

# 基于误差敏感分析的 Stewart 平台参数辨识方法

石 勇<sup>1</sup>, 刘文涛<sup>2</sup>

(1. 哈尔滨工程大学 动力与能源工程学院, 150001 哈尔滨; 2. 哈尔滨工业大学 机电工程学院, 150001 哈尔滨)

**摘要:** 针对 Stewart 平台参数辨识问题, 提出基于误差敏感分析的参数辨识方法. 通过建立 Stewart 动平台在不同位置的位姿误差模型, 得到 Stewart 平台结构参数辨识方法, 该方法解析了 Stewart 平台在不同位姿下, 结构参数变化及其输出的敏感性. 利用数值法构造出误差影响敏感矩阵, 可辨识系统结构参数. 通过实例计算与修正, Stewart 平台位置误差从 4.8 mm 降到到 1.12 mm, 角度误差从 5.4° 降到 1.05°, 验证了该辨识方法是有效可行的.

**关键词:** Stewart 平台; 标定; 辨识; 误差敏感分析; 正解模型; 逆解模型

**中图分类号:** TG659      **文献标志码:** A      **文章编号:** 0367-6234(2013)10-0123-06

## Parameters identification method of Stewart platform based on error sensitivity analysis

SHI Yong<sup>1</sup>, LIU Wentao<sup>2</sup>

(1. College of Power and Energy Engineering, Harbin Engineering University, 150001 Harbin, China;

(2. School of Mechatronic Engineering, Harbin Institute of Technology, 150001 Harbin, China)

**Abstract:** Aiming at the parameter identification of Stewart platform, a parameters identification method based on error sensitivity analysis was presented. With the creation of the position and pose error model at two different points of move platform, the identification method for structural parameters of Stewart platform is deduced. The method explains the sensitivity between the structural parameters and the position and pose of Stewart platform at the different points. In an instance, Stewart platform position error is reduced from 4.8 mm to 1.12 mm, and angle error from 5.4° to 1.05°. Therefore, the identification method is verified effective and feasible.

**Key words:** Stewart platform; calibration; identification; error sensitivity analysis; forward kinematics model; backward kinematics model

Stewart 平台具有结构简单、理论刚度高、可实现空间 6 个自由度运动等优点, 被广泛运用在并联机器人、并联机床、模拟器、对接机构等场合. 在 Stewart 平台生产过程中, 不可避免地存在制造和安装误差, 这些误差会改变 Stewart 平台的结构参数, 影响机构的运动学模型, 导致 Stewart 平台的运动精度降低. 因此, Stewart 平台在应用前需要进行结构参数标定. 相比于传统串联结构平台, Stewart 平台的任一结构参数误差会对其 6 个自由度运动方向的位姿精度产生影响, 其标定方法

相对困难. 关于 Stewart 平台标定, 国内外开展了大量的研究, Majarena 等将 Stewart 平台的标定方法分为外部标定, 约束标定和自标定 3 种<sup>[1]</sup>. 自标定是在 Stewart 机构关节上安装传感器, 传感器的数量一般大于机构自由度. 如 Hesselbach 等采用感应传感器测量 Stewart 机构关节的角度, 间接获取平台位姿, 实现机构自标定<sup>[2]</sup>; 高建设等提出了一种运动学自标定方法, 利用冗余传感器测出 Stewart 平台位姿, 然后根据其运动学逆解, 建立机构标定模型, 并采用遗传算法, 优化辨识 Stewart 平台结构参数<sup>[3]</sup>. 约束标定是限制 Stewart 平台的某些自由度, 从而保持平台某些结构参数恒定的标定方法. 如 Ren 等采用此标定方法减少系统位置误差 0.3 mm, 姿态误差 0.15°<sup>[4]</sup>. 大多

收稿日期: 2012-11-26.

基金项目: 中央高校基本科研业务费专项资金资助(HEUCF130307).

作者简介: 石 勇(1973—), 男, 副教授.

通信作者: 石 勇, sy\_hit@163.com.

数情况下,在 Stewart 平台上安装传感器或约束自由度比较困难,因此,外部标定法被广泛使用. 外部标定采用外部测量设备获得系统误差数据,然后通过模型参数辨识方法计算系统参数. 如 Chiang 等采用图像采集设备<sup>[5]</sup>,文献[6-7]分别采用坐标测量机作为 Stewart 平台位姿测量工具. Majarena 等提出在 Stewart 平台的动平台上安装3个固定球,采用线性光学传感器和坐标测量机测量这3个固定球的位置来计算动平台的位姿,然后建立 Stewart 平台正、逆解的模型,实现对机构参数的标定<sup>[8]</sup>. 此外还有采用经纬仪、倾角仪和激光跟踪仪等仪器进行外部标定的方法,以及利用机床自身加工件的误差数据对 Stewart 平台进行标定的方法<sup>[9]</sup>等. 文献[10]以6-TPS型并联机床为对象,以数值法构造了机床末端位姿误差与结构误差的影响系数矩阵,提出了测量并联机床平动和聚点性误差的方案,并在工程应用中验证了该标定方法的有效性. 但该文献主要分析了影响系数矩阵的构造方法,对 Stewart 平台辨识模型的演绎没有介绍. 文献[11]推导出并联机床外部标定辨识方程的残差近似等于标定后的位姿误差,有效地提高并联机床的整体精度. 文献[12]采用光栅球杆仪对 Stewart 并联机床动平台的位置和姿态进行间接测量,采用矩阵重构的方法解决实际标定过程中,由于测量仪器自身精度产生的测量噪声所造成的最终辨识结果的严重失真. 文献[13]针对 Stewart 平台机构的标定提出了一种方便、实用的鸡尾酒法,采用 Stewart 平台正解公式构造结构误差雅可比矩阵,并采用了与测量方式相一致的广义坐标,通过该方法可以使用各种普通测量工具或者其组合,对 Stewart 机构进行标定测量,避免了利用专门工具进行空间多维坐标测量的复杂性. 该文献利用误差雅可比矩阵建立 Stewart 机构参数辨识模型,主要研究了误差雅可比矩阵的建立方法. 文献[14]提出了3点3轴测量方法,对6自由度微运动平台的参数进行修正,提高了系统的精度,该文献主要从控制角度提出 Stewart 机构的误差补偿方法.

针对以上 Stewart 平台参数辨识模型研究上的不足,本文从通用性和实用性角度出发,基于

$$T_B^M = T_1(z, \alpha) T_2(y, \beta) T_3(z, \gamma) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma & -\cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \gamma & \cos \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma & -\sin \alpha \cos \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & \sin \alpha \sin \beta \\ -\sin \beta \cos \gamma & \sin \beta \sin \gamma & \cos \beta \end{bmatrix} \quad (1)$$

Stewart 平台位姿误差模型,提出了一种基于误差敏感分析的 Stewart 平台参数辨识方法. 该方法可对 Stewart 平台进行多个运动方向和不同空间位姿测量,利用所获得的相对位姿误差数据,通过构造 Stewart 平台参数误差相对其动平台位姿误差的影响矩阵,实现对 Stewart 平台结构参数的辨识. 数据结果表明该方法实用、方便且有效.

## 1 Stewart 平台结构及动平台位姿描述

Stewart 平台结构如图1所示,由1个固定平台、1个动平台和6个可伸缩的支路构成,每个支路分别通过球铰副(或者采用虎克铰及万向节)与固定平台和动平台相连. Stewart 平台的主要结构参数有42个,即固定平台上6个球铰副中心的位置  $x_i^A, y_i^A, z_i^A, i = 1, 2, \dots, 6$ , 动平台上6个球铰副中心的位置  $x_i^B, y_i^B, z_i^B, i = 1, 2, \dots, 6$ , 以及6个支路的长度  $l_i, i = 1, 2, \dots, 6$ .

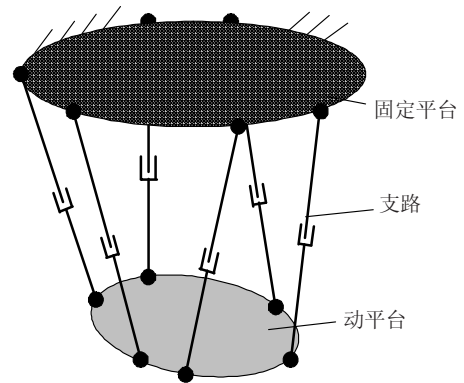


图1 Stewart 平台结构图

如图2所示,动平台的位置和姿态可由与其固连的动坐标系  $\{B\}: O' - x'y'z'$  相对于和固定平台相固连的定坐标系  $\{M\}: O - xyz$  的位姿来描述. 常用描述动平台姿态的方法有 Euler 角和 RPY 角, 由于 Euler 角的几何意义直观, 因此, Stewart 平台常用 Euler 角的方式来表示动平台的姿态. Euler 角的表示方式为: 动坐标系  $\{B\}$  从与固定坐标  $\{M\}$  相重合的位姿开始, 依次绕自身  $z'$  轴转动  $\alpha$  角度, 再绕自身  $y'$  轴转动  $\beta$  角度, 最后再绕自身  $z'$  轴转动  $\gamma$  角度后变成当前的姿态. 因此, 旋转矩阵  $T_B^M$  可表示为

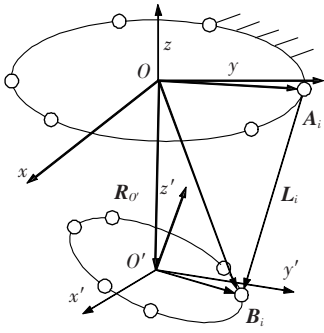


图2 Stewart 平台位姿示意图

## 2 Stewart 平台的逆解和正解

如图2所示,设固定平台上的6个球铰副中心点在固定坐标系 $\{M\}$ 下的位置为 $A_i(x_i^A, y_i^A, z_i^A)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 6$ ;动平台上的6个球铰副中心点在动坐标系 $\{B\}$ 下的位置为 $B_i'(x_i^B, y_i^B, z_i^B)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 6$ ,它在固定坐标系 $\{M\}$ 下的位置为 $B_i(x_i^B, y_i^B, z_i^B)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 6$ . Stewart 平台的逆解为已知动坐标系 $\{B\}$ 在固定坐标系 $\{M\}$ 下的位置 $R_{O'}^M(x_o^M, y_o^M, z_o^M)$ 和姿态 $\alpha, \beta, \gamma$ ,以及 Stewart 平台结构参数 $A_i^M, B_i^B$ ,求解6个支路长度 $l_i, i = 1, 2, \dots, 6$ .

通过坐标变换,可知动平台上的6个球铰副中心点在固定坐标系 $\{M\}$ 下的位置为

$$B_i = T_B^M B_i' + R_{O'}^M. \quad (2)$$

因此,6个驱动杆长为

$$l_i = \|A_i - B_i\|, \quad i = 1, 2, \dots, 6. \quad (3)$$

Stewart 平台的正解为已知其结构参数 $A_i^M, B_i^B$ 和6个支路长度 $l_i, i = 1, 2, \dots, 6$ ,求解动坐标系 $\{B\}$ 在固定坐标系 $\{M\}$ 下的位置 $R_{O'}^M(x_o^M, y_o^M, z_o^M)$ 和姿态 $\alpha, \beta, \gamma$ . Stewart 平台的正解复杂,对于一般6-6型结构,目前尚无通用的封闭解,只能依靠数值解法求解,且正解不唯一.对于同一组支路长度,最多可以求出动坐标系 $\{B\}$ 的40组位姿解,而目前比较简单实用的正解方法还是优化法.

## 3 Stewart 平台参数误差分析及参数辨识模型建立

仅考虑 Stewart 平台的主要安装和制造误差,即固定平台上的6个球铰副中心安装制造位置偏差 $\Delta x_i^1, \Delta y_i^1, \Delta z_i^1, i = 1, 2, \dots, 6$ ,动平台上的6个球铰副中心安装制造位置偏差 $\Delta x_i^2, \Delta y_i^2, \Delta z_i^2, i = 1, 2, \dots, 6$ ;以及6个支路实际长度与名义长度的初始偏

差 $\Delta l_i, i = 1, 2, \dots, 6$ 并假设向量 $\theta = [\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_{42}]^T$ 为 Stewart 平台42个名义结构参数.

现将动平台从空间位置点 $P_1 = [x_1 \ y_1 \ z_1 \ \alpha_1 \ \beta_1 \ \gamma_1]^T$ 移到位置点 $P_2 = [x_2 \ y_2 \ z_2 \ \alpha_2 \ \beta_2 \ \gamma_2]^T$ ,则通过 Stewart 平台6个支路驱动电机反馈可以获得支路长度变化由 $L_1 = [l_{11} \ l_{21} \ \dots \ l_{61}]$ 变为 $L_2 = [l_{12} \ l_{22} \ \dots \ l_{62}]$ .则动平台在 $P_1$ 点和 $P_2$ 点之间的名义位姿差为

$$\Delta P = P_1 - P_2 = f(\theta, L_1) - f(\theta, L_2). \quad (4)$$

通过外部测量工具,可测量实际位姿差为

$$\Delta \hat{P} = \hat{P}_1 - \hat{P}_2 = f(\theta + \Delta\theta, L_1) - f(\theta + \Delta\theta, L_2). \quad (5)$$

$\hat{P}_1$ 为 $P_1$ 的实际位姿; $\hat{P}_2$ 为 $P_2$ 的实际位姿; $\Delta\theta = [\Delta\theta_1 \ \Delta\theta_2 \ \dots \ \Delta\theta_{42}]^T$ 为参数误差.因此,名义位姿差 $\Delta P$ 与实际位姿差 $\Delta \hat{P}$ 间的误差为

$$\Delta e = \Delta \hat{P} - \Delta P = f(\theta + \Delta\theta, L_1) - f(\theta + \Delta\theta, L_2) - (f(\theta, L_1) - f(\theta, L_2)) = (f(\theta + \Delta\theta, L_1) - f(\theta, L_1)) - (f(\theta + \Delta\theta, L_2) - f(\theta, L_2)). \quad (6)$$

式中: $\Delta e$ 为包含6个自由度方向的测量误差向量, $\Delta e = [\Delta e_x \ \Delta e_y \ \Delta e_z \ \Delta e_\alpha \ \Delta e_\beta \ \Delta e_\gamma]^T$ .

通过泰勒展开,去掉高次项后,可得

$$f(\theta + \Delta\theta, L_1) - f(\theta, L_1) \approx \frac{\partial f(\theta, L_1)}{\partial \theta_1} \Delta\theta_1 + \frac{\partial f(\theta, L_1)}{\partial \theta_2} \Delta\theta_2 + \dots + \frac{\partial f(\theta, L_1)}{\partial \theta_{42}} \Delta\theta_{42}, \quad (7)$$

$$f(\theta + \Delta\theta, L_2) - f(\theta, L_2) \approx \frac{\partial f(\theta, L_2)}{\partial \theta_1} \Delta\theta_1 + \frac{\partial f(\theta, L_2)}{\partial \theta_2} \Delta\theta_2 + \dots + \frac{\partial f(\theta, L_2)}{\partial \theta_{42}} \Delta\theta_{42}. \quad (8)$$

将式(7)、(8)代入式(6),可得

$$\Delta e = \frac{\partial f(\theta, L_1)}{\partial \theta_1} \Delta\theta_1 + \frac{\partial f(\theta, L_1)}{\partial \theta_2} \Delta\theta_2 + \dots + \frac{\partial f(\theta, L_1)}{\partial \theta_{42}} \Delta\theta_{42} - \left( \frac{\partial f(\theta, L_2)}{\partial \theta_1} \Delta\theta_1 + \frac{\partial f(\theta, L_2)}{\partial \theta_2} \Delta\theta_2 + \dots + \frac{\partial f(\theta, L_2)}{\partial \theta_{42}} \Delta\theta_{42} \right) = \left( \frac{\partial f(\theta, L_1)}{\partial \theta_1} - \frac{\partial f(\theta, L_2)}{\partial \theta_1} \right) \Delta\theta_1 + \left( \frac{\partial f(\theta, L_1)}{\partial \theta_2} - \frac{\partial f(\theta, L_2)}{\partial \theta_2} \right) \Delta\theta_2 + \dots + \left( \frac{\partial f(\theta, L_1)}{\partial \theta_{42}} - \frac{\partial f(\theta, L_2)}{\partial \theta_{42}} \right) \Delta\theta_{42}. \quad (9)$$

写成矩阵形式为

$$\Delta e = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\theta, L_1)}{\partial \theta_1} - \frac{\partial f(\theta, L_2)}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f(\theta, L_1)}{\partial \theta_2} - \frac{\partial f(\theta, L_2)}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial f(\theta, L_1)}{\partial \theta_{42}} - \frac{\partial f(\theta, L_2)}{\partial \theta_{42}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\theta_1 \\ \Delta\theta_2 \\ \vdots \\ \Delta\theta_{42} \end{bmatrix} = J \Delta\theta. \quad (10)$$

展开式(10),可得

$$\begin{bmatrix} \Delta e_x \\ \Delta e_y \\ \Delta e_z \\ \Delta e_\alpha \\ \Delta e_\beta \\ \Delta e_\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_x(\boldsymbol{\theta}, L_1)}{\partial \theta_1} - \frac{\partial f_x(\boldsymbol{\theta}, L_2)}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_x(\boldsymbol{\theta}, L_1)}{\partial \theta_2} - \frac{\partial f_x(\boldsymbol{\theta}, L_2)}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial f_x(\boldsymbol{\theta}, L_1)}{\partial \theta_{42}} - \frac{\partial f_x(\boldsymbol{\theta}, L_2)}{\partial \theta_{42}} \\ \frac{\partial f_y(\boldsymbol{\theta}, L_1)}{\partial \theta_1} - \frac{\partial f_y(\boldsymbol{\theta}, L_2)}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_y(\boldsymbol{\theta}, L_1)}{\partial \theta_2} - \frac{\partial f_y(\boldsymbol{\theta}, L_2)}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial f_y(\boldsymbol{\theta}, L_1)}{\partial \theta_{42}} - \frac{\partial f_y(\boldsymbol{\theta}, L_2)}{\partial \theta_{42}} \\ \frac{\partial f_z(\boldsymbol{\theta}, L_1)}{\partial \theta_1} - \frac{\partial f_z(\boldsymbol{\theta}, L_2)}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_z(\boldsymbol{\theta}, L_1)}{\partial \theta_2} - \frac{\partial f_z(\boldsymbol{\theta}, L_2)}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial f_z(\boldsymbol{\theta}, L_1)}{\partial \theta_{42}} - \frac{\partial f_z(\boldsymbol{\theta}, L_2)}{\partial \theta_{42}} \\ \frac{\partial f_\alpha(\boldsymbol{\theta}, L_1)}{\partial \theta_1} - \frac{\partial f_\alpha(\boldsymbol{\theta}, L_2)}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_\alpha(\boldsymbol{\theta}, L_1)}{\partial \theta_2} - \frac{\partial f_\alpha(\boldsymbol{\theta}, L_2)}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial f_\alpha(\boldsymbol{\theta}, L_1)}{\partial \theta_{42}} - \frac{\partial f_\alpha(\boldsymbol{\theta}, L_2)}{\partial \theta_{42}} \\ \frac{\partial f_\beta(\boldsymbol{\theta}, L_1)}{\partial \theta_1} - \frac{\partial f_\beta(\boldsymbol{\theta}, L_2)}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_\beta(\boldsymbol{\theta}, L_1)}{\partial \theta_2} - \frac{\partial f_\beta(\boldsymbol{\theta}, L_2)}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial f_\beta(\boldsymbol{\theta}, L_1)}{\partial \theta_{42}} - \frac{\partial f_\beta(\boldsymbol{\theta}, L_2)}{\partial \theta_{42}} \\ \frac{\partial f_\gamma(\boldsymbol{\theta}, L_1)}{\partial \theta_1} - \frac{\partial f_\gamma(\boldsymbol{\theta}, L_2)}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_\gamma(\boldsymbol{\theta}, L_1)}{\partial \theta_2} - \frac{\partial f_\gamma(\boldsymbol{\theta}, L_2)}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial f_\gamma(\boldsymbol{\theta}, L_1)}{\partial \theta_{42}} - \frac{\partial f_\gamma(\boldsymbol{\theta}, L_2)}{\partial \theta_{42}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta_1 \\ \Delta \theta_2 \\ \vdots \\ \Delta \theta_{42} \end{bmatrix} \quad (11)$$

对式(10)进行变换,则

$$\Delta \boldsymbol{\theta} = \mathbf{J}^{-1} \Delta \mathbf{e}. \quad (12)$$

从式(11)可看出,矩阵  $\mathbf{J}$  中的每一项表示在给定两个不同位姿下, Stewart 平台某一个结构参数变化引起的某一个自由度方向输出变化的关系,也表示该项参数变化对输出的敏感性. 因此,只要求解出 Stewart 平台每一项结构参数变化对其输出的敏感性,建立误差敏感矩阵  $\mathbf{J}$ , 即可辨识出 Stewart 平台结构参数误差.

### 4 误差敏感矩阵的计算和辨识方程的求解

由于 Stewart 平台正解的封闭解复杂, 矩阵  $\mathbf{J}$  难以通过解析解求出, 因此在实际计算中, 可以采用向前差分计算近似代替矩阵  $\mathbf{J}$  中任意一项微分

计算, 然后求出矩阵  $\mathbf{J}$ , 即

$$\frac{\partial f_i(\boldsymbol{\theta}, L_1)}{\partial \theta_j} \approx \frac{f(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{j-1}, \theta_j + 1, \theta_{j+1}, \dots, \theta_{42}, L_1) - f(\boldsymbol{\theta}, L_1)}{1}. \quad (13)$$

也可采用中心差分, 或更小步距差分, 差分步距取得越小就越接近于微分. 表 1 为 Stewart 平台在位置点(200, 150, 300, 11, 0, 0)处, 1 个支路 7 个参数采用 1 mm 步长向前差分计算结果. 表 2 为 ±1 mm 步长中心差分计算结果. 表 3 为 0.1 mm 步长向前差分计算结果. 从结果看由于 Stewart 平台的结构参数尺寸(见表 4, 5)相比差分步长要大的很多, 因此表 1~3 的结果相差都在 0.1 μm 单位级别, 因此对于一般的加工、机械人用的 Stewart 平台, 1 mm 步长向前差分即可满足要求.

表 1 采用 1 mm 步长向前差分计算结果

参数 $i$	$\Delta f_i / \Delta x_1^A$	$\Delta f_i / \Delta y_1^A$	$\Delta f_i / \Delta z_1^A$	$\Delta f_i / \Delta x_1^B$	$\Delta f_i / \Delta y_1^B$	$\Delta f_i / \Delta z_1^B$	$\Delta f_i / \Delta l_1$
$x$	-0.006 6	0.009 4	0.025 9	0.006 7	-0.009 3	-0.025 3	-0.027 7
$y$	-0.140 7	0.197 6	0.543 1	0.140 8	-0.197 2	-0.541 1	-0.593 2
$z$	-0.036 3	0.051 2	0.1412	0.036 5	-0.050 9	-0.139 0	-0.152 4
$\alpha$	-0.067 0	3.075 8	3.077 1	3.075 6	-0.067 2	-0.068 5	-0.068 7
$\beta$	0.000 4	0.000 6	0.001 5	0.000 4	0.000 6	0.001 5	0.001 7
$\gamma$	0.066 7	-3.075 3	-3.075 8	-3.075 3	0.066 8	0.067 2	0.067 3

表 2 采用 ±1 mm 步长中心差分计算结果

参数 $i$	$\Delta f_i / \Delta x_1^A$	$\Delta f_i / \Delta y_1^A$	$\Delta f_i / \Delta z_1^A$	$\Delta f_i / \Delta x_1^B$	$\Delta f_i / \Delta y_1^B$	$\Delta f_i / \Delta z_1^B$	$\Delta f_i / \Delta l_1$
$x$	-0.006 6	0.009 4	0.025 6	0.006 6	-0.009 4	-0.025 6	-0.028 0
$y$	-0.140 9	0.197 4	0.542 2	0.140 9	-0.197 4	-0.542 2	-0.593 9
$z$	-0.036 4	0.051 0	0.140 2	0.036 4	-0.051 0	-0.140 2	-0.153 6
$\alpha$	-0.067 1	3.075 7	3.077 0	3.075 5	-0.067 3	-0.068 6	-0.068 8
$\beta$	0.000 4	0.000 6	0.001 5	0.000 4	0.000 6	0.001 5	0.001 7
$\gamma$	0.066 8	-3.075 3	-3.075 8	-3.075 2	0.066 8	0.067 3	0.067 3

表 3 采用 0.1 mm 步长向前差分计算结果

参数 $i$	$\Delta f_i / \Delta x_1^A$	$\Delta f_i / \Delta y_1^A$	$\Delta f_i / \Delta z_1^A$	$\Delta f_i / \Delta x_1^B$	$\Delta f_i / \Delta y_1^B$	$\Delta f_i / \Delta z_1^B$	$\Delta f_i / \Delta l_1$
$x$	-0.006 6	0.009 3	0.025 6	0.006 6	-0.009 3	-0.025 6	-0.028 0
$y$	-0.140 9	0.197 4	0.542 3	0.140 9	-0.197 4	-0.542 1	-0.593 9
$z$	-0.036 4	0.051 0	0.140 3	0.036 4	-0.051 0	-0.140 0	-0.153 4
$\alpha$	-0.066 5	3.075 1	3.075 2	3.075 1	-0.066 5	-0.066 7	-0.066 7
$\beta$	0.000 4	0.000 6	0.001 5	0.000 4	0.000 6	0.001 5	0.001 7
$\gamma$	0.066 5	-3.075 1	-3.075 1	-3.075 1	0.066 5	0.066 5	0.066 5

由于一次测量过程中的数据  $\Delta e$  包含的元素少于结构误差参数  $\Delta \theta$  的 42 项, 因此, 为了获得更好的求解结果, 必须在 Stewart 平台的多个运动方向和不同空间位置进行测量, 建立多个误差影响矩阵  $J_1, J_2, \dots, J_n$ , 利用其对应的测量误差  $\Delta e_1, \Delta e_2, \dots, \Delta e_n$ , 建立方程组

$$\begin{bmatrix} \Delta e_1 \\ \Delta e_2 \\ \vdots \\ \Delta e_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \vdots \\ J_n \end{bmatrix} \Delta \theta. \quad (14)$$

式(14)的求解可以采用优化法, 设立目标函数  $\min F = \|\Delta e - J\Delta \theta\|$ , 当  $F$  满足给定允许值, 优化结束, 即可获得结果。

### 5 应用实例

在 Stewart 平台上对辨识方法进行试验, 已知 Stewart 平台结构参数如表 4、5 所示。动平台在工作空间内不同位置和运动方向进行移动, 利用激光干涉仪和水平仪对位姿差进行测量。测量和辨识过程中需要注意以下问题: 1) 测量数据样本对参数的辨识有较大的影响, 由式(12)可知, 如果

$$\Delta l = [-0.054\ 4 \quad -0.075\ 2 \quad 0.013\ 1 \quad 0.080\ 7 \quad 0.114\ 3 \quad 0.008\ 5].$$

辨识参数为 42 个, 要求解出该方程的唯一解, 则至少需要 42 个方程, 若一个测量位置点可以测量 6 个自由度方向的误差, 则至少需要测量 7 个位置点。此外, 由于测量样本可能存在的线性相关性, 因此实际需要更多的测量数据。2) 为了防止参数辨识后, 仅在局部工作空间内 Stewart 平台精度较好, 测量样本应尽可能布满 Stewart 平台整个工作空间。3) 若在 Stewart 平台结构的参数中, 有些参数在制造和安装过程中可以保证精度, 则在辨识过程中, 可以仅对其他参数进行辨识, 相应的测量数据样本和误差敏感矩阵  $J$  可以减少。4) 由式(7)、(8)可知, 若要求 Stewart 平台参数辨识后的精度较高, 则需要保证 Stewart 平台结构参数初始误差较小。5) 为了保证测量数据样本和辨识结果要求的精度, 测量工具的精度至少应高于辨识结果要求精度一个精度级别。如果测量样本  $\Delta e$  数值较大, 则式(14)会难以收敛到所需要精度, 这时需要进行多次标定。

建立辨识方程组, 进行参数辨识, 获得参数修正值如表 6、7 所示。辨识的杆长参数误差为

表 4 固定平台上球铰副中心  $A_i$  名义坐标值

mm

坐标	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$
X	162.330	-162.330	-716.239	-553.909	553.909	716.239
Y	733.321	733.321	-226.078	-507.242	-507.242	-226.078
Z	1690	1690	1690	1690	1690	1690

表 5 动平台上球铰副中心  $B_i$  名义坐标值

mm

坐标	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$
X	222.896	-222.896	-300.542	-77.646	77.646	300.542
Y	218.347	218.347	83.860	-302.207	-302.207	83.860
Z	387.525	387.525	387.525	387.525	387.525	387.525

表 6 辨识的固定平台上球铰副中心  $A_i$  坐标值误差

mm

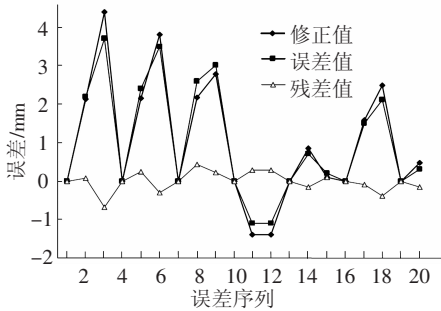
坐标	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$
X	0.0357	-0.0573	0.1259	-0.0850	-0.1454	-0.0432
Y	0.1197	-0.1127	0.2688	0.0636	-0.0605	-0.0089
Z	0	0	0	0	0	0

表 7 辨识的动平台球铰副中心  $B_i$  坐标值误差

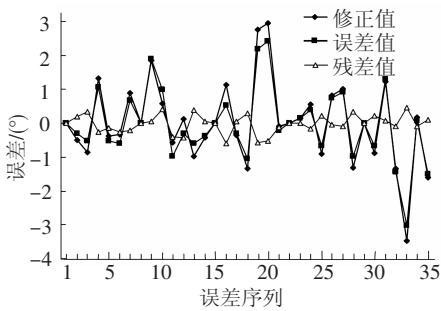
mm

坐标	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$
X	-0.0616	-0.0606	0.0409	0.0086	-0.0394	0.0237
Y	0.0867	-0.1382	-0.0419	0.0283	-0.0574	0.0769
Z	-0.0064	-0.1192	-0.0496	0.0763	0.1216	0.1550

图 3 显示了动平台的测量误差、利用参数辨识方法修正的误差值和剩余的残差值. 可以看到所测量的平台位置误差范围为 $[3.7, -1.1]$ , 经过优化修正后的残差范围为 $[0.433, -0.684]$ ; 平台姿态误差范围为 $[2.41, -3.01]$ , 经过优化修正后的残差范围为 $[0.46, -0.59]$ ; Stewart 平台位置误差从 4.8 mm 降到 1.11 mm, 角度误差从  $5.4^\circ$  降到  $1.05^\circ$ , 提高了平台精度.



(a) 位置误差值、修正值和残差值



(b) 角度误差值、修正值和残差值

图 3 参数误差计算及修正结果

## 6 结 论

1) 针对现有 Stewart 平台参数辨识模型研究上的不足, 从通用性和实用性出发, 基于 Stewart 平台位姿误差模型, 提出了基于误差敏感分析的 Stewart 平台参数辨识方法.

2) 通过对 Stewart 平台位姿差值的计算, 推导出 Stewart 平台结构参数辨识算法, 解析出 Stewart 平台在不同位姿下, 结构参数变化及对其输出的敏感性. 采用差分计算建立误差敏感矩阵, 进行 Stewart 平台结构参数辨识计算, 该方法简单有效.

3) 对比不同差分计算的结果, 对普通加工、机械人用的 Stewart 平台, 1 mm 步长向前差分可满足精度要求, 且在该步长下, 不同的差分计算方法得出的结果相差不大.

4) 通过实例计算与修正, Stewart 平台初始位置误差从 4.8 mm 降到到 1.12 mm, 角度误差从  $5.4^\circ$  降到  $1.05^\circ$ , 验证了该辨识方法的有效可行. 为了实现更高的机床标定精度, 可以进行多次标定, 并需要提高机床的初始误差精度. 本算法还可

用于其他数学模型明确的非线性系统参数辨识.

## 参 考 文 献

[1] MAJARENA A C, SANTOLARIA J, SAMPER D, *et al.* An overview of kinematic and calibration models using internal/external sensors or constraints to improve the behavior of spatial parallel mechanisms [J]. *Sensors*, 2010, 10(11): 10256 - 10297.

[2] HESSELBACH J, BIER C, PIETSCH I, *et al.* Passive-joint sensors for parallel robots [J]. *Mechatronics*, 2005, 15(1): 43 - 65.

[3] 高建设, 程丽, 赵永生. 新型 5 自由度并联机床运动学自标定研究 [J]. *计算机集成制造系统*, 2007, 13(4): 738 - 743.

[4] REN X D, FENG Z R, SU C P. A new calibration method for parallel kinematics machine tools using orientation constraint [J]. *Int J Mach Tools Manuf*, 2009, 49(9): 708 - 729.

[5] CHIANG M H, LIN H T, HOU C L. Development of a stereo vision measurement system for a 3D three-axial pneumatic parallel mechanism robot arm [J]. *Sensors*, 2011, 11(2): 2257 - 2281.

[6] DANEY D. Kinematic calibration of the Gough platform [J]. *Robotica*, 2003, 21(6): 677 - 690.

[7] TRAPET E, SAVIO E, DE CHIFFRE L. New advances in traceability of CMMs for almost the entire range of industrial dimensional metrology needs CIRP [J]. *Ann Manuf Technol*, 2004, 53(1): 4330 - 4338.

[8] MAJARENA A C, SANTOLARIA J, SAMPER D, *et al.* Modelling and calibration of parallel mechanisms using linear optical sensors and a coordinate measuring machine [J]. *Meas Sci Technol*, 2011, 22(10): 1 - 12.

[9] CHANAL H, DUC E, RAY P, *et al.* A new approach for the geometrical calibration of parallel kinematics machines tools based on the machining of a dedicated part [J]. *International Journal of Machine Tools & Manufacture*, 2007, 47(7): 1151 - 1163.

[10] 钟诗胜, 杨晓钧, 王知行. 基于 6-TPS 型并联机床的标定方法研究 [J]. *计算机集成制造系统*, 2005, 11(10): 1069 - 1074.

[11] 高猛, 李铁民, 叶佩青, 等. 面向精度评价的并联机床参数辨识技术 [J]. *机械工程学报*, 2005, 41(5): 79 - 84.

[12] 魏世民, 周晓光, 廖启征. 六轴并联机床运动精度的标定研究 [J]. *中国机械工程*, 2003, 14(23): 1981 - 1986.

[13] 刘文涛, 唐德威, 王知行. Stewart 平台机构标定的鸡尾酒法 [J]. *机械工程学报*, 2004, 40(12): 48 - 53.

[14] TING Y, JAR H C, LI C C. Measurement and calibration for Stewart micro-manipulation system [J]. *Precision Engineering*, 2007, 31(3): 226 - 233.

(编辑 魏希柱)