Ⅲ型裂纹的二个动态扩展问题

程 靳[1]，巴 颖[1]，吕念春[1,2]，林 敏[1]，郭宝科[1]

（1.哈尔滨工业大学 航天科学与力学系，150001 哈尔滨，baying000@163.com；
2 沈阳理工大学 材料科学与工程学院，110168 沈阳）

摘 要：通过复变函数论的方法，对Ⅲ型裂纹的2个动态扩展问题进行研究. 本文提出了裂纹动态扩展的1个新的力学模型，即裂纹坐标原点分别受增加载荷 Px/t、Pt^3/x^2 的作用，采用自相似函数的方法将所讨论问题迅速转化为 Riemann-Hilbert 问题，并求得了该模型的应力、位移和应力强度因子的解析解. 利用这些解并采用叠加原理，即可求得任意复杂问题的解.

关键词：复变函数；Ⅲ型裂纹；动态扩展；解析解
中图分类号：O346.1 **文献标志码**：A **文章编号**：0367－6234(2011)09－0030－03

Two dynamic propagation problems of mode Ⅲ crack

CHENG Jin [1], BA Ying [1], LÜ Nian-chun [1,2], LIN Min [1], GUO Bao-ke [1]

(1. Dept. of Astronautics and Mechanics, Harbin Institute of Technology, 150001 Harbin, China, baying000@163.com;
2. School of Material Science and Engineering, Shenyang Ligong University, 110168 Shenyang, China)

Abstract: In order to solve two dynamic propagation problems on mode Ⅲ crack by theory of complex functions, a new mechanical model for dynamic crack propagation, in which the crack is under the conditions of increasing loads Px/t、Pt^3/x^2 located at the origin of the coordinate of the crack is presented in this paper. The problems are transformed into Riemann-Hilbert problems by the approaches of self-similar functions, and the analytical solutions of stress, displacement and stress intensity factor are attained. With the solutions and superposition theorem, the solutions of discretionary complex problems can be acquired.

Key words: complex functions; mode Ⅲ crack; dynamic propagation; analytical solutions

近几十年来，对Ⅲ型裂纹的静力学问题已有许多人进行了研究[1－4]. 由于数学上的困难，人们对动力学问题的研究还远远不够深入[5－9]，而对变载荷作用的裂纹的动态扩展问题的研究更是有限[10－14]. 本文对Ⅲ型扩展裂纹在变载荷作用下的断裂动力学问题进行了深入研究，利用复变函数论的方法给出解的一般表示，该方法可以很容易地将所论问题转化为 Riemann—Hilbert 问题，而 Riemann—Hilbert 问题很容易用通常的 Muskhelishvili 方法[15－16]求解. 本文对中心、集中、Px/t 和 Pt^3/x^2 载荷等情况下的扩展裂纹问题给出了解析解.

收稿日期：2010－03－28.
作者简介：程 靳(1945—)，男，教授，博士生导师.

1 正交异性体弹性动力学反平面问题的自相似函数公式

正交异性体弹性动力学的反平面运动方程为[1,3]

$$C_{55}\partial^2 w/\partial x^2 + C_{44}\partial^2 w/\partial y^2 = \rho\,\partial^2 w/\partial t^2.$$

式中 C_{44}、C_{55} 为弹性常数，ρ 为材料密度，w 为沿 z 方向的位移[1].

设在 $y=0$ 上有任意个载荷区段及位移区段，这些区段的端点各以不同的常速移动，初始条件为零. 这些区段上的载荷或位移是如下函数线性组合[7－9]：

$$\frac{\mathrm{d}^k f_{k_1}(x)}{\mathrm{d}x^k}\cdot\frac{\mathrm{d}^s f_{s_1}(t)}{\mathrm{d}t^s}. \tag{1}$$

式中

$$f_i(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi < 0; \\ \xi^i, & \xi > 0. \end{cases}$$

其中 k、k_1、s、s_1 是任意正整数. 由于 x、t 的任意函数都可表示为式(1) 的线性组合，因而求解具有式(1) 形式的载荷或位移具有原则上的意义. 现引入线性微分算子及其反演，如下所示：

$$L = \partial^{m+n}/(\partial x^m \partial t^n),\ L^- = \partial^{-m-n}/(\partial x^{-m} \partial t^{-n}).$$

式中零导数表示函数本身，负导数表示积分，其绝对值表示积分的重数. 容易证明必存在 m、n 使 L 作用于式(1) 得到的函数是 x、t 的零次齐次(简称齐次) 函数，称此 $m = k_1 - k$、$n = s_1 - s$ 为自相似指数[7-9].

因此，在 $y = 0$ 上可得到如下一般性结论[7-9]：

当 Lw 是齐次函数时，令

$$w^0 = Lw,\quad \tau_{xz}^0 = L\tau_{xz},\quad \tau_{yz}^0 = L\tau_{yz}. \tag{2}$$

当 $L\tau_{xz}$、$L\tau_{yz}$ 是齐次函数时，令

$$w^0 = \frac{\partial}{\partial t}Lw,\quad \tau_{xz}^0 = \frac{\partial}{\partial t}L\tau_{xz},\quad \tau_{yz}^0 = \frac{\partial}{\partial t}L\tau_{yz}. \tag{3}$$

相关的自相似函数[7-9] 如下：

$$\begin{cases} \tau_{yz}^0 = t^{-1}\mathrm{Re}[f(\tau)T(\tau)], \\ \tau_{xz}^0 = (C_{55}/C_{44}t)\mathrm{Re}f(\tau), \\ \partial w^0/\partial\tau = C_{44}^{-1}\mathrm{Re}f(\tau). \end{cases} \tag{4}$$

$$T(\eta) = i\sqrt{(C_{55} - \rho\eta^2)/C_{44}}. \tag{5}$$

式中 $\tau = x/t$，$f(\tau)$ 为自相似函数.

2　具体问题的解

假定 $t < 0$ 时一切静止. 在 $t = 0$ 时刻，坐标原点开始出现一微观裂纹，并以速度 V(小于声速) 沿 x 轴正、负方向对称扩展，且处于反平面应变状态下，下面对不同边界条件问题进行求解.

1) 假定在 $t = 0$ 时刻，坐标原点在阶跃荷载作用下开始出现一微观裂纹，并以速度 V(小于声速) 沿 x 轴正、负方向对称扩展. 在 $y = 0$ 的半平面上，问题的边界条件为

$$\begin{cases} \tau_{zy} = -Pt^3/x^2 \cdot \delta(x), & |x| < Vt; \\ w = 0, & |x| > Vt. \end{cases} \tag{6}$$

很明显本问题应力为齐次，这里的 $L = 1$，利用式(3) ~ (5) 可将边界条件(6) 的第一式写为

$$\mathrm{Re}[T(\tau)f(\tau)] = (-3Pt^2/x^2)t\delta(x) = -3P\tau^{-2}\delta(\tau),\ |\tau| < V. \tag{7}$$

由于 $T(\tau)$ 在亚音速范围内为纯虚量，因此上式中的 $f(\tau)$ 在区间 $|\tau| < V$ 上必然为纯实量. 考虑到对称性、无穷远条件以及裂纹尖端的奇异性[12-14]，利用边界条件(6)，即可确定 $f(\tau)$ 的唯一解必满足如下形式：

$$f(\tau) = A\tau^n(V^2 - \tau^2)^{-3/2}. \tag{8}$$

式中 A 为待定实常数，n 为待定指数，将式(8) 代入式(7) 后，即可确定指数 $n = -3$.

当 $\tau \to 0$ 时，由式(7)、(8) 及(5) 即可确定实常数 A，即

$$A = -3PV^3/(\pi\sqrt{C_{55}/C_{44}}).$$

然后将式(8) 代入(3) ~ (5) 后，即可求得 $y = 0$ 上的应力、应力强度因子，分别为

$$\tau_{yz}(x, 0, t) = \mathrm{Re}\int_{\infty}^{\frac{x}{t}} -\frac{A\sqrt{(C_{55} - \rho\tau^2)/C_{44}}}{\tau^4(\tau^2 - V^2)^{3/2}}\mathrm{d}\tau,\quad |x| > Vt.$$

$$K_3(t) = \lim_{x \to Vt}\sqrt{2\pi(x - Vt)}\,\mathrm{Re}\int_{\infty}^{\frac{x}{t}} -\frac{A\sqrt{(C_{55} - \rho\tau^2)/C_{44}}}{\tau^4(\tau^2 - V^2)^{3/2}}\mathrm{d}\tau = \frac{-A\sqrt{\pi t(C_{55} - \rho V^2)/C_{44}}}{V^{11/2}}$$

上式的极限属于 $0 \cdot \infty$ 型，必须转化为 ∞/∞ 型后，方可应用罗比塔(L'Hospital) 法则进行求导计算[15]，从而得出上式的极限值.

而后利用式(8) 代入式(4)，即可求出 w^0，即

$$w^0 = \frac{1}{C_{44}}\int\frac{A}{\tau^3(V^2 - \tau^2)^{3/2}}\mathrm{d}\tau = -\frac{A}{2C_{44}V^2\tau^2\sqrt{V^2 - \tau^2}} + \frac{3A}{2C_{44}V^4\sqrt{V^2 - \tau^2}} + \frac{3A}{2C_{44}V^5}\ln\frac{V - \sqrt{V^2 - \tau^2}}{|\tau|} + C. \tag{9}$$

因为裂纹扩展的方向是沿着 x 轴的，所以在对 w^0 进行定积分运算时，取常数 $C = 0$，然后将式(9) 代入式(3) 可得出位移 w，即

$$w = \int_0^t \mathrm{Re}w^0\mathrm{d}t = \frac{A}{C_{44}V^6}\left(\frac{8}{3} - \frac{V^2t^2}{6x^2}\right)\sqrt{V^2t^2 - x^2} + \frac{3At}{2C_{44}V^5}\ln\frac{Vt + \sqrt{V^2t^2 - x^2}}{|x|},\ |x| < Vt.$$

在各向同性体中，弹性波的扰动范围可以用半径为 c_1t、c_2t 的圆形区域来表示. 而在各向异性体中，扰动的范围不再是圆形区域，不会超过弹性体的门槛值 $C_{\mathrm{d}} = \sqrt{C_{55}/\rho}$ (声速). 当 $|x| > C_{\mathrm{d}}t$ 时，$\mathrm{Im}[T(\tau)] = 0$，因而应力、位移皆为 0，与初始条件相一致；这说明 $y = 0$ 时，弹性波的扰动不会超过 $C_{\mathrm{d}}t$.

2) 假设施加在坐标原点上的载荷变为常数载荷 Px/t，其它条件与上列完全相同，则问题的

边界条件

$$\begin{cases}\tau_{yz} = -Px/t \cdot \delta(x), & |x| < Vt;\\ w = 0, & |x| > Vt.\end{cases}$$

显然本问题位移为齐次,这里的 $L = 1$,利用式(2)、(4)、(5)可将上式的第一式写为

$$\mathrm{Re}[T(\tau)f(\tau)] = -Px/t \cdot t\delta(x) = -P\tau \cdot \delta(\tau), \quad |\tau| < V. \tag{10}$$

由于 $T(\tau)$ 在亚音速范围内为纯虚量,因此上式中的 $f(\tau)$ 在区间 $|\tau| < V$ 上必然为纯实量. 考虑到对称性、无穷远条件以及裂纹尖端的奇异性[12-14],则由上式即可确定 $f(\tau)$ 的唯一解必满足如下形式:

$$f(\tau) = A_1\tau^n(V^2 - \tau^2)^{-1/2}. \tag{11}$$

式中 A_1 为待定实常数,n 为待定指数. 然后将式(11)代入式(10)后,即可确定指数 $n = 0$.

因此当 $\tau \to 0$ 时,由式(11)、(10)及(5),可确定实常数 A 为

$$A_1 = -PV/(\pi\sqrt{C_{55}/C_{44}}).$$

而后将式(11)代入(2)、(4)、(5)后,即可求得 $y = 0$ 上的应力、位移、应力强度因子分别为

$$\tau_{yz}(x, 0, t) = \frac{A_1\sqrt{(C_{55} - \rho\tau^2)/C_{44}}}{\sqrt{x^2 - V^2t^2}}, \quad |x| > Vt.$$

$$w = \frac{1}{C_{44}} \cdot \mathrm{Re}\int_{\infty}^{\frac{x}{t}} \frac{A_1}{(V^2 - \tau^2)^{1/2}}\mathrm{d}\tau = \frac{A_1}{C_{44}} \cdot \mathrm{Re}\left[\arcsin\frac{\tau}{V}\right]\Bigg|_{\infty}^{x/t} = \frac{A_1}{C_{44}}\arcsin\frac{x}{Vt}, \quad |x| < Vt.$$

$$K_3(t) = \lim_{x \to Vt}\sqrt{2\pi(x - Vt)}\,\frac{A_1\sqrt{(C_{55} - \rho\tau^2)/C_{44}}}{\sqrt{x^2 - V^2t^2}} = \frac{A_1\sqrt{\pi(C_{55} - \rho V^2)/C_{44}}}{\sqrt{Vt}}.$$

3 结 论

采用自相似函数的途径能够获得Ⅲ型动态裂纹坐标原点受阶跃载荷、常数载荷作用下的应力、位移、应力强度因子、应变能密度因子和位错分布函数的解析解. 利用关系式:$f(x, y, t) = t^n \cdot f(x/t, y/t)$,且 n 为整数;就可以将所讨论的问题转化为零次齐次函数,即自相似函数[6-9]. 凡是满足这个函数关系,均可通过式(2)~(4)以 τ 为变量的齐次函数类型进行求解. 这一方法不仅在弹性动力学中应用[6-9,15],而且在弹性静力学中也可应用[15-17],甚至其它领域[18]. 解的方法是以专用的解析函数理论为基础,是简单的、简明的. 这已经相当地减少了需要解决这一裂纹扩展问题的计算工作量.

参考文献:

[1] ERIGEN A C, SUHUBI E S. Elastodynamics Vol. 2. linear theory[M]. New York: Academic Press, 1975.

[2] SIH G C. Mechanics of fracture 1. methods of analysis and solutions of crack problems[M], Noordhoff, Leyden:[s. n.], 1977.

[3] 范天佑. 断裂动力学原理及应用[M]. 北京:北京理工大学出版社,2006.

[4] ERDOGAN F. Crack propagation theories. fracture II [M]. New York:Academic Press, 1968: 497 - 509.

[5] SIH G C. Some elastodynamics problems of cracks[J]. International Journal of Fracture,1968,4(1):51 - 68.

[6] KOSTROV B V. Self-similar problems of propagation of shear cracks[J]. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 1964, 28(5): 1077 - 1087.

[7] LÜ N C, CHENG H,LI X G, *et al.* Dynamic propagation problems concerning the surfaces of asymmetrical mode Ⅲ crack subjected to moving loads[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2008, 29(10): 1279 - 1290.

[8] BROBERG K B. The propagation of a brittle crack[J]. Arch fur Fysik, 1960, 18(1): 159 - 192.

[9] CHEREPANOV G P. Mechanics of brittle fracture[M]. New York: McGraw Hill International Book Company, 1979.

[10] LÜ N C, CHENG J, CHENGg Y H. Mode Ⅲ interface crack propagation in two joined media with weak dissimilarity and strong orthotropy[J]. Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 2001, 36(3): 219 - 231.

[11] RUBIN-GONZALEA C, MASON J J. Dynamic intensity factors at the tip of a uniformly loaded semi-finite crack in an orthotropic material[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2000, 48(5): 889 - 925.

[12] WU K C. Dynamic crack growth in anisotropic material [J]. International Journal of Fracture, 2000, 106(1): 1 - 12.

[13] 吕念春, 程靳, 程云虹. Ⅲ型裂纹面受双重载荷作用下的动态扩展问题[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2005, 37(8): 1093 - 1097.

[14] 吕念春, 程云虹, 田修波,等. 变载荷作用下Ⅲ型裂纹扩展的解析解[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2006, 38(8): 1310 - 1313.

[15] MUSKHELISHVILI N I. Singular integral equations [M]. Moscow: Nauka, 1968.

[16] MUSKHELISHVILI N I. Some fundamental problems in the mathematical theory of elasticity[M]. Moscow: Nauka, 1966.

[17] SNEDDON N I. Fourier transform[M]. New York: McGraw-Hill, 1951.

[18] GALIN L A. Contact problems in elasticity theory [M]. Moscow: GITTL, 1953.

(**编辑** 张 宏)