_2 \cdot \mathbf{S}'_1 \cdot \mathbf{S}^{-1}.$$

## 6 算法实现与示例

下面给出计算实例,给定 16 个离散点的坐标值(见表 2)进行轨迹综合,寻找近似通过这些离散点的曲柄摇杆机构。

表 2 给定的离散点

点	$p_1 \sim p_8 / \text{mm}$	点	$p_9 \sim p_{16} / \text{mm}$
1	(0,0)	9	(51.96,30.00)
2	(4.43,-4.60)	10	(45.60,36.19)
3	(10.50,-6.41)	11	(35.91,39.41)
4	(17.55,-5.26)	12	(25.13,38.91)
5	(26.32,-1.08)	13	(14.72,34.92)
6	(42.98,9.62)	14	(5.76,27.78)
7	(50.43,16.18)	15	(-0.16,18.71)
8	(53.53,22.95)	16	(-2.26,8.86)

应用本文所述的方法,首先,对给定的离散点通过 B 样条曲线拟合得到期望曲线,如图 7(a)。然后,对期望曲线经过归一化处理,得到归一化后的期望曲线如图 7(b),以及 6 个归一化参数(见表 3)。

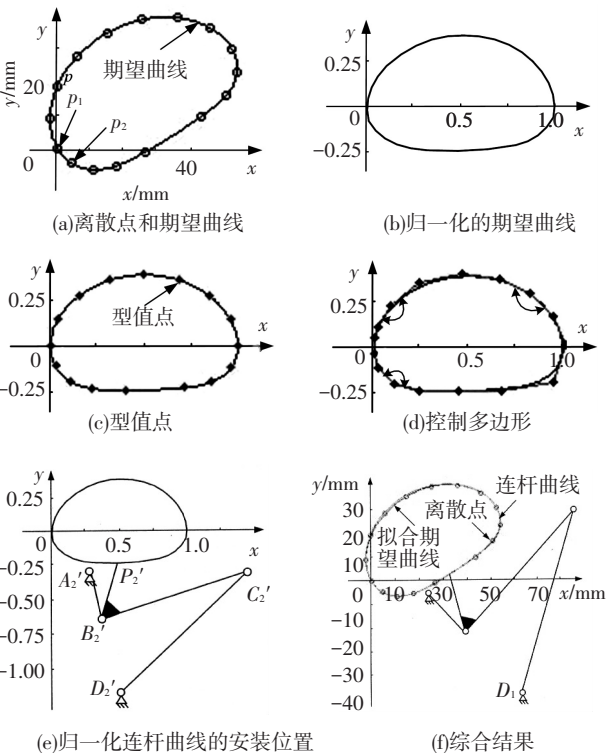


图 7 综合实例

表 3 期望曲线的归一化参数

$x_{G_1} / \text{mm}$	$y_{G_1} / \text{mm}$	$x_{I_{12}} / \text{mm}$	$y_{I_{13}} / \text{mm}$	$k_1 / \text{mm}$	$\alpha_1 / (^\circ)$
0	0	0.498	0.380	60.000	30.218

然后,进行型值点选择和特征参数提取,获取的型值点和控制多边形如图 7(c)和图 7(d)所示,得到期望曲线的特征参数  $\theta_{1,i} (i = 1, 2, \dots, 16)$  (见表 4)。

表 4 期望曲线的特征参数

点	$\theta_{1,i} \sim \theta_{1,8} / (^\circ)$	点	$\theta_{1,9} \sim \theta_{1,16} / (^\circ)$
1	161.928	9	218.349
2	193.634	10	204.443
3	210.134	11	199.690
4	211.387	12	196.702
5	194.222	13	199.226
6	182.638	14	207.049
7	186.739	15	201.113
8	244.503	16	192.099

将特征参数输入到已保存的神经网络中,输出与期望曲线对应的机构尺寸参数  $r_{2,1} = 1.000, r_{2,2} = 3.037, r_{2,3} = 3.461, r_{2,3} = 2.500, r_{2,5} = 1.108, \delta_2 = 57.009^\circ$ ,对应的机构为  $A_2 B_2 C_2 D_2 P_2$ 。将机构  $A_2 B_2 C_2 D_2 P_2$  及其描绘的连杆曲线进行一次归一化,得到归一化后的机构  $A'_2 B'_2 C'_2 D'_2 P'_2$ ,其各点的坐标为  $A'_2 (0.278, -0.275), B'_2 (0.374, -0.641), C'_2 (1.470, -0.290), D'_2 (0.517, -1.191), P'_2 (0.484, -0.236)$ ,如图 7(e)所示。

最后,将机构  $A'_2 B'_2 C'_2 D'_2 P'_2$ 和归一化后的期望曲线,按照期望曲线的 6 个归一化参数  $x_{G_1}, y_{G_1}, \alpha_1, x_{I_{12}}, y_{I_{13}}$  和  $k_1$  进行反归一化,得到的轨迹综合结果如图 7(f)所示。实际机构  $A_1 B_1 C_1 D_1 P_1$  尺寸参数  $l_{1,1} = 22.729 \text{ mm}, l_{1,2} = 69.036 \text{ mm}, l_{1,3} = 78.671 \text{ mm}, l_{1,4} = 56.824 \text{ mm}, l_{1,5} = 25.188 \text{ mm}, \delta_1 = 57.009^\circ$ ,其各点的坐标为  $A_1 (22.723, -5.826), B_1 (38.742, -21.950), C_1 (84.949, 29.342), D_1 (62.771, -46.138), P_1 (32.230, 2.382)$ 。综合得到的机构连杆曲线与期望曲线的误差和综合精度参数分别为:误差平均值  $e_s = 0.657 \text{ mm}$ ,误差最大值  $e_{\text{max}} = 1.084 \text{ mm}, K_s = 1.10\%, K_{\text{max}} = 1.81\%$ ,能够满足轨迹综合的精度要求。为进一步提高轨迹综合的精度可以通过增加轨迹图谱的数量、提高特征参数的数目等方式得到,在此不再详述。

在主频为 2.54 GHz、奔腾处理器及内存为 2 GB 的计算机上利用本文所述方法综合 10 条期望轨迹,只需要 1.35 s 就能给出与期望轨迹相对应的实际的曲柄摇杆机构,可见本方法具有非常快的综合速度。

## 7 结 论

1) 给出了基于三次非均匀 B 样条曲线理论的连杆曲线特征提取方法,利用 B 样条曲线控制多边形各相邻两边间的夹角作为连杆曲线的特征参数建立电子图谱库,减少了人工神经网络输入数据的数目。

2) 通过连杆曲线归一化方法,使重点集中在轨迹曲线的形状上,忽略曲线的具体姿态,消除了由于坐标轴的选择对轨迹综合的影响,大大减少了电子图谱库中数据的冗余量。

3) 通过程序自动获取连杆曲线的型值点,避免了对大量形状各异的连杆曲线的分类处理,大大简化了轨迹综合的过程。

4) 本方法并不限制给定有序离散点的数目,将离散点拟合的期望曲线的特征参数输入神经网络进行特征匹配,试验表明了该方法的有效性。

5) 本文所提方法也适用于其他类型的平面四杆机构的轨迹综合,如双曲柄机构、双摇杆机构和曲柄滑块机构。

## 参考文献

- [1] CHANEKAR P V, GHOSAL A. Optimal synthesis of adjustable planar four-bar crank-rocker type mechanisms for approximate multi-path generation [J]. Mechanism and Machine Theory, 2013, 69: 263-277.
- [2] TARI H, SU H. A complex solution framework for the kinetostatic synthesis of a compliant four-bar mechanism [J]. Mechanism and Machine Theory, 2011, 46(8): 1137-1152.
- [3] MATEKAR S B, GOGATE G R. Optimum synthesis of path generating four-bar mechanisms using differential evolution and a modified error function [J]. Mechanism and Machine Theory, 2012, 52: 158-179.

- [4] CABRERA J A, ORTIZ A, NADAL F, et al. An evolutionary algorithm for path synthesis of mechanisms [J]. Mechanism and Machine Theory, 2011, 46(2): 127-141.
- [5] HONGYING Y, DEWEI T, ZHIXING W. Study on a new computer path synthesis method of a four-bar linkage [J]. Mechanism and machine theory, 2007, 42(4): 383-392.
- [6] VASILIU A, YANNOU B. Dimensional synthesis of planar mechanisms using neural networks: application to path generator linkages [J]. Mechanism and Machine Theory, 2001, 36(2): 299-310.
- [7] ULLAH I, KOTA S. Optimal synthesis of mechanisms for path generation using Fourier descriptors and global search methods [J]. Journal of Mechanical Design, 1997, 119(4): 504-510.
- [8] 王成志, 纪跃波. 小波分析在平面四杆机构轨迹综合中的应用研究 [J]. 机械工程学报, 2004, 40(8): 34-39.
- [9] GALÁN-MARÍN G, ALONSO F J, DEL-CASTILLO J M. Shape optimization for path synthesis of crank-rocker mechanisms using a wavelet-based neural network [J]. Mechanism and Machine Theory, 2009, 44(6): 1132-1143.
- [10] 张新歌. 基于神经网络的铰链四杆机构复演轨迹设计软件的开发 [D]. 苏州: 苏州大学, 2008.
- [11] 褚金奎, 孙建伟. 基于傅里叶级数理论的连杆机构轨迹综合方法 [J]. 机械工程学报, 2010, 46(13): 31-41.
- [12] 郎内斯 J A, 纳耳桑 G L. 四连杆机构分析图谱 [M]. 李学英, 译. 北京: 机械工业出版社, 1966.
- [13] PIEGL L A, TILLER W. The NURBS book [M]. New York: Springer, 1997.
- [14] PIEGL L A, TILLER W. Surface approximation to scanned data [J]. The visual computer, 2000, 16(7): 386-395.
- [15] PIEGL L A, TILLER W. Biarc approximation of NURBS curves [J]. Computer-Aided Design, 2002, 34(11): 807-814.

(编辑 杨波)