

短筒柔轮谐波齿轮传动新设计新工艺与实验

吴伟国, 于鹏飞, 侯月阳

(哈尔滨工业大学 机电工程学院, 150001 哈尔滨)

摘 要: 为了提高短筒柔轮谐波齿轮传动刚度,提出了一种柔轮和刚轮采用新齿形的短筒谐波传动的设计方法. 柔轮轮齿采用双圆弧齿廓,刚轮轮齿采用具有一定倾角的共轭齿廓,从而提高轮齿的啮合面积. 提出了采用慢走丝线切割加工柔轮和刚轮轮齿的加工工艺,分别试制了刚轮有倾斜轮齿、长径比各为 1/4 和 1/2 的两种 50 机型短筒柔轮谐波齿轮减速器样机,并进行了刚度测试实验. 结果表明,刚轮轮齿有倾角的新型短筒柔轮谐波传动与刚轮轮齿无倾角的短筒柔轮谐波传动相比,传动刚度可提高 39% 以上.

关键词: 谐波齿轮传动;短筒柔轮;刚轮;传动刚度;倾斜齿;双圆弧齿廓;慢走丝线切割

中图分类号: TG156 **文献标志码:** A **文章编号:** 0367-6234(2014)01-0040-07

New design, new process of harmonic drive with short flexspline and its experiment

WU Weiguo, YU Pengfei, HOU Yueyang

(School of Mechatronics Engineering, Harbin Institute of Technology, 150001 Harbin, China)

Abstract: In order to improve the transmission stiffness of harmonic gear drive with short flexspline, a design of harmonic drive with new teeth profile is proposed. The teeth profiles of flexspline and circular spline are designed as double arc profile and its conjugate profile with certain axial inclination angle, respectively, so that the contact area between meshing teeth is improved. The WEDM-LS processes for teeth of short flexspline and circular spline are presented, and 50 prototype harmonic gear drives with tilt tooth circular spline and 1/4 and 1/2 length-diameter ratio are developed, respectively. The results of transmission stiffness experiments show that the transmission stiffness of the new designed harmonic gear driver is increased by 39% compared to that of the previous designed harmonic gear driver without tilt tooth.

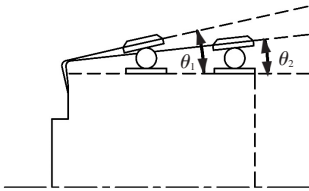
Keywords: harmonic gear drive; short flexspline; circular spline; transmission stiffness; tilt tooth; double arc tooth profile; WEDM-LS

机器人和航空航天对减速器体积更小、质量更轻的实际需求使谐波减速器向更短的轴向尺寸上发展^[1],短筒柔轮谐波减速器成为当今谐波减速器技术的发展趋势之一^[2].目前,产品化的柔轮长径比最小的筒形谐波减速器是由日本 HD 公司开发的 CSF 与 CSD 系列,长径比达到 1/4,其缺点是需依赖先进材料加工^[3-5].我国对短筒柔轮谐波传动的研究成果主要是实验室试制的

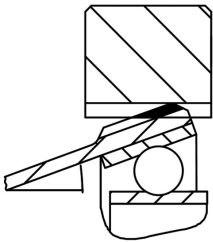
样品.国内产品化的中技克美公司 XBS 系列短筒柔轮谐波减速器柔轮长径比可以达到 3/5,且具有几乎和正常比例的谐波减速器一样的承载能力.谐波减速器轴向尺寸的减小会带来一些问题^[6-10],如图 1(a)所示,因为短筒柔轮谐波减速器轴向长度上较正常的谐波减速器减小很多,这将导致在波发生器装入柔轮后,短筒柔轮在波发生器长轴方向上较正常柔轮的张角变得更大,柔轮所受应力也剧烈增加;同时,如图 1(b)、(c)所示,随着张角的增大,柔轮轮齿和刚轮轮齿间的啮合面积也将变小.轮齿间接触面积减小将导致谐波减速器承载能力降低,传动刚度变差,影响了短

收稿日期: 2013-06-09.
基金项目: 国家高技术研究发展计划资助项目(2006AA04Z201).
作者简介: 吴伟国(1966—),男,教授,博士生导师.
通信作者: 吴伟国, wuwg@hit.edu.cn.

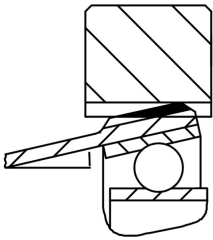
筒谐波减速器的传动性能.另外,国内齿轮制造业尚未解决 0.25 mm 以下小模数齿轮滚刀难于制造的技术难题,高精度高刚度短筒柔轮谐波传动产品仍依赖于进口.



(a)短筒柔轮与正常柔轮的长轴处张角对比



(b)短筒柔轮大张角



(c)正常柔轮小张角

图 1 短筒柔轮与正常柔轮长轴张角与啮合面积影响对比图

本文提出设计刚轮轮齿沿轴向有倾角的短筒柔轮谐波传动,以期提高传动刚度和承载能力,进一步提出用高精度线切割慢走丝机床实现轮齿加工的工艺,对长径比分别为 1/2、1/4 比例的短筒柔轮谐波传动装置进行研制与传动刚度实验研究,为短筒柔轮谐波传动国产化及其在机器人、航空航天领域的应用提供理论与技术依据.

1 短筒柔轮谐波传动齿廓曲线

1.1 柔轮齿廓曲线

谐波传动中的齿形对传动性能具有重要的影响.图 2 所示的柔轮齿形是经理论与试验证明能有效提高啮合性能的双圆弧齿廓^[11].

柔轮轮齿齿廓曲线方程如下:

上圆弧齿廓为

$$\vec{R_1} = (\rho_a \cos(\alpha_1) - l_a)\vec{i} + (\rho_a \sin(\alpha_1))\vec{j};$$

下圆弧齿廓为

$$\vec{R_2} = (l_f - \rho_f \cos(\alpha_2))\vec{i} + (\rho_f \sin(\alpha_2) + b_f)\vec{j}.$$

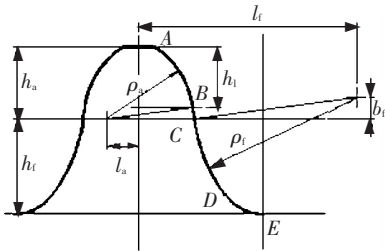


图 2 柔轮齿廓

1.2 刚轮齿廓曲线

已知柔轮齿廓曲线和波发生器轮廓曲线,可以采用包络法求解出与柔轮齿廓共轭的刚轮齿廓曲线^[12].如图 3 所示,坐标系 {o, x, y} 与波发生器相固连并定义为固定坐标系,而坐标系 {x_g, o_g, y_g} 和 {x_r, o_r, y_r} 分别和刚轮和柔轮固连在一起.在初始时刻,3 个坐标系的纵坐标轴是重合的.y_g 轴和刚轮齿槽的对称线重合,y_r 和柔轮轮齿的对称线重合.原点 o_g 与刚轮的回转中心重合,原点 o_r 位于原始曲线上.当与 {x_r, o_r, y_r} 固连的柔轮齿形曲线 T 沿着原始曲线运动时,将形成柔轮轮齿曲线族,将该曲线族转化到刚轮坐标系下的包络线即为刚轮齿廓.

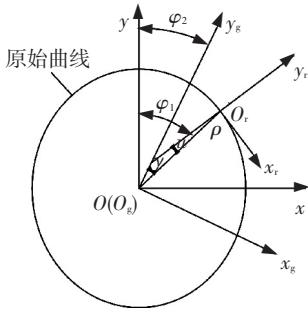


图 3 谐波传动啮合原理

在柔轮坐标系 {x_r, o_r, y_r} 中,柔轮齿廓的参数方程可以表示为 $x_r = x_r(t)$, $y_r = y_r(t)$.

在柔轮转过 φ_1 角时,柔轮将沿着波发生器表面推动刚轮运动,刚轮转动 φ_2 角.柔轮的轮齿的运动是沿着变形曲线的平动和绕着相应点的转动的合成.如图 4 所示,柔轮坐标系到刚轮坐标系的变换矩阵 M_{gr} 可以表示为

$$M_{gr} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{12} & \sin \varphi_{12} & \rho \sin \gamma \\ -\sin \varphi_{12} & \cos \varphi_{12} & \rho \cos \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

式中: φ_{12} 为 y_r 与 y_g 之间的夹角, ρ 为原始曲线的极半径, γ 为 φ_1 与 φ_2 的夹角差.则柔轮齿廓在刚轮坐标系中可表示为

$$\begin{cases} x_{gr} = x_r \cos \varphi_{12} + y_r \sin \varphi_{12} + \rho \sin \gamma, \\ y_{gr} = x_r \sin \varphi_{12} + y_r \cos \varphi_{12} + \rho \cos \gamma. \end{cases}$$

根据包络理论,刚轮的齿形应为在刚轮坐标系下柔轮轮齿曲线族的包络线,故刚轮齿形上的点应满足

$$\frac{\partial x_{gr}}{\partial t} \cdot \frac{\partial y_{gr}}{\partial \varphi} - \frac{\partial x_{gr}}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y_{gr}}{\partial t} = 0. \quad (1)$$

波发生器的形状为余弦凸轮形式时,

$$\rho = r_m + w(\varphi).$$

式中: r_m 为柔轮未变形时的半径, $w(\varphi)$ 为柔轮径向位移, φ 为柔轮未变形端的转角.

根据余弦凸轮的作用形式,有

$$w(\varphi) = w_0 \cos(2\varphi).$$

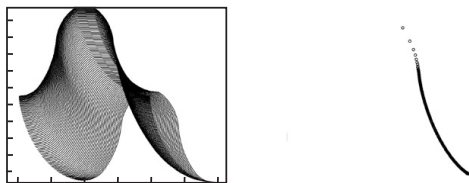
式中 w_0 为余弦凸轮最大径向位移,根据柔轮中线不伸长的假设,可以得到径向位移、切向位移、法向转角的计算公式分别为

$$\begin{cases} w = w_0 \cos(2\varphi), \\ v = -0.5w_0 \sin(2\varphi), \\ \mu = 1.5w_0 \sin(2\varphi)/r_m, \\ \varphi_1 = \varphi + v/r_m. \end{cases}$$

式中: v 为柔轮切向变形, μ 为柔轮法向转角.

至此,式(1)中的所有变量都得到了相应的表达式,将所有的参数都带入式(1),得到的化简后的偏微分方程将只含有两个未知数.由于难于求解偏微分方程的解析解,采取数值解法求解偏微分方程.离散化 φ 值,由于谐波传动是对称的,对于双波传动 φ 只需要计算 $[0, 180^\circ]$ 的角度即可.

最后得到的结果如图 4 所示,由包络法生成的包络线有两条,一条是外包络线,另一条是内包络线.根据图形关系,刚轮的共轭齿廓是外包络线.柔轮包络生成的刚轮轨迹如图 4(a) 所示,计算得到的刚轮齿廓坐标在包络线中的位置如图 4(b) 所示.在误差允许的范围内,将刚轮轮齿坐标用多项式进行拟合得到样条曲线,作为刚轮的理论共轭齿廓.虽然只是在离散的点上得到的才是精确的结果,但是只要点数取得足够密,可以得到精确度很高的共轭齿廓数值解.



(a) 柔轮包络线 (b) 刚轮共轭齿廓计算点

图 4 柔轮齿廓包络生成刚轮共轭齿廓

2 短筒柔轮谐波传动结构设计

以 50 机型为例,设计短筒柔轮谐波减速器,

柔轮整体采用传统的筒形结构,刚轮采用环形结构.采取刚轮固定,波发生器输入,柔轮输出的形式.设计短筒谐波减速器传动比 $i = 100$,波发生器采用余弦凸轮进行双波传动 $u = 2$,刚轮与柔轮轮齿模数 $m = 0.25$.

相应的柔轮齿数为

$$Z_r = iu = 200;$$

刚轮齿数为

$$Z_g = Z_r \left(1 + \frac{1}{i} \right) = 202.$$

2.1 柔轮的结构设计与加工工艺

如图 5 所示,柔轮采用筒形结构,除轮齿和筒长外各部分尺寸按文献[13]中的尺寸设计.

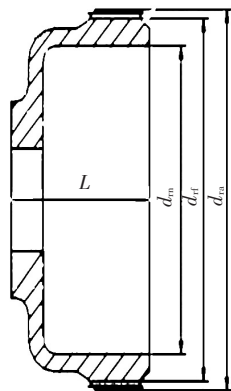


图 5 柔轮结构

柔轮是谐波减速器中受力最复杂的元件,也是谐波减速器中最容易失效的元件.柔轮的加工工艺分为两部分:第一部分是柔轮毛坯的加工;第二部分是柔轮轮齿的加工.柔轮毛坯通过精车、磨削、钻孔等常规加工方法制作,在此不赘述.本文柔轮的制作材料为 30CrMnSiA,其采用淬火 880° ,油冷,回火 180° ,空气冷却的热处理方式^[14],得到的材料力学性能如表 1 所示.

表 1 柔轮材料力学性能^[14]

材料	硬度 (HRC)	强度极限 σ_b 屈服极限 σ_s 疲劳极限 σ_{-1}		
		MPa		
30CrMnSiA	55	1 800	1 600	670

第二部分是柔轮轮齿的切割.本文采用慢走丝线切割机床来加工轮齿.采用慢走丝线切割的方式加工轮齿有很多好处,只要为慢走丝线切割机床提供坐标精确的工程图,就能实现齿形的精确加工,且加工精度高达 $\pm 0.002 \text{ mm}$;表面粗糙度可达 $0.2 \sim 1.6 \text{ }\mu\text{m}$;可利用线切割机床锥度切割功能加工倾斜的刚轮轮齿;采用这种加工方式可以避免制造 0.25 mm 以下小模数齿轮滚刀难题.

目前,谐波齿轮轮齿常用的加工方法是柔轮采用滚刀滚齿而刚轮轮齿采用插齿刀加工,鉴于国内小模数齿轮刀具制造技术不成熟,制造成本高等问题,本文提出了采用高精度慢走丝线切割工艺加工柔轮与刚轮轮齿,具体使用瑞士夏尔米 240 慢走丝切割机床加工.但是采用慢走丝线切割机床加工柔轮外齿廓存在如下问题:由于柔轮是外齿廓,电极丝无法越过卡具一次完成整周轮齿加工,否则将割断夹具.故自行设计了如图 6 所示的高精度卡具装置,用以实现柔轮轮齿的整周连续加工,且能保证加工精度.

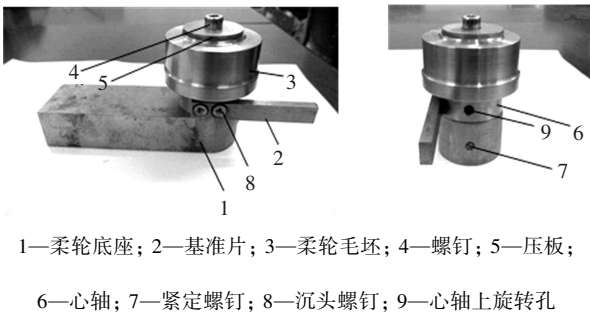


图 6 柔轮加工夹具结构及实物照片

卡具底座固定在慢走丝线切割机床上,柔轮毛坯装在心轴上通过内六角螺钉和压板固定在心轴上.基准片通过沉头螺钉固定在心轴的扁面上.紧定螺钉将心轴固定在卡具底座上.其工作过程是:由于线切割在切割柔轮外齿的过程中不能实现一次整周切割轮齿,在割齿过程所有轮齿均采用两次切割完成.找正的过程依靠柔轮夹具上的基准片和慢走丝线切割机床上的测头.先如图 6 所示切割柔轮毛坯上的一半左右的轮齿,切割完毕后,旋出紧定螺钉,通过旋转孔旋转心轴 180° ;旋转完毕后线切割机床测头通过基准片找正柔轮位置,调整到正确位置后旋入紧定螺钉继续切割下一部分轮齿.至此柔轮轮齿加工完毕.

2.2 刚轮结构与加工工艺

如图 7 所示,本文中刚轮采用环形结构形式.与正常的谐波传动的刚轮区别之处是本文的刚轮的轮齿具有一定的倾角.通过刚轮轮齿的倾斜,刚轮轮齿和柔轮轮齿啮合面积将较轮齿未倾斜的情况下具有更大的啮合面积.

刚轮的加工工艺同样分为两部分.第一部分为刚轮毛坯的加工,第二部分为刚轮轮齿的切割.刚轮毛坯的加工同样是由精车、磨削、钻孔等常规加工方式制作.本文刚轮材料为 45 号,淬火 820°C ,油冷或水冷,回火 200°C ,采用空冷的热处理方式,最后得到的材料性能如表 2.

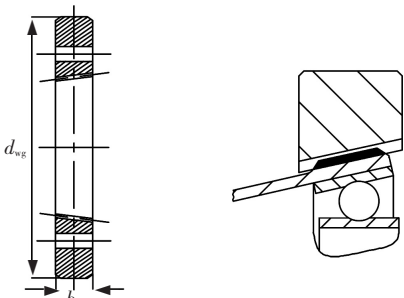


图 7 沿轴向轮齿有倾角的刚轮结构及啮合效果

表 2 刚轮材料性能参数

材料	硬度 (HRC)	强度极限 σ_b	屈服极限 σ_s	疲劳极限 σ_{-1}
		MPa		
45	30~36	700	500	340

刚轮的轮齿同样采用慢走丝线切割的方式进行加工.慢走丝线切割加工锥度的机构如图 8 所示.在上、下丝臂内各有一个转轴,每个转轴前端与上、下导轮相接,组成平面四边形四连杆机构.锥度装置的 U 轴电机驱动上导轮可以沿 U 轴平移; V 轴电机驱动上导轮可以以下转轴为轴心进行摆动.在 U 轴方向和 V 轴方向上的角度调整方式如图 9 所示.

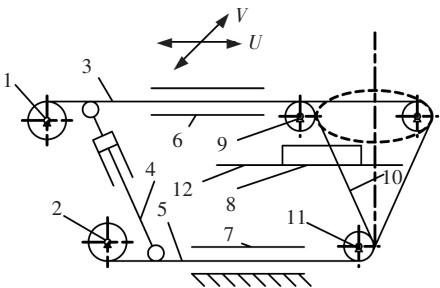


图 8 锥度加工机构原理图

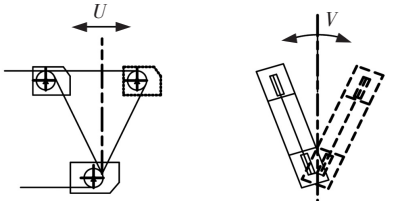
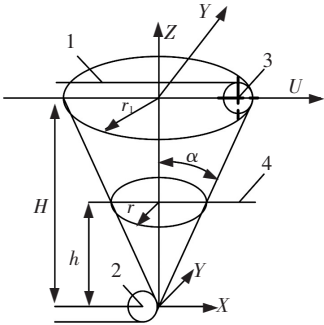


图 9 U 轴和 V 轴倾角的调整

如图 10 所示,倾斜角 $\alpha = \arctan(r_1/H)$.在线切割锥度加工中,程序运动的坐标平面是工件的下表面,而实际运动的是上导轮和工作台(工作台上表面和工件下表面重合).控制系统可以自动

根据形参数——下导轮中心点到工件底面的距离 h 、工件厚度、上下导轮中心距 H 及倾斜角 α ,运用相似形公式对程序中的坐标进行变换,把工件下表面的坐标变换成上导轮和工作台的坐标.在加工中四轴联动,实现轮齿的加工.

在本加工方法中,给定倾斜角后,通过给出刚轮轮齿在上大小端面的齿廓曲线坐标,即可实现刚轮轮齿具有一定倾斜角度的加工.其中刚轮的轮齿齿廓坐标由第 1 节中的共轭齿廓计算方法计算得到,通过编写 VBA 程序可以将齿廓曲线点精确导入 CAD 中,生成慢走丝线切割用的工程图.



1—电极丝; 2—下导轮; 3—上导轮; 4—工件底面

图 10 线切割机床倾角值确定原理

刚轮倾角值通过 ANSYS 进行有限元分析对比优化确定,倾角值分别为 0.1° 、 0.2° 、 0.3° . 利用有限元软件的接触分析功能,通过比较接触的节点占轮齿表面总节点数目的百分比,则可以根据轮齿表面网格是否均匀的前提,推算出轮齿的接触面积的大小.根据接触表面节点的状态或者接触应力值,在 MATLAB 中编写程序,确定接触的节点占总节点的百分比,具体计算值如表 3.

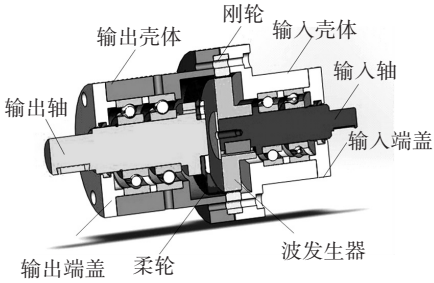
表 3 轮齿啮合面积与啮合齿对数目

刚轮齿形	啮合面积百分比/%	啮合齿对数目
正常	12.60	30
倾角值 0.1°	13.71	30
倾角值 0.2°	17.03	30
倾角值 0.3°	12.93	30

在四分之一模型中,柔轮上有 50 个轮齿.由表 3 可以看出,刚轮轮齿具有一定倾角时均较刚轮轮齿正常时轮齿间啮合面积的百分比要大.综合柔轮等效力、轮齿间接触面积和接触应力,优选 0.2° 为刚轮的倾角.此倾角下比刚轮轮齿正常无倾角时的短筒柔轮谐波减速的轮齿接触节点占总节点百分比上升 4.43%,推测其接触面积提高的百分比为 35.1%.

柔轮、刚轮、波发生器是谐波减速器 3 元件,

可以根据实际需要固定不同的元件来满足不同的传动需求.本文自行研制的长径比为 1/4 的短筒柔轮谐波减速器样机结构如图 11 (a) 所示.图 11(b) 是谐波减速器样机的实物装配图.



(a) 谐波减速器三维图



(b) 谐波减速器实物图

图 11 谐波减速器样机三维图和样机实物照片

3 短筒柔轮谐波传动刚度测试实验

传动刚度测试实验装置如图 12 所示,主要由两部分组成:其一是电机加载及其控制端;其二是短筒柔轮谐波减速器测试样机及输出轴抱死锁紧端.其详细结构是:直流伺服电机直接与谐波减速器的输入轴通过刚性联轴器连接在一起.谐波减速器的输出轴与抱死锁紧装置相连接,减速器输出轴上加工出互相平行的两个扁平面,抱死锁紧装置由扁平面两侧的挡块通过螺钉将输出轴完全固定住.

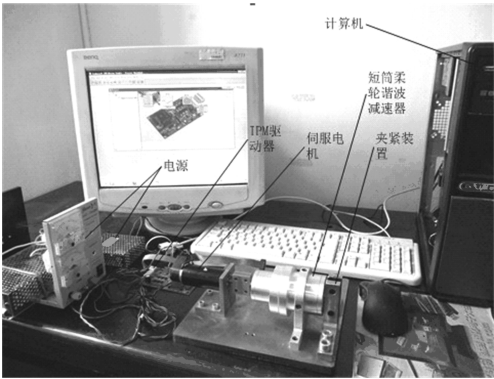


图 12 传动刚度实验测试装置

刚度测试实验中,直流伺服电机工作在力矩控制模式,这样无需添加力矩传感器,可以通过实

时读取驱动器为直流伺服电机提供的电流大小,并根据直流电机力矩和电流的关系直接准确计算出输入力矩 T_1 . 同时通过电机的光电码盘读取与电机轴刚性相连的短筒谐波减速器样机输入轴的转角值,从而得到绘制转矩-转角曲线图所需的全部数据.实验采取的加载的方式为线性正向加载到额定转矩 $28\text{ N}\cdot\text{m}$,再逐渐卸载至 $0\text{ N}\cdot\text{m}$.然

后反向线性加载到额定转矩 $28\text{ N}\cdot\text{m}$,再逐渐卸载至 $0\text{ N}\cdot\text{m}$;为了得到完整封闭的曲线图继续正向加载 $1\text{ N}\cdot\text{m}$ 转矩.反复测量多次.将输入轴的转角和力矩折算到输出轴,绘出转矩-转角曲线.

经多次试验测试得到的柔轮长径比 $1/4$ 的刚轮轮齿具有 0.2° 倾角的短筒柔轮谐波减速器的负载转矩-角位移曲线如图 13 所示.

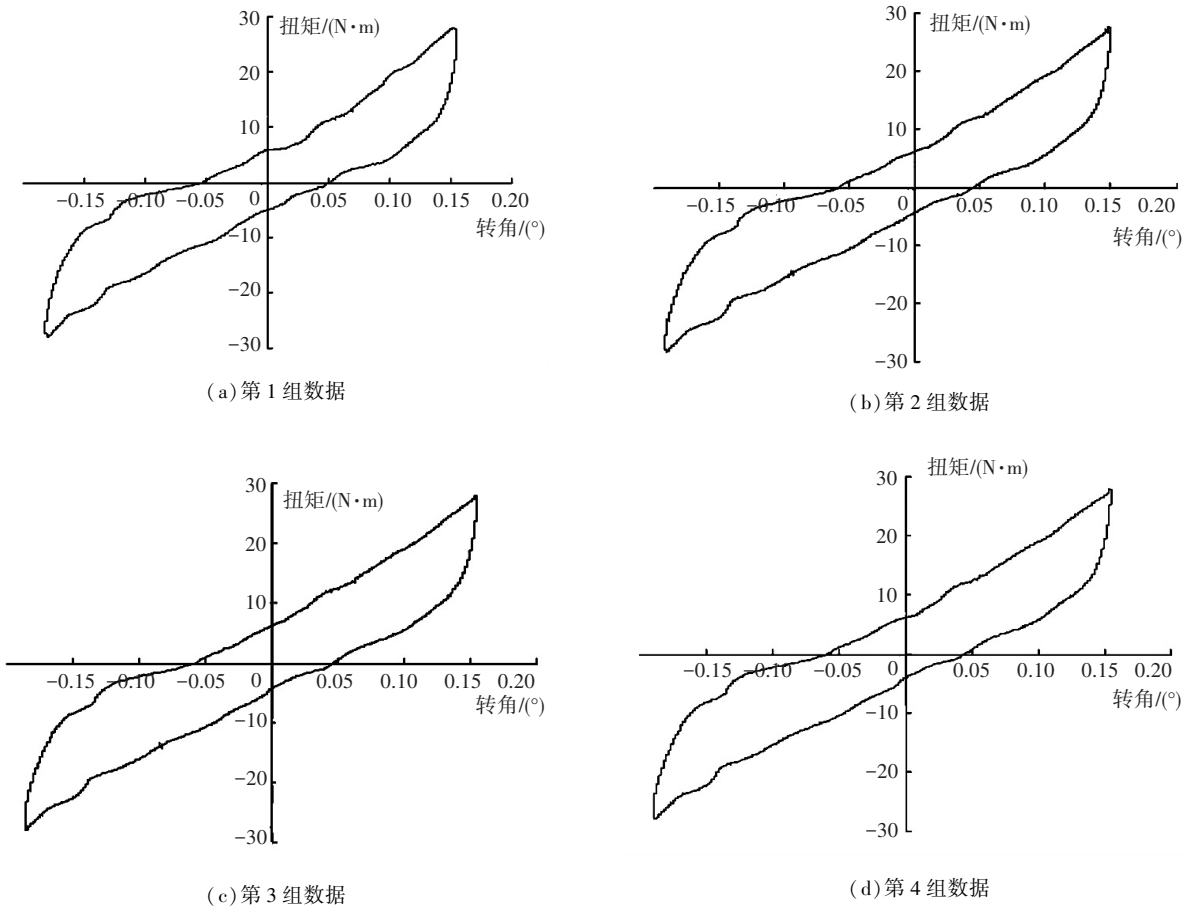


图 13 刚轮轮齿倾角为 0.2° 时测得的转矩-角位移曲线

曲线的纵坐标为输出端负载力矩,横坐标为折算到输出端的扭转角度,随着输出端加载和卸载的变化形成一条闭合的曲线,是有间隙的谐波传动刚度图的一般形式^[15],其原因主要是柔轮轮齿与刚轮轮齿间的齿侧间隙、波发生器和柔轮间的间隙及柔轮的弹性变形所引起的,其中回线的面积表征着能量损耗.反复测试的 4 组试验数据得到十分相似的负载转矩-角位移曲线,说明了制作的短筒谐波减速器传动刚度是稳定的,并且负载反复加到了额定载荷时短筒柔轮谐波减速器的传动刚度也基本不变,说明其静态承载能力大于额定载荷 $28\text{ N}\cdot\text{m}$.

传动刚度采用传动刚度系数来表征,其表达式为

$$C = dT/d\phi.$$

式中: C 为传动刚度值, $\text{N}\cdot\text{m}/(^{\circ})$; T 为输出端扭矩, $\text{N}\cdot\text{m}$; ϕ 为输出端扭转角度, $(^{\circ})$.

传动刚度的计算结果如表 4 所示.

表 4 传动刚度计算结果

刚轮轮齿倾角	传动刚度/ $(\text{N}\cdot\text{m}\cdot(^{\circ})^{-1})$	
	第 1 阶段	第 2 阶段
0.2°	98.72	182.78
无倾角	55.64	131.48

对比轮齿有倾角和无倾角时传动刚度可以看出:刚轮轮齿有倾角的短筒柔轮谐波减速器在图 14 所示第一象限内以额定负载的一半附近为分解点,负载转矩-角位移曲线被分为前后两个加载阶段,均具有较大的传动刚度,前一段曲线下传动刚度提高 77.4% ,后一段曲线下传动刚度提

高 39.01%.

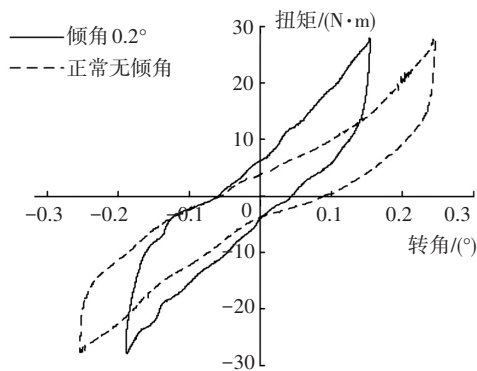


图 14 倾角为 0.2° 和无倾角时的转矩-角位移曲线对比图

4 结 论

1) 为减小柔轮张角对啮合性能的影响,提出了柔轮采用双圆弧齿廓、刚轮轮齿有一定倾角的短筒柔轮谐波减速器设计新方法。

2) 提出了采用慢走丝线切割加工工艺分别加工长径比为 $1/4 \sim 1/2$ 的短筒柔轮和轮齿有倾角的刚轮轮齿方法。

3) 刚轮轮齿有倾角的短筒柔轮谐波减速器两阶段传动刚度分别提高 77.4%、39.01%,验证了刚轮轮齿有倾角短筒柔轮谐波减速器具有更高传动刚度和负载能力。

参考文献

- [1] 张勇. 仿人机器人用 $1/4$ 比例柔轮谐波传动啮合理论与分析[D]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学, 2011:1-35.
- [2] DONG H M, WANG D L. Elastic deformation characteristic of the flexspline in harmonic drive[C]//ASME/IFTOMM International Conference on Reconfigurable Mechanisms and Robots. London: ASME/IFTOMM, 2009: 363-369.
- [3] FU Junfeng, DONG Haijun, SHEN Yunwen. Stress analysis of the flexspline in harmonic gearing by using FEM[J]. China Mechanical Engineering, 2007, 8(18): 2210-2214.

- [4] MACKRELL G. Harmonic approach to gear technology [J]. Plant Engineer, 2006, 50: 24-25.
- [5] OSTAPSKI W, MUKHA I. Stress state analysis of harmonic drive elements by fem [J]. Technical Sciences, 2007, 55(1): 115-123.
- [6] UEURA K, KIYOSAWA Y, KUROGI J, et al. Tribological aspects of a strain wave gearing system with specific reference to its space application[J]. Journal of Engineering Tribology, 2008, 222(8): 1051-1061.
- [7] ISHIKAWA S, KIYOSAWA Y. Flexing contact type gear drive of non-profile-shifted two-circular-arc composite tooth profile: US, 5458023 [P]. 1995-10-17 [2012-06-15]. <http://patft.uspto.gov/netacgi/nph-Parser?Sect2=PTO1&Sect2=HITOFF&p=1&u=/netahtml/PTO/search-bool.html&r=1&f=G&l=50&d=PALL&RefSrch=yes&Query=PN/5458023>.
- [8] MAITI R. A novel harmonic drive with pure involute tooth gear pair [J]. Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME, 2004, 126: 178-182.
- [9] UEURA K, SLATTER R. Development of the harmonic drive gear for space applications[J]. Space Mechanisms and Tribology, 1999, 438(1): 259-264.
- [10] HASHIMOTO M, KIYOSAWA Y. Experimental study on torque control using harmonic drive built-in torque sensors[J]. J Robot Syst, 1998, 15(8): 435-445.
- [11] 辛洪兵. 双圆弧谐波齿轮传动基本齿廓设计[J]. 中国机械工程, 2011, 22(6): 656-662.
- [12] 沈允文, 叶庆泰. 谐波齿轮传动的理论与设计[M]. 北京: 机械工业出版社, 1985: 185-190.
- [13] 吴伟国, 张勇, 梁风. 具有啮合齿面接触对的谐波传动有限元模型建立与分析[J]. 机械传动, 2011, 35(12): 37-41.
- [14] 齿轮手册编委会. 齿轮手册[M]. 北京: 机械工业出版社, 2005: 105-123.
- [15] 伊万诺夫. 谐波齿轮传动[M]. 沈允文, 李克美, 译. 北京: 国防工业出版社, 1987.

(编辑 杨 波)