钢筋混凝土板的极限承载力计算

王 勇[1], 董毓利[1,2], 邹超英[1]

(1. 哈尔滨工业大学 土木工程学院, 150090 哈尔滨; 2. 华侨大学 土木工程学院, 361000 福建 厦门)

摘 要: 为了准确地确定钢筋混凝土板的承载能力,在塑性铰线理论基础上,考虑薄膜效应的影响,提出板的破坏准则,利用板块平衡法对板的极限承载力和位移进行计算,并将计算结果和试验结果进行对比. 结果表明:极限承载力计算值与试验结果吻合较好;与试验极限位移相比,计算极限位移值相对保守. 通过力学分析,解释了在相同挠度下方板极限承载力小于矩形板的破坏机理.

关键词: 钢筋混凝土板;板块平衡法;破坏准则;极限承载力;极限位移

中图分类号: TU375 **文献标志码:** A **文章编号:** 0367 - 6234(2013)02 - 0008 - 06

Calculation of limit carrying capacity of reinforced concrete slabs

WANG Yong[1], DONG Yuli[1,2], ZOU Chaoying[1]

(1. School of Civil Engineering, Harbin Institute of Technology, 150090 Harbin, China;
2. School of Civil Engineering, Huaqiao University, 361000 Xiamen, Fujian, China)

Abstract: To accurately determine the bearing capacity of reinforced concrete slabs, based on the yield hinge line theory and segment equilibrium method, this paper presents two failure criteria to determine the limit carrying capacity and displacement of the slabs, which consider the membrane effect. The calculated results were compared with the test results. The results show that the calculated limit carrying capacity of the slab is agreement with the test result, and the calculated limit displacement is relatively conservative compared with the experimental result. According to the mechanical analysis, the model explains the failure mechanism that the limit carrying capacity of the square slab is lower than that of the rectangular slab under the same deflection.

Key words: reinforced concrete slab; segment equilibrium method; failure criterion; limit carrying capacity; limit displacement

目前对钢筋混凝土板进行极限状态分析,通常采用两种方法,一种是弹塑性理论分析方法,另一种是极限分析法,即采用塑性铰线理论研究其极限承载力[1-2]. 与前一种方法相比,后者使求解问题大大简化,并能较好地反映出板的极限承载能力,具有较强的工程应用价值.

研究表明,由于受拉薄膜效应,当板形成破坏结构而达到屈服状态后,荷载 - 挠度曲线并不出现水平段,而是随着挠度的增加,荷载也随之增加,使得实际的破坏荷载值一般都大于屈服线理论计算的极限荷载值[3-5]. 因此,为了利用这种强度储备,文献[6-7]在经典塑性铰线理论的基础上提出新的理论模型和变形破坏准则,利用板块平衡法对钢筋混凝土板的薄膜效应和承载力进行研究. 实际上,该模型的变形破坏准则基于缩尺试验得出,缺乏较为明确的物理意义. 为此本文提出新的破坏准则,并对钢筋混凝土试验板的极限承载力进行对比分析,验证了模型的有效性.

收稿日期: 2012 - 08 - 13.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (51178143);
高等学校博士点专项基金(20102302110043).
作者简介: 王 勇(1984—),男,博士研究生;
董毓利(1965—),男,教授,博士生导师;
邹超英(1958—),男,教授,博士生导师.
通信作者: 王 勇,wangyong06s@yahoo.com.cn.

1 基本假设

结合经典塑性铰线理论,本文模型假设:

1) 屈服线初始形成时,板跨中挠度是板厚的0.45倍.

2）屈服线形成后，屈服截面的极限弯矩保持为恒值. 即随着变形的增加，截面极限弯矩抵抗矩保持不变.

3）不考虑钢筋的硬化，并忽略受压区钢筋对极限承载能力的影响.

4）不考虑混凝土的抗拉强度.

研究表明，当板中心挠度达到板厚的 0.4 ~ 0.5 时，即达到极限抵抗弯矩[8]. 因此，本文提出当板跨中挠度达到 $0.45h$ 时，屈服线形成. 屈服线形成后，随着变形增加，混凝土受压区高度上移，受拉钢筋到受压区中心的距离增加，进而可认为屈服截面处的抵抗矩基本保持不变[9].

与传统理想屈服理论相同，不考虑钢筋硬化和受压区钢筋对板极限承载能力的影响[8]. 由于混凝土抗拉强度较小，在模型中不考虑其影响.

2　板块平衡法

根据塑性铰线理论，矩形板分为 4 个板块 ABE、$BCFE$、CDF 和 $DAEF$，见图 1. 其中，L、l 分别为板的长边、短边尺寸，x_1、x_2、y_1、y_2 分别为塑性铰线位置参数，m_x、m_y 分别为 x、y 方向每单位宽度塑性铰线上的抵抗矩.

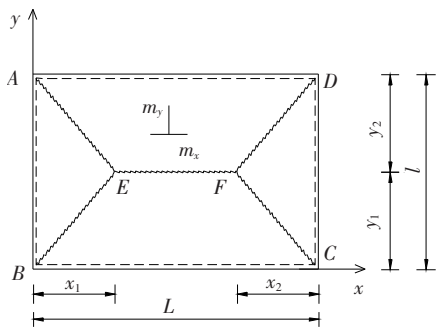


图 1　四边简支板屈服线

图 2 为塑性铰线截面的受力状态，C 为混凝土的压力，T 为钢筋拉力. 结合图 1，板块 $ABE(CDF)$ 绕 $AB(CD)$ 轴的平衡方程为

$$m_x l + T_x l\sin\theta \times \frac{1}{2}x_i = \frac{1}{2}x_i \times \frac{1}{3}x_i \times q \times l;$$

$$\sin\theta = \frac{v - v_0}{\sqrt{(nL)^2 + v^2}}, v \geqslant v_0;$$

$$x_1 = x_2 = nL, n = \frac{k}{2\lambda^2}\left(\sqrt{1 + \frac{3\lambda^2}{k}} - 1\right).$$

式中：m_x 为 x 方向单位宽度截面弯矩；T_x 为 x 方向单位宽度截面钢筋拉力；θ 为塑性铰线转角（x 方向）；x_1、x_2 为屈服线位置参数；v_0 为屈服线形成时的挠度，即 $v_0 = 0.45\ h$；h 为板厚；v 为屈服线形成后的挠度（$v > v_0$）；k 为正交系数（m_x/m_y）；n 为位置参数；λ 为特征值（L/l）；q 为均布荷载；i 为参数（1 或 2）.

经过简化计算，可得

$$q = \frac{6m_x}{(nL)^2}\left[1 + \frac{\sin\theta \times (nL)}{2\gamma_{sx}h_{0x}}\right]. \quad (1)$$

式中：γ_{sx} 为 x 方向力臂系数；h_{0x} 为 x 方向钢筋有效高度.

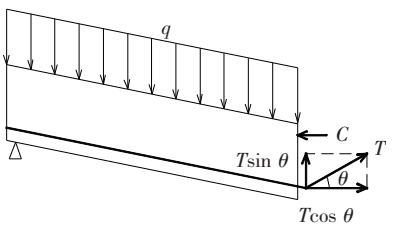


图 2　塑性铰线截面的受力

同样，对于板块 $BCFE(DAEF)$ 绕 $BC(AD)$ 轴的平衡方程为

$$m_y L + T_y\sin\theta' \times (x_1 + x_2) \times \frac{1}{2}y_i + T_y\sin\theta' \times (L - x_1 - x_2) \times y_i = \frac{1}{6}x_1 \times y_i^2 \times q + \frac{1}{6}x_2 \times y_i^2 \times q + \frac{1}{2}(L - x_1 - x_2) \times y_i^2 \times q,$$

$$\sin\theta' = \frac{v - v_0}{\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + v^2}}, v \geqslant v_0.$$

式中：m_y 为 y 方向单位宽度截面弯矩；T_y 为 y 方向单位宽度截面钢筋拉力；θ' 为塑性铰线转角（y 方向）；x_1、x_2、y_1、y_2 为屈服线位置参数；i 为参数（1 或 2）.

简化可得

$$q = \frac{24m_y}{(3 - 4n)l^2}\left[1 + \frac{\sin\theta' \times (1 - n)l}{2\gamma_{sy}h_{0y}}\right]. \quad (2)$$

式中：γ_{sy} 为 y 方向力臂系数；h_{0y} 为 y 方向钢筋有效高度.

当挠度小于 v_0 时，上述模型即为经典的塑性铰线理论. 当挠度进一步增加，钢筋竖向分力逐渐增加，达到破坏条件时，式（1）、（2）两者的较小值即为板的极限承载力值.

3　破坏条件

3.1　Dong 模型

基于跨厚比较大（约为 85）的缩尺板试验结果[10]，文献[7]提出屈服线形成时挠度（v_0）和板破坏条件（最大位移值 Δ）的表达式分别为

$$v_0 = \sqrt{\frac{0.1f_y}{E_s} \times \frac{3L^2}{8}},$$

$$\Delta = \sqrt{\frac{0.5 f_y}{E_s}} \times \frac{3L^2}{8}.$$

式中：f_y 为钢筋屈服强度；E_s 为钢筋弹性模量.

上述破坏条件称为 Dong 模型，即当板跨中挠度达到 Δ，板达到极限承载能力而破坏. 采用该模型计算正常跨厚比(35 ~ 40) 板时，计算结果偏于保守. 因此，在上述模型的基础上，提出新的破坏条件.

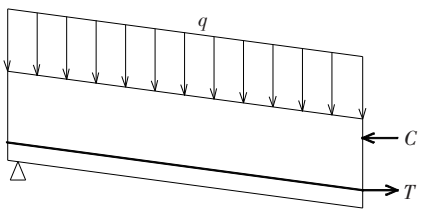
3.2　本文模型

如图 3 所示，在屈服线初始形成时即 $v_0 = 0.45h$，钢筋合力方向是水平的(以 x 方向为例)，截面抵抗矩方程、合力平衡方程为

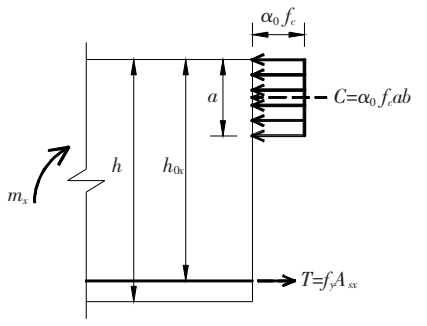
$$m_x = f_y A_{sx}\left(h_{0x} - \frac{a}{2}\right) = f_y A_{sx} h_{0x} \gamma_{sx},$$

$$\gamma_{sx} = 1 - a/(2h_{0x}), f_y A_{sx} = \alpha_0 f_c a b.$$

式中：f_c 为混凝土抗压强度；f_y 为钢筋屈服强度；a 为混凝土受压高度；b 为单位截面宽度(1 m)；A_{sx} 为 x 方向单位宽度的等效钢筋面积；h_{0x} 为 x 方向截面有效高度；γ_{sx} 为 x 方向的力臂系数；α_0 为参数，可取 0.85[8] 和 1.0[11].



(a) v_0 时板块截面受力



(b) v_0 时截面抵抗矩

图 3　v_0 时塑性铰线截面受力

假设钢筋混凝土板在水平方向上没有位移，但可以转动. 随着跨中挠度的增加，截面塑性进一步发展，此时钢筋合力与水平方向有一定角度 θ，进而在竖向方向产生一个分量. 随着变形增大，该分量也将增大，见图 4.

由图 4(b) 可知，截面弯矩和合力平衡方程为

$$m'_x = f_y A_{sx} \cos\theta\left(h_{0x} - \frac{a'}{2}\right),$$

$$f_y A_s \cos\theta = \alpha_1 f_c a' b.$$

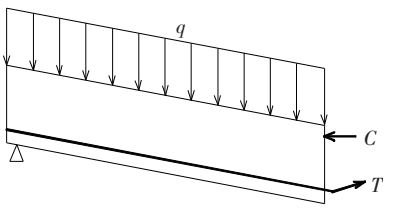
根据极限弯矩承载力保持不变($m_x = m'_x$)的假设，可得

$$f_y A_{sx}\left(h_{0x} - \frac{a}{2}\right) = f_y A_{sx} \cos\theta\left(h_{0x} - \frac{a'}{2}\right),$$

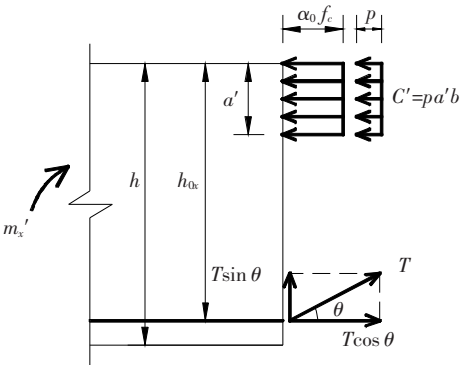
进而有

$$a' = 2h_{0x}(1 - \gamma_{sx}/\cos\theta). \tag{3}$$

由式(3) 可知，随着变形的增加，$\cos\theta$ 逐渐减小，h_{0x} 和 γ_{sx} 不变，受压区高度 a' 逐渐减小.



(a) v 时板块截面受力



(b) v 时截面抵抗矩

图 4　v 时塑性铰线截面受力

在 $v > v_0$ 时，首先假设 α_0 保持不变，根据合力平衡应有

$$f_y A_{sx}\cos\theta - \alpha_0 f_c a' b = \alpha_0 f_c b(a\cos\theta - a') = 0. \tag{4}$$

将式(3)代入式(4)右边，化简可得

$$a\cos\theta - a' = [2h_{0x}(1 - \cos\theta) - a\sin^2\theta]/\cos\theta,$$
$$0 < \cos\theta < 1.$$

在初始屈服线形成时，受压区高度 a 通常小于 $3h_{0x}/8$，进而有

$$a\cos\theta - a' > h_{0x}[2 - 2\cos\theta - 3\sin^2\theta/8] =$$
$$h_{0x}[3\cos^2\theta/8 - 2\cos\theta + 13/8] > 0.$$

即

$$f_y A_{sx}\cos\theta > \alpha_0 f_c a' b. \tag{5}$$

由式(4) 和(5) 两者矛盾，可知 α_0 保持不变的假设是不成立的.

根据上述推理，式(4)的合力平衡表达式为

$$f_y A_{sx}\cos\theta = \alpha_1 f_c a' b,$$
$$\alpha_1 f_c a' b = \alpha_0 f_c a' b + C',$$
$$C' = pa'b, (p = \alpha' f_c,\ \alpha_1 = \alpha_0 + \alpha').$$

式中：p 定义为附加应力，如图 5 所示；C' 定义为

附加应力的合力；α_1、α' 为参数.

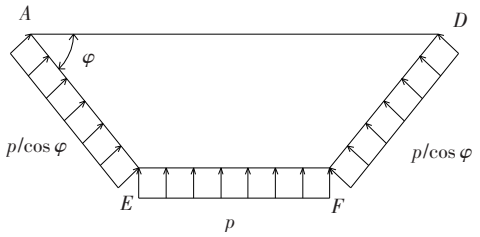


图 5　附加应力

由此可知，随着变形的增加，受压区高度降低，导致受压区混凝土的压应力增加. 然而，由于混凝土极限压应变的限制，附加应力不可能任意增加. 考虑到混凝土破坏是应变控制，受压区混凝土极限压应变（0.003 ~ 0.004）作为板破坏的条件是合理的. 然而，求解压应变，需要采用截面曲率系数，目前还没简单、合理的截面曲率系数公式[8]. 最终，本文提出强度准则.

双轴试验表明，混凝土抗压强度提高为 18% ~27%，平均提高 20%. 如图 5 所示，考虑到斜屈服线角部区域（A 点附近）的扭转效应和垂直斜对角线的裂缝，混凝土抗压强度有所降低. 最终本文选取 $0.05f_c$，即 $p/\cos\varphi$ 达到 $0.05f_c$ 时，板达到极限承载能力.

板的配筋率 ρ 定义为[10]

$$\rho = \frac{1}{2}\left[\frac{f_{u,x}A_{sx}}{0.8f_{cu}h_{0x}} + \frac{f_{u,y}A_{sy}}{0.8f_{cu}h_{0y}}\right].$$

式中：$f_{u,x(y)}$ 为 $x(y)$ 方向钢筋极限强度；$A_{sx(y)}$ 为 $x(y)$ 方向等效钢筋面积；f_{cu} 为混凝土立方体抗压强度，统一取为 $0.8f_c$.

配筋率对板的极限承载能力有较大影响[10]. 对于配筋率低于 0.08 的板，破坏时钢筋应力较高和裂缝较宽，进而导致较大的变形. 对于具有合理配筋率板，板截面具有足够的延性，使得板具有较大的塑性转动变形，并且在板面多出现对角斜裂缝，对角区域混凝土达到极限压应变而出现压碎现象.

因此，对于低配筋率板，认为受拉钢筋达到极限应变 0.01 时，板即达到极限承载能力，可推得板的跨中挠度约为 $l/20$. 最终，以 $l/20$ 作为低配筋率板的破坏准则. 对于配筋率不小于 0.08、且合理的钢筋混凝土板，认为压应力 $p/\cos\varphi$ 达到 $0.05f_c$ 板即达到极限承载能力.

4　模型验证

选取 8 块钢筋混凝土简支板验证模型. 编号 S1、S6、S7 和 S9 为 Taylor 试验板[3]，这 4 块板具有不同钢筋布置和跨厚比. 编号 A1、B1、C1 和 D1 为 Ghoneim 等试验板[4]，板顶、板底均双向布置钢筋. 板的性能参数见表 1. 如表 2 所示，分别采用本文模型、Dong 模型对板的极限承载力、位移进行计算. 其中，q_{test} 为试验极限承载力；δ_{test} 为试验极限位移；q_{limit} 为极限承载力计算值；δ_{limit} 为位移计算值. 此外，计算结果和试验结果的对比见图 6、7.

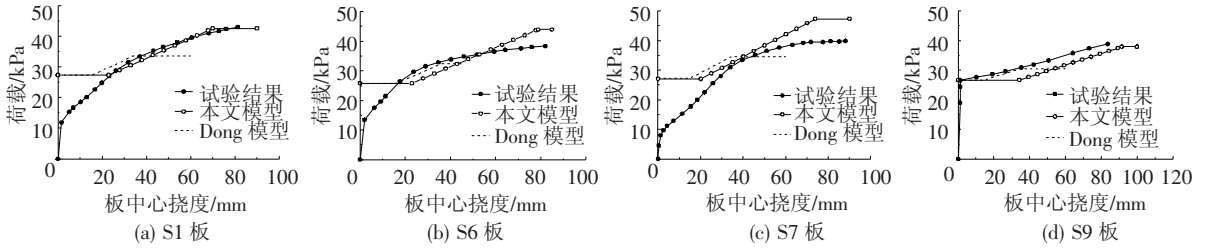


图 6　Taylor 板试验结果和计算结果对比

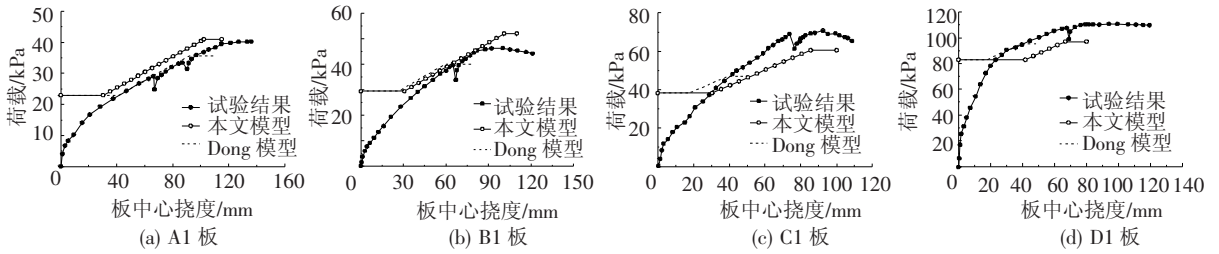


图 7　Ghoneim 板试验结果和计算结果对比

如表2所示，当α_0为1.0时，极限承载力计算值与试验值的比率q_{limit}/q_{test}（S7板）最大值为1.20，最小值（C1板）为0.82，平均比率为1.02. 由此可知，对于极限承载力，试验结果和计算结果吻合较好. 对于位移比率（$\delta_{limit}/\delta_{test}$），最大值为1.09，最小值为0.66，平均值为0.88，模型计算结果相对保守. 然而，由图6、图7可知，若不考虑荷载－位移试验曲线后期水平段，预测位移值还是令人满意的.

当α_0为0.85时，极限承载力、位移的平均比率分别为1.10和1.01. 与上述结果（α_0 = 1.0）相比，极限承载计算值偏高，原因在于较大的等效受压区高度. 因此，此结果可以作为极限承载力、位移的上限.

如表2和图6、7所示，采用Dong模型时（α_0 = 1.0），极限承载力的最大、最小比率（q_{limit}/q_{test}）分别为0.9和0.64，平均值为0.82；极限位移的最大、最小比率分别为0.69和0.35，平均值为0.46. 明显地，该模型极限承载力、位移计算值与试验结果相差较大，位移结果更为保守.

研究表明，与矩形板相比，方板通常在较低的挠度下出现破坏. 图7（b）、（c）也证明了这一点，本文对此进行了分析.

表1　钢筋混凝土板的材料参数

板	$L \times l \times h$/ mm	钢筋参数			钢筋等效面积/（mm² · m⁻¹）		保护层 c/ mm	f_{cu}/ MPa	f_c/ MPa	h_{0x}/ mm	h_{0y}/ mm	ρ
		E_s/ GPa	f_y/ MPa	f_u/ MPa	A_{sx}	A_{sy}						
S1	1 829×1 829×50.8	206.8	375.9	486.3	233.5	280.2	4.74	35.0	28.0	43.68	38.92	0.109
S6	1 829×1 829×50.8		420.8	497.3	200.0	233.5		35.3	28.2	43.68	38.92	0.093
S7	1 829×1 829×44.5		375.9	486.3	280.2	320.0		38.2	30.6	37.48	32.72	0.137
S9	1 829×1 829×76.2				142.0	160.0		33.3	26.6	69.08	64.32	0.042
A1	4 267×1 829×67.3	181.5	450.0	620.0	260.0	260.0	9.63	27.9	22.3	48.20	54.50	0.141
B1	2 745×1 829×68.2				260.0	260.0	10.03	23.4	18.7	48.70	55.00	0.167
C1	1 829×1 829×67.8				260.0	260.0	7.83	31.5	25.2	56.80	50.50	0.120
D1	1 829×1 829×92.8				364.0	364.0	6.93	32.6	26.1	82.70	76.40	0.109

表2　钢筋混凝土板的极限承载力和位移结果对比

板	q_{test}/ kPa	δ_{test}/ mm	q_{limit}/ kPa			δ_{limit}/ mm			q_{limit}/q_{test}			$\delta_{limit}/\delta_{test}$		
			Dong	0.85	1.0	Dong	0.85	1.0	Dong	0.85	1.0	Dong	0.85	1.0
S1	42.9	81.3	33.5	43.4	42.5	33.8	74.0	70.0	0.78	1.01	0.99	0.42	0.91	0.86
S6	39.6	81.3	32.3	47.0	43.9	35.8	88.5	78.9	0.82	1.19	1.11	0.44	1.09	0.97
S7	39.3	97.9	34.4	50.5	47.3	33.8	82.1	73.9	0.88	1.28	1.20	0.35	0.84	0.76
S9	38.1	83.8	30.4	37.7	37.9	33.8	91.5	91.5	0.80	0.99	0.99	0.40	1.09	1.09
A1	39.7	132.4	35.6	46.4	40.9	91.9	125.0	102.3	0.90	1.17	1.03	0.69	0.94	0.77
B1	45.9	101.2	40.0	59.0	52.0	59.0	125.0	101.0	0.87	1.29	1.13	0.58	1.24	0.99
C1	73.9	91.2	47.1	63.0	60.5	39.4	92.5	85.5	0.64	0.85	0.82	0.43	1.02	0.94
D1	109.4	101.7	95.5	113.3	97.0	39.4	96.0	66.8	0.87	1.04	0.89	0.39	0.94	0.66

以α_0 = 1.0为例，在屈服线形成时，B1、C1两板的混凝土压力C均为0.117 N/m. 见图8，方板C1破坏时（v = 85.5 mm），附加力C'为1.31 N/m；对于矩形板B1，C'仅为0.45 N/m. 方板附加力较大，两者比率为2.91. 如果假设方板不破坏可继续承载，在B1板达到破坏时（v = 101.0 mm），B1、C1两板的附加力分别为0.69 N/m和2.22 N/m，两者比率为3.22. 由此可知，在相同挠度下，与矩形板相比，较大的附加力C'是导致方板较早破坏的主要因素.

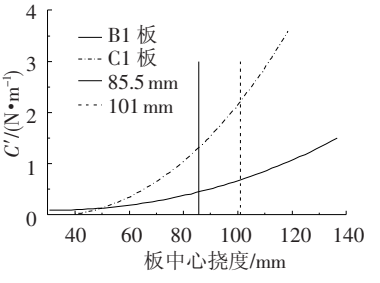


图8　B1和C1板附加力－变形关系

5　结　论

1）基于板的配筋率，提出板的应力、挠度两种破坏准则. 当板配筋率小于 0.08 时，建议采用挠度判断准则；当配筋率不小于 0.08 时，采用应力判断准则.

2）分别采用本文破坏准则和 Dong 变形破坏模型对 8 块钢筋混凝土试验板的极限承载力、位移进行对比分析. 结果表明，对于极限承载力，本文模型计算结果和试验结果吻合较好；对于位移，模型计算结果相对保守. 与试验结果相比，Dong 模型计算承载力、位移均过于保守.

3）本文方法可以解释在相同挠度下方板的极限承载力小于矩形板的原因，即斜对角屈服线上的附加力较大致使方板先出现破坏.

参考文献

[1] 沈聚敏，王传志，江见鲸. 钢筋混凝土有限元与板壳极限分析[M]. 北京：清华大学出版社，1993.

[2] 江见鲸，陆新征，叶列平. 混凝土结构有限元分析[M]. 北京：清华大学出版社，2003.

[3] TAYLOR R, MAHER D, HAYES B. Effect of the arrangement of reinforcement on the behavior of reinforced concrete slabs[J]. Magazine Concrete Research, 1965, 18(55): 85 – 94.

[4] GHONEIM M G, MCGREGOR J G. Tests of reinforced concrete plates under combined in – plane and lateral loads[J]. ACI Structural Journal, 1994, 91(1): 19 – 30.

[5] BAILEY C G, TOH W. Behaviour of concrete floor slabs at ambient and elevated temperatures[J]. Fire Safety Journal, 2007, 42(6): 425 – 436.

[6] DONG Yuli, FANG Yuanyuan. Determination of tensile membrane effects by segment equilibrium[J]. Magazine of Concrete Research, 2010, 62(1): 17 – 23.

[7] 董毓利. 用变形和分解原理求混凝土板的受拉薄膜效应[J]. 力学学报，2010，6(6)：1180 – 1187.

[8] PARK R. GAMBLE W L. Reinforced concrete slabs[M]. New York: John Wiley & Sons, 2000.

[9] 董毓利. 火灾时钢筋混凝土板的承载力计算[J]. 建筑科学与工程学报，2009，26(4)：14 – 23.

[10] BAILEY C G, TOH W S. Small-scale concrete slab tests at ambient and elevated temperatures[J]. Engineering Structures, 2007, 29(10): 2775 – 2791.

[11] 中华人民共和国住房和城乡建设部. GB50010—2010 混凝土结构设计规范[S]. 北京：中国建筑工业出版社，2010.

（编辑　赵丽莹）