一类时滞不确定系统鲁棒容错控制方法

陈雪芹，王　峰，李冬柏，耿云海

（哈尔滨工业大学 卫星技术研究所，150080 哈尔滨）

摘　要：为提高故障系统的性能，研究了一类时滞不确定系统的鲁棒容错控制问题. 针对一类典型的线性时滞不确定系统中执行机构和敏感器发生可修复故障的情况，采用线性矩阵不等式（LMI）方法，设计一种输出反馈 H_∞ 鲁棒容错控制方法，使得系统利用余下的部件仍然能稳定工作，并满足给定系统指标. 将该方法在卫星姿态闭环控制系统中进行了数学仿真验证.

关键词：LMI；H_∞ 控制；鲁棒容错控制；卫星姿态控制

中图分类号：V448　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：0367－6234（2012）09－0014－06

Robust fault-tolerant control algorithm for a class of uncertain time-delay systems

CHEN Xue-qin, WANG Feng, LI Dong-bai, GENG Yun-hai

(Research Center of Satellite Technology, Harbin Institute of Technology, 150080 Harbin, China)

Abstract: The robust fault-tolerant control problem of time-delay uncertain system is studied to improve the performance of fault systems. For this class of linear uncertain time-delay systems model with actuator and sensor recoverable faults, a H_∞ output-feedback controller solved by a linear matrix inequality (LMI) is designed to make sure the system can work steadily using the other elements and satisfy the system index. The simulation of an attitude control closed-loop system of satellite validates that it is effective.

Key words: LMI; H_∞ control; robust fault-tolerant control; satellite attitude control

近年来，关于时滞系统鲁棒控制[1-5]和不确定控制系统完整性设计[6-9]的研究成果很多，具体的研究方法也涉及很广. 总之，对于这两方面的研究各有难点和侧重点，但是这两方面的研究不存在显著的矛盾点和对立面，因此对于其交叉领域研究中的问题，可以考虑同时结合求解时滞系统鲁棒控制和不确定控制系统完整性设计的方法进行求解.

基于这一思想，本文针对一类典型的线性时滞不确定系统中执行机构和敏感器发生可修复故障的情况，设计了一种使故障系统具有完整性的鲁棒容错控制方法. 采用 LMI 方法求解，设计了一个有效的输出反馈 H_∞ 控制器，避免了通常采用观测器或者求解 Riccati 方程所带来的计算量. 建立系统模型时，考虑了执行机构故障和敏感器故障的不确定性以及故障诊断结果的不确定性，避免了设计控制器时对故障诊断结果的依赖. 最后将该输出反馈鲁棒容错控制方法在某卫星姿态控制系统中进行了数学仿真验证.

1　问题提出

考虑执行机构和敏感器故障及其故障诊断结果的不确定性，建立线性时滞系统模型

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{A}_{d_1}\boldsymbol{x}(t-d_1) + \boldsymbol{B}_\xi\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{B}_u\boldsymbol{\Sigma}_a(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\Gamma}_a\boldsymbol{\Delta}_a)\boldsymbol{u},\\ \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{C}_z\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}_{z\xi}\xi + \boldsymbol{D}_{zu}\boldsymbol{\Sigma}_a(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\Gamma}_a\boldsymbol{\Delta}_a)\boldsymbol{u},\\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Sigma}_s(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\Gamma}_s\boldsymbol{\Delta}_s)\boldsymbol{C}_y\boldsymbol{x} + \boldsymbol{C}_{d_2}\boldsymbol{x}(t-d_2) + \boldsymbol{\Sigma}_s(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\Gamma}_s\boldsymbol{\Delta}_s)\boldsymbol{D}_{y\xi}\boldsymbol{\xi},\\ \boldsymbol{x}(t) = \phi(t),\ t\in[-\max(d_1,d_2),0].\end{cases} \tag{1}$$

收稿日期：2011－10－14.
基金项目：国家自然科学基金资助项目（61104026，60904051）；微小型航天器技术国防重点学科实验室开放基金资助项目（HIT. KLOF. 2009096）.
作者简介：陈雪芹（1982—），女，博士，副研究员；耿云海（1970—），男，教授，博士生导师.
通信作者：陈雪芹，cxqhit@163. com.

其中：$\boldsymbol{u}\in\mathbf{R}^m$ 为控制变量；$\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$ 为状态变量；$\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^p$ 为系统测量量；$\boldsymbol{Z}\in\mathbf{R}^{n_z}$ 为系统受控输出变量；$\boldsymbol{\xi}\in\mathbf{R}^{\xi}$ 为系统干扰变量；$\phi(t)$ 为初始状态函数；d_1、d_2 为正实数；$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{A}_{d_1}$、$\boldsymbol{B}_{\xi}$、$\boldsymbol{B}_u$、$\boldsymbol{C}_z$、$\boldsymbol{D}_{z\xi}$、$\boldsymbol{D}_{zu}$、$\boldsymbol{C}_y$、$\boldsymbol{C}_{d_2}$、$\boldsymbol{D}_{y\xi}$ 是已知的适当维数的实矩阵；$\boldsymbol{\Sigma}_a$、$\boldsymbol{\Sigma}_s$ 分别表示执行机构和敏感器故障诊断结果；$\boldsymbol{\Delta}_a$、$\boldsymbol{\Delta}_s$ 为摄动函数；$\|\boldsymbol{\Delta}\|_\infty<1$，$\boldsymbol{\Gamma}_a$、$\boldsymbol{\Gamma}_s$ 分别为 $\boldsymbol{\Delta}_a$ 和 $\boldsymbol{\Delta}_s$ 的摄动界函数；$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}_u\boldsymbol{\Sigma}_a(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\Gamma}_a\boldsymbol{\Delta}_a))$ 可控；$(\boldsymbol{\Sigma}_s(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\Gamma}_s\boldsymbol{\Delta}_s)\boldsymbol{C}_y,A)$ 可测.

将系统(1)重新整理为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{A}_{d_1}\boldsymbol{x}(t-d_1)+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{w}+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{u},\\ \boldsymbol{z}=\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{x}+\boldsymbol{D}_{11}\boldsymbol{w}+\boldsymbol{D}_{12}\boldsymbol{u},\\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{x}+\boldsymbol{C}_{d_2}\boldsymbol{x}(t-d_2)+\boldsymbol{D}_{21}\boldsymbol{w}.\end{cases}\tag{2}$$

其中：

$$\boldsymbol{B}_1=[\boldsymbol{B}_u\boldsymbol{\Sigma}_a\boldsymbol{\Gamma}_a\quad \boldsymbol{0}\quad \boldsymbol{B}_{\xi}],\ \boldsymbol{B}_2=\boldsymbol{B}_u\boldsymbol{\Sigma}_a,$$

$$\boldsymbol{C}_2=\boldsymbol{\Sigma}_s\boldsymbol{C}_y,\ \boldsymbol{D}_{21}=[\boldsymbol{0}\quad \boldsymbol{I}\quad \boldsymbol{\Sigma}_s\boldsymbol{D}_{y\xi}],$$

$$\boldsymbol{C}_1=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{\Sigma}_s\boldsymbol{\Gamma}_s\boldsymbol{C}_y\\ \boldsymbol{C}_z\end{bmatrix},\ \boldsymbol{D}_{11}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{\Sigma}_s\boldsymbol{\Gamma}_s\boldsymbol{D}_{y\xi}\\ \boldsymbol{D}_{zu}\boldsymbol{\Sigma}_a\boldsymbol{\Gamma}_a&0&\boldsymbol{D}_{z\xi}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{D}_{12}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{D}_{zu}\boldsymbol{\Sigma}_a\end{bmatrix},\ \boldsymbol{z}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{\Sigma}_s\boldsymbol{\Gamma}_s\boldsymbol{C}_y\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\Sigma}_s\boldsymbol{\Gamma}_s\boldsymbol{D}_{y\xi}\boldsymbol{\xi}\\ \boldsymbol{Z}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Delta}_a\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{\Delta}_s(\boldsymbol{\Sigma}_s\boldsymbol{\Gamma}_s\boldsymbol{C}_y\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\Sigma}_s\boldsymbol{\Gamma}_s\boldsymbol{D}_{y\xi}\boldsymbol{\xi})\\ \boldsymbol{\xi}\end{bmatrix}.$$

若取输出反馈 H_∞ 控制器为

$$\begin{cases}\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}=\boldsymbol{A}_c\hat{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{B}_c\boldsymbol{y},\\ \boldsymbol{u}=\boldsymbol{C}_c\hat{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{D}_c\boldsymbol{y}.\end{cases}\tag{3}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{x}}\in\mathbf{R}^n$ 是控制器的状态，$\boldsymbol{A}_c$、$\boldsymbol{B}_c$、$\boldsymbol{C}_c$、$\boldsymbol{D}_c$ 是待确定的控制器参数矩阵，定义为

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_c&\boldsymbol{B}_c\\ \boldsymbol{C}_c&\boldsymbol{D}_c\end{bmatrix}.\tag{4}$$

此时，由控制器(3)和系统(2)组成的闭环系统为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{\zeta}}=\boldsymbol{A}_{cl}\boldsymbol{\zeta}+\boldsymbol{A}_{cl1}\boldsymbol{\zeta}(t-d_1)+\boldsymbol{A}_{cl2}\boldsymbol{\zeta}(t-d_2)+\boldsymbol{B}_{cl}\boldsymbol{w},\\ \boldsymbol{z}=\boldsymbol{C}_{cl}\boldsymbol{\zeta}+\boldsymbol{C}_{cl2}\boldsymbol{\zeta}(t-d_2)+\boldsymbol{D}_{cl}\boldsymbol{w}.\end{cases}\tag{5}$$

其中：

$$\boldsymbol{A}_{00}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{A}_{10}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{d1}\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}_{00}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_2&\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}&\boldsymbol{I}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}_{10}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_1\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix},\boldsymbol{C}_{00}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_2&\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}&\boldsymbol{I}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{C}_{10}=[\boldsymbol{C}_1\quad \boldsymbol{0}],$$

$$\boldsymbol{C}_{30}=[\boldsymbol{C}_{d2}\quad \boldsymbol{0}],\ \boldsymbol{D}_{10}=[\boldsymbol{D}_{12}\quad \boldsymbol{0}],\boldsymbol{D}_{20}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{D}_{21}\\ 0\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{E}_{10}=[\boldsymbol{I}\quad \boldsymbol{0}],\boldsymbol{E}_{20}=[\boldsymbol{I}\quad \boldsymbol{0}],\boldsymbol{E}_{30}=[\boldsymbol{I}\quad \boldsymbol{0}]^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{A}_{cl}=\boldsymbol{A}_{00}+\boldsymbol{B}_{00}\boldsymbol{K}\boldsymbol{C}_{00},\ \boldsymbol{A}_{cl1}=\boldsymbol{A}_{10}\boldsymbol{E}_{10},$$

$$\boldsymbol{A}_{cl2}=\boldsymbol{B}_{00}\boldsymbol{K}\boldsymbol{E}_{30}\boldsymbol{C}_{30},\ \boldsymbol{B}_{cl}=\boldsymbol{B}_{10}+\boldsymbol{B}_{00}\boldsymbol{K}\boldsymbol{D}_{20},$$

$$\boldsymbol{C}_{cl}=\boldsymbol{C}_{10}+\boldsymbol{D}_{10}\boldsymbol{K}\boldsymbol{C}_{00},\ \boldsymbol{C}_{cl2}=\boldsymbol{D}_{10}\boldsymbol{K}\boldsymbol{E}_{30}C_{30},$$

$$\boldsymbol{D}_{cl}=\boldsymbol{D}_{11}+\boldsymbol{D}_{10}\boldsymbol{K}\boldsymbol{D}_{20}.\tag{6}$$

那么，输出反馈控制设计问题为：给定 H_∞ 干扰衰减指标 γ，求取时滞系统(2)的输出反馈控制器(3)，使得闭环系统(5)对于任意执行机构和传感器可修复故障均保持渐近稳定，且从 $\boldsymbol{w}$ 到 z 的传递函数的 H_∞ 范数小于 γ.

2　主要结果

引理 1[1]　对于时滞系统(2)和控制器(3)组成的闭环系统(5)，如果存在正定矩阵 $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{R}_1$、$\boldsymbol{R}_2$、$\boldsymbol{R}_3$，满足如下 LMI

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{cl}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_{cl}+\boldsymbol{E}_{10}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{E}_{10}+\boldsymbol{C}_{30}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_3\boldsymbol{C}_{30} & \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_{10} & \boldsymbol{C}_{00}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_{20}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}_{00}\boldsymbol{K}\boldsymbol{E}_{30} & \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}_{cl} & \boldsymbol{C}_{cl}^{\mathrm{T}}\\ & -\boldsymbol{R}_1 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ & & -\boldsymbol{R}_2^{-1} & \boldsymbol{E}_{20}\boldsymbol{K}\boldsymbol{E}_{30} & \boldsymbol{E}_{20}\boldsymbol{K}\boldsymbol{D}_{20} & \boldsymbol{0}\\ & & & -\boldsymbol{R}_3 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E}_{30}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{10}^{\mathrm{T}}\\ & & & & -\gamma\boldsymbol{I} & \boldsymbol{D}_{cl}^{\mathrm{T}}\\ & & & & & -\gamma\boldsymbol{I}\end{bmatrix}<0.\tag{7}$$

则对于所有的 d_1、$d_2\geqslant 0$，闭环系统(5)渐近稳定，且从 $\boldsymbol{w}$ 到 z 的传递函数的 H_∞ 范数小于给定 γ.

引理 2[10]　设 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{G}$ 为已知矩阵，且 $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}$，则存在矩阵 $\boldsymbol{K}$，满足

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}+\boldsymbol{G}<0\tag{8}$$

的充要条件是

$$\boldsymbol{E}_{\perp}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{E}_{\perp}<0,\tag{9}$$

$$\boldsymbol{F}_{\perp}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{F}_{\perp}<0.\tag{10}$$

其中 矩阵 $\boldsymbol{E}_{\perp}$ 是满足 $\boldsymbol{E}\boldsymbol{A}=0$ 的满秩矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中列数最多的矩阵.

引理 3[10]　已知正定矩阵 $\boldsymbol{X}$、$\boldsymbol{Y}\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 和整

数 r，存在正定对称矩阵 $\boldsymbol{P} \in \mathbf{R}^{(n+r)\times(n+r)}$ 满足

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} Y & ? \\ ? & ? \end{bmatrix}, \boldsymbol{P}^{-1} = \begin{bmatrix} X & ? \\ ? & ? \end{bmatrix} \tag{11}$$

的充要条件是

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{X} & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{Y} \end{bmatrix} \geqslant 0,\ \mathrm{rank}\begin{bmatrix} \boldsymbol{X} & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{Y} \end{bmatrix} \leqslant n + r, \tag{12}$$

并且，当存在矩阵 $\boldsymbol{M} \in \mathbf{R}^{n\times r}$ 满足 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}^{-1}$ 时，所求的 $\boldsymbol{P}$ 给定如下：

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Y} & \boldsymbol{M} \\ \boldsymbol{M}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix}.$$

定理 1　对于时滞系统(2)，对于给定的正定矩阵 $\boldsymbol{R}_1$、$\boldsymbol{R}_2$、$\boldsymbol{R}_3$，如果存在正定矩阵 $\boldsymbol{X}$、$\boldsymbol{Y}$，满足如下 LMIs：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{A}_{d_1}\boldsymbol{R}_1^{-1}\boldsymbol{A}_{d_1}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{R}_2^{-1}\boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{X}\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{R}_2^{-1}\boldsymbol{D}_{12}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{X} & \boldsymbol{X}\boldsymbol{C}_{d_2}^{\mathrm{T}} \\ * & -\gamma\boldsymbol{I} - \boldsymbol{D}_{12}\boldsymbol{R}_2^{-1}\boldsymbol{D}_{12}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{D}_{11} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ * & * & -\gamma\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ * & * & * & -\boldsymbol{R}_1^{-1} & \boldsymbol{0} \\ * & * & * & * & -\boldsymbol{R}_3^{-1} \end{bmatrix} < 0, \tag{13}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{Y}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{R}_1 - \boldsymbol{C}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_3\boldsymbol{C}_2 + \boldsymbol{C}_{d_2}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_3\boldsymbol{C}_{d_2} & \boldsymbol{Y}\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{C}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_3\boldsymbol{D}_{21} & \boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{Y}\boldsymbol{A}_{d_1} \\ * & -\gamma\boldsymbol{I} - \boldsymbol{D}_{21}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_3\boldsymbol{D}_{21} & \boldsymbol{D}_{11}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} \\ * & * & -\gamma\boldsymbol{I} & 0 \\ * & * & * & -\boldsymbol{R}_1 \end{bmatrix} < 0, \tag{14}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{X} & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{Y} \end{bmatrix} \geqslant 0,\ \mathrm{rank}\begin{bmatrix} \boldsymbol{X} & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{Y} \end{bmatrix} \leqslant l, \tag{15}$$

则存在 γ 次优的 H_∞ 控制器(3)，使得其与时滞系统(2)组成的闭环系统渐近稳定，且从 $\boldsymbol{w}$ 到 $\boldsymbol{z}$ 的传递函数的 H_∞ 范数小于 γ. 同时，利用 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}^{-1}$ 求解正定矩阵 $\boldsymbol{P} \in \mathbf{R}^{l\times l}$，满足

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Y} & \boldsymbol{M} \\ \boldsymbol{M}^{\mathrm{T}} & I \end{bmatrix}, \tag{16}$$

则 H_∞ 控制器参数矩阵 $\boldsymbol{K}$ 满足如下 LMI：

$$\boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{K}\boldsymbol{\Theta}^{\mathrm{T}} + (\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{K}\boldsymbol{\Theta}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} < 0. \tag{17}$$

其中

$$\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}\{\boldsymbol{P}, \boldsymbol{I}, \boldsymbol{I}, \boldsymbol{I}, \boldsymbol{I}, \boldsymbol{I}, \boldsymbol{I}, \boldsymbol{I}\}, \tag{18}$$

$$\boldsymbol{\Pi} = [\boldsymbol{B}_{00}^{\mathrm{T}}\ \ \boldsymbol{0}\ \ \boldsymbol{D}_{10}^{\mathrm{T}}\ \ \boldsymbol{0}\ \ \boldsymbol{0}\ \ \boldsymbol{E}_{20}^{\mathrm{T}}\ \ \boldsymbol{0}\ \ \boldsymbol{0}]^{\mathrm{T}}, \tag{19}$$

$$\boldsymbol{\Theta} = [\boldsymbol{C}_{00}\ \ \boldsymbol{D}_{20}\ \ \boldsymbol{0}\ \ \boldsymbol{0}\ \ \boldsymbol{0}\ \ \boldsymbol{0}\ \ \boldsymbol{E}_{30}\ \ \boldsymbol{0}]^{\mathrm{T}}, \tag{20}$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{00}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_{00} & \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}_{10} & \boldsymbol{C}_{10}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_{10} & \boldsymbol{E}_{10}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}_{30}^{\mathrm{T}} \\ & -\gamma\boldsymbol{I} & \boldsymbol{D}_{11}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ & & -\gamma\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ & & & -\boldsymbol{R}_1 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ & & & & -\boldsymbol{R}_1^{-1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ & & & & & -\boldsymbol{R}_2^{-1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ & & & & & & -\boldsymbol{R}_3 & \boldsymbol{0} \\ & & & & & & & -\boldsymbol{R}_3^{-1} \end{bmatrix}. \tag{21}$$

证明

1) 利用 Schur 补定理，引理 1 中式(7)等价于下式：

$$\begin{bmatrix} A_{cl}^{\mathrm{T}} P + PA_{cl} & PB_{cl} & C_{cl}^{\mathrm{T}} & PA_{10} & C_{00}^{\mathrm{T}} K^{\mathrm{T}} E_{20}^{\mathrm{T}} & PB_{00} KE_{30} & E_{10}^{\mathrm{T}} & C_{30}^{\mathrm{T}} \\ & -\gamma I & D_{cl}^{\mathrm{T}} & 0 & D_{20}^{\mathrm{T}} K^{\mathrm{T}} E_{20}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 \\ & & -\gamma I & 0 & 0 & -D_{10} KE_{30} & 0 & 0 \\ & & & -R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & -R_2^{-1} & E_{20} KE_{30} & 0 & 0 \\ & & & & & -R_3 & 0 & 0 \\ & & & & & & -R_1^{-1} & 0 \\ & & & & & & & -R_3^{-1} \end{bmatrix} < 0,$$

上式则等价于式(17).

2）根据引理 2，由式(17)成立的充要条件可以得到形如式(9)和式(10)的两个矩阵不等式：

$$(\Lambda \Pi)_{\perp}^{\mathrm{T}} \Sigma (\Lambda \Pi)_{\perp} < 0 \ , \tag{22}$$

$$\Theta_{\perp}^{\mathrm{T}} \Sigma \Theta_{\perp} < 0 \ . \tag{23}$$

将式(6)中各矩阵带入上两式，即可分别得到式(13)和(14).

3）根据引理 3，定义正定对称矩阵 $\boldsymbol{P} \in \mathbf{R}^{l \times l}$ 为

$$P = \begin{bmatrix} Y & M \\ M^{\mathrm{T}} & I \end{bmatrix} , \tag{24}$$

即可用矩阵分解 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}^{-1}$ 进行求解，见式(16).

4）将 $\boldsymbol{P}$ 矩阵带入式(17)，即可求得 H_∞ 控制器参数矩阵 $\boldsymbol{K}$.

本定理的推导根源是引理 1，因此由本定理得到的 $\boldsymbol{K}$ 矩阵是满足系统渐近稳定的充分条件.

3　在卫星姿态控制中的应用

建立三轴稳定卫星姿态控制系统姿态动力学方程[9]为

$$A_2 \ddot{q} + A_1 \dot{q} + A_0 q = G_d d + G_u u \ . \tag{25}$$

其中

$$q = [\varphi\ \theta\ \psi]^{\mathrm{T}},\ A_2 = \begin{bmatrix} I_1 & & \\ & I_2 & \\ & & I_3 \end{bmatrix},$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\omega_0(I_1 - I_2 + I_3) \\ 0 & 0 & 0 \\ \omega_0(I_1 - I_2 + I_3) & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} 4\omega_0^2(I_2 - I_3) & & \\ & 3\omega_0^2(I_1 - I_3) & \\ & & \omega_0^2(I_2 - I_1) \end{bmatrix},$$

$$G_d = G_u = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix},$$

$$d = [T_{d1} \quad T_{d2} \quad T_{d3}]^{\mathrm{T}}, u = [u_1 \quad u_2 \quad u_3]^{\mathrm{T}}.$$

其中：$I_i(i = 1,2,3)$ 为卫星 3 个惯性主轴转动惯量；φ、θ、ψ 分别为卫星滚动、俯仰、偏航角；$T_{di}(i = 1,2,3)$ 分别为三轴的干扰力矩；ω_0 为轨道角速度；$u_i(i = 1,2,3)$ 分别为三轴的控制力矩.

将系统模型(25)表示成对应的系统状态空间表达式(1)的形式. 选取状态变量

$$x = [q^{\mathrm{T}} \quad \dot{q}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},$$

系统受控输出变量

$$z = [\ddot{q}^{\mathrm{T}} \quad \dot{q}^{\mathrm{T}} \quad q^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}.$$

系统测量输出变量 $\boldsymbol{y}$ 为星载敏感器测量输出姿态角和姿态角速度. 系统矩阵分别为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A_2^{-1} A_0 & -A_2^{-1} A_1 \end{bmatrix},\ B_\xi = \begin{bmatrix} 0 \\ A_2^{-1} G_d \end{bmatrix},$$

$$B_u = \begin{bmatrix} 0 \\ A_2^{-1} G_u \end{bmatrix},\ C_z = \begin{bmatrix} -A_2^{-1} A_0 & -A_2^{-1} A_1 \\ 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_{z\xi} = \begin{bmatrix} A_2^{-1} G_d \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, D_{zu} = \begin{bmatrix} A_2^{-1} G_u \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_y = D_{y\xi} = I_{6\times 6},\ A_{d_1} = 0.01A, C_{d_2} = 0.01C_2,$$
$$d_1 = d_2 = 0.1, \gamma = 0.1$$

建立闭环卫星姿态控制系统进行仿真验证，仿真初始条件为：

1）星体主惯量矩阵取为

$$I_b = \begin{bmatrix} 12.49 & 0.67 & 0.06 \\ 0.67 & 13.85 & 0.06 \\ 0.06 & 0.06 & 15.75 \end{bmatrix} \mathrm{kg \cdot m^2}.$$

2）飞轮参数. 惯量矩阵

$$J = 6.37 \times 10^{-4} I_{3\times 3}\ \mathrm{kg \cdot m^2};$$

最大角动量 $H_{\max} = \pm 1.25$ N · m · s(飞轮转速 ±6 000 r/min 时)；最大输出力矩 $T_{\max} = 0.1$ N · m；

3）陀螺参数. 常值漂移 1×10^{-5} rad/s (3σ)；测量噪声均方差为 4.18×10^{-6} rad/s (3σ)；

4）初始姿态角速度

$$\omega(0) = [-0.003\,5 \quad 0.001\,7 \quad -0.004\,0]^{\mathrm{T}}\ \mathrm{rad/s}.$$

5）初始姿态 $\varphi = \theta = \psi = 0$；

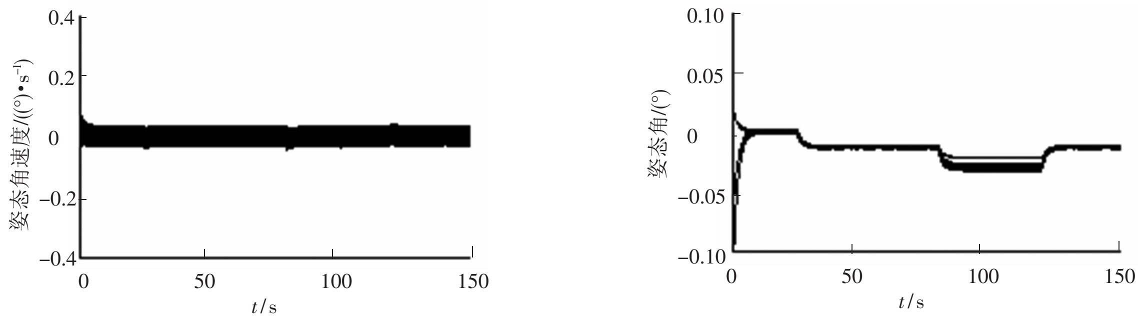
6）卫星轨道角速度 $\boldsymbol{\omega}_0 = 0.001$ rad/s.

7）干扰力矩：$T_{dx} = A_0(3\cos\omega_0 t + 1)$，$T_{dy} = A_0(1.5\sin\omega_0 t + 3\cos\omega_0 t)$，$T_{dz} = A_0(3\sin\omega_0 t + 1)$，$A_0$ 为干扰力矩幅值，取 $A_0 = 1.5\times10^{-5}$ N·m；

8）利用故障诊断系统得到 $\boldsymbol{\Sigma}_a = 0.66\boldsymbol{I}_{3\times3}$，$\boldsymbol{\Sigma}_s = 0.01\boldsymbol{I}_{3\times3}$，选取 $\boldsymbol{\Gamma}_a = \boldsymbol{I}_{3\times3}$，$\boldsymbol{\Gamma}_s = \boldsymbol{I}_{6\times6}$.

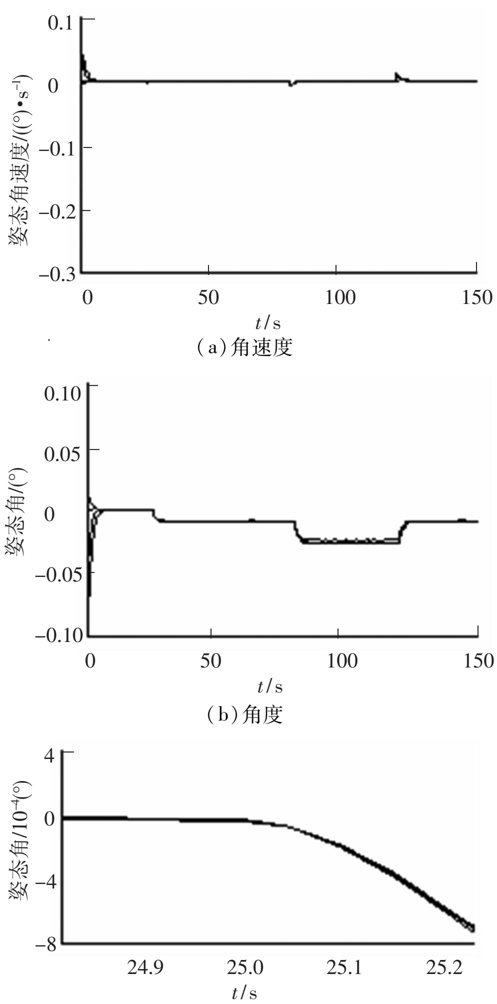
9）系统运动模型中状态延迟 0.1 s.

为更好地对比考虑时滞前后鲁棒容错方法的区别，将本文设计的容错控制方法与文献[11]中相应的方法进行仿真对比，选取相同的仿真环境和故障环境，同样设置陀螺故障发生的时刻为 $t_f = 80$ s，加性故障大小为 $\omega_f = 0.001\ 11$ rad/s，执行机构故障发生时刻为 $t_f = 150$ s，加性故障大小为 $T_f = -0.02$ N·m. 故障时，文献[11]中5.5.2节基于混合 H_2/H_∞ 鲁棒容错控制的卫星姿态仿真结果如图1所示；文中设计的一类时滞不确定鲁棒容错控制方法考虑时滞影响时姿态信息如图2所示，不考虑系统时滞时姿态信息如图3所示.



(a)角速度 (b)角度

图1 考虑系统模型中时滞时基于混合 H_2/H_∞ 容错控制仿真结果（文献[11]）

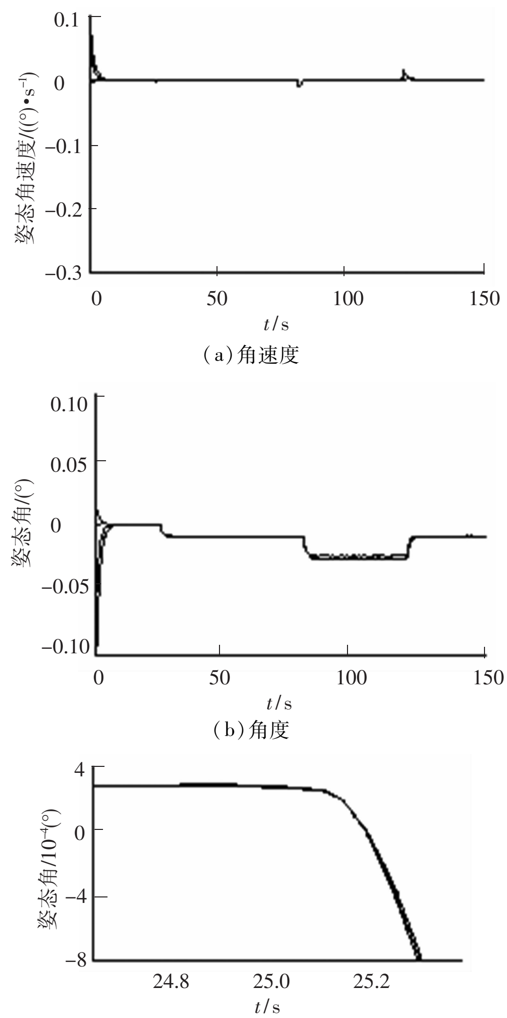


(a)角速度

(b)角度

(c)角度局部放大

图2 时滞鲁棒容错控制系统仿真结果（$A_{d1} = 0.01A$，$C_{d_2} = 0.01C_2$）



(a)角速度

(b)角度

(c)角度局部放大

图3 时滞鲁棒容错控制系统仿真结果（$A_{d_1} = 0$，$C_{d_2} = 0$）

由图 1 可知,当系统模型中有状态延迟而鲁棒容错控制器中未进行考虑时,基于混合 H_2/H_∞ 的鲁棒容错控制方法如果不进行改进,则会出现姿态在有限范围内振荡的现象；由图 2 可知,在相同的仿真条件下,考虑状态延迟,当执行机构和敏感器同时故障时,本文设计的时滞鲁棒容错控制方法能够使得星体的姿态指向精度达到 0.02°~0.03°；由图 3 可知,当本文设计的时滞鲁棒容错控制器中不考虑状态延迟影响时,即 $\boldsymbol{A}_{d_1}=0, \boldsymbol{C}_{d_2}=0$,星体的姿态指向精度仍能达到 0.02°~0.03°,但从两张局部放大的仿真图可见,此时容错控制比系统故障的时间滞后 0.1 s,不能很好地保证系统的实时性.

4　结　论

本文针对一类典型的线性不确定时滞系统中执行机构和敏感器发生可修复故障的情况,提出了一种满足给定系统指标的输出反馈 H_∞ 鲁棒容错控制设计方法,使得系统利用余下的部件仍然能稳定工作,并将这一方法应用到卫星姿态控制系统中,并与未考虑时滞问题的同类方法在相同的故障条件下进行了仿真对比,仿真结果表明,该方法能够有效确保系统状态延迟下闭环系统的实时性及故障状况下的系统性能指标.

参考文献:

[1] JEUNG E T, KWON S H, LIM J H, *et al.* An LMI approach to H_∞ control for linear delay systems [C]//Proceedings of the American Control Conference. Philadelphia, Pennsylvania:[s. n.], 1998: 2398 - 2402.

[2] de SOUZA C E, LI X. Delay-dependent robust H_∞ control of uncertain linear state-delayed systems [J]. Automatica, 1999, 35(7): 1313 - 1321.

[3] SARABI F E, KHATIBI H, MOMENI H R. Robust stability analysis and synthesis of linear time-delay systems via LMIs [C]//The 49th IEEE Conference on Decision and Control. Atlanta, GA:[s. n.], 2010. 615 - 620.

[4] SUN M, JIA Y. Delay-dependent robust H_∞ control of time-delay systems [J]. Control Theory & Applications, IET. 2010, 4(7): 1122 - 1130.

[5] 彭丹, 关新平, 龙承念. 2-D 状态滞后系统的时滞相关 H_∞ 控制[J]. 控制与决策, 2008, 23(10): 1117 - 1121.

[6] 宗臻, 王诗宓. 基于 LMI 的输出反馈鲁棒完整性控制器设计[J]. 控制理论与应用, 2005, 22(5): 682 - 971.

[7] MOCHIMARU A, SEBE N. Fault tolerant control with integrity [C]//SICE Annual Conference. Fukui:[s. n.], 2003: 1140 - 1145.

[8] 陶洪峰, 胡寿松. 模糊广义时滞系统的鲁棒集成容错控制器设计[J]. 南京航空航天大学学报, 2009, 41(3):397 - 401.

[9] 陈雪芹, 耿云海, 张迎春, 等. 基于 LMI 的鲁棒容错控制及其在卫星姿态控制中的应用[J]. 控制理论与应用. 2008, 25(1): 95 - 99.

[10] 梅生伟, 申铁龙, 刘康志. 现代鲁棒控制理论与应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2003: 105 - 109.

[11] 陈雪芹. 集成故障诊断与容错控制研究及在卫星姿态控制中的应用[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2008: 95 - 96.

（编辑　张　宏）