

# 加工偏置误差对面齿轮传动接触特性的影响

李政民卿, 朱如鹏, 靳广虎

(南京航空航天大学 江苏省精密与微细制造技术重点实验室, 南京 210016, lzmqnuaa@163.com)

**摘要:** 为了对点接触正交面齿轮传动中加工偏置误差的影响进行分析, 建立考虑加工偏置误差影响的点接触正交面齿轮传动坐标系, 并推导传动中接触点方程, 分析加工偏置误差对正交面齿轮齿形及其传动中接触点位置的影响; 根据曲面上任意点处主方向和主曲率的求解方法, 分析加工偏置误差对传动中接触点处主曲率的影响; 根据布希涅斯克问题的解法, 推导传动中正交面齿轮上接触点处接触特性方程, 并分析加工偏置误差对传动中接触点处最大压应力的影响. 研究结果表明, 点接触正交面齿轮传动的接触特性对正交面齿轮的加工偏置误差不敏感.

**关键词:** 正交面齿轮; 加工误差; 曲率; 接触分析; 承载接触分析

**中图分类号:** TH132      **文献标志码:** A      **文章编号:** 0367-6234(2010)12-1938-05

## Influence of machining deflection error on contact specialties of face gear drive

LI Zheng-min-qing, ZHU Ru-peng, JIN Guang-hu

(Jiangsu Key Laboratory of Precision and Micro-Manufacturing Technology, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China, lzmqnuaa@163.com)

**Abstract:** To analyze the influence of machining deflection error on contact specialties of the orthogonal face gear drive, the coordinates of the points contact orthogonal face gear drive is built up and the contact points equations are deduced. Based on these equations, the change of tooth shape, the contact point position, and the maximum press stresses on the orthogonal face gear are analyzed. According to the solution method of the principal curvatures, the influence on the principal curvatures at the contact points is also analyzed, and by the solution method of the problem of Boussinesq, the contact specialties equations are developed. Results show that the contact specialties of the orthogonal face gear are not sensitive to the machining deflection error.

**Key words:** orthogonal face gear; machining error; curvature; TCA; LTCA

目前, 面齿轮传动试验是西方发达国家研究的重点<sup>[1-3]</sup>. 国内主要对面齿轮传动的啮合特性等进行研究<sup>[4-5]</sup>, 迄今还没有面齿轮传动试验的报道.

本文引入加工偏置误差概念, 建立了考虑加工偏置误差影响的点接触正交面齿轮传动坐标系, 推导了传动中接触点方程; 分析了加工偏置误

差对正交面齿轮齿形以及对传动中正交面齿轮上接触点位置的影响; 利用曲面上任意点处主曲率的求解方法, 分析了加工偏置误差对传动中圆柱齿轮和正交面齿轮上接触点处主曲率的影响; 根据布希涅斯克问题的解法, 分析了加工偏置误差对传动中正交面齿轮上接触点处接触特性的影响.

### 1 加工偏置误差对传动中接触点位置的影响

#### 1.1 考虑加工偏置误差影响的传动坐标系

由于加工误差、装配误差以及受载变形的影

收稿日期: 2009-03-30.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50775108); 江苏省自然科学基金资助项目(BK2007194); 航空科技创新基金资助项目(08b512004); 南航青年科技创新基金资助项目(NS2010129).

作者简介: 李政民卿(1977—), 男, 博士, 讲师;  
朱如鹏(1959—), 男, 教授, 博士生导师.

响,理想化的线接触正交面齿轮传动难以实现.一旦理想化的线接触状态被破坏,正交面齿轮传动就会产生边缘接触,导致正交面齿轮传动偏载现象的出现.为了避免上述情况发生,通过选用齿数比插齿刀具齿数少 1~3 个齿的圆柱齿轮与正交面齿轮啮合,实现局部点接触的正交面齿轮传动.点接触正交面齿轮传动分析的重要纽带就是媒介齿轮.媒介齿轮是点接触正交面齿轮传动中既与圆柱齿轮进行线接触又与正交面齿轮实现线接触的空间虚拟齿轮.媒介齿轮的参数和正交面齿轮插齿加工时刀具几何参数一致.

加工偏置误差  $\varepsilon_p$  是正交面齿轮加工误差中的主要误差.它指加工中刀具回转轴线  $O_pZ_p$  与工件回转轴线  $O_fZ_f$  在空间交错垂直时,两轴线间的最短距离.以工件回转轴线  $O_fZ_f$  为基准,刀具回转轴线  $O_pZ_p$  偏向基准右侧时为“+”,偏向左侧时为“-”.加工偏置误差如图 1 所示.

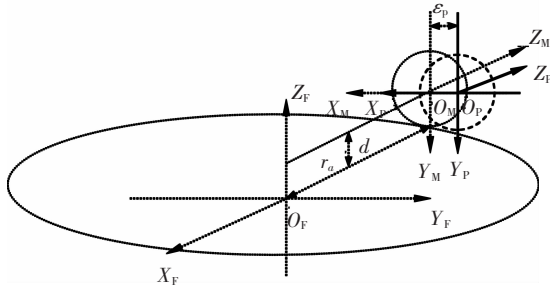


图 1 加工偏置误差

考虑加工偏置误差影响的点接触正交面齿轮传动坐标系如图 2 所示.其中,  $S_M - X_M Y_M Z_M$  是媒介齿轮静坐标系,  $S_P - X_P Y_P Z_P$  是加工偏置误差坐标系,  $S_{M'} - X_{M'} Y_{M'} Z_{M'}$  是媒介齿轮随动坐标系,媒介齿轮绕轴  $O_M Z_M$  旋转,角速度为  $\omega_M$ ,转角为  $\varphi_M$ ;  $S_C - X_C Y_C Z_C$  是圆柱齿轮静坐标系,  $S_{C'} - X_{C'} Y_{C'} Z_{C'}$  是圆柱齿轮随动坐标系,圆柱齿轮绕轴  $O_C Z_C$  旋转,角速度为  $\omega_C$ ,转角为  $\varphi_C$ ;  $S_F - X_F Y_F Z_F$  是正交面齿轮静坐标系,  $S_{F'} - X_{F'} Y_{F'} Z_{F'}$  是正交面齿轮随动坐标系,正交面齿轮绕轴  $O_F Z_F$  旋转,角速度为  $\omega_F$ ,转角为  $\varphi_F$ ;加工偏置误差坐标系为媒介齿轮静坐标系沿其  $X_M$  轴平移  $\varepsilon_p$  距离建立;圆柱齿轮静坐标系的  $X, Y$  和  $Z$  轴与媒介齿轮静坐标系的  $X, Y$  和  $Z$  轴同向,圆柱齿轮静坐标系的  $O_C X_C Y_C$  平面与媒介齿轮静坐标系的  $O_M X_M Y_M$  平面共面,且两坐标系原点距离为  $a$ ,  $a$  为圆柱齿轮和媒介齿轮的中心距;媒介齿轮和正交面齿轮的运动关系决定媒介齿轮静坐标系中  $O_M X_M Z_M$  平面和正交面齿轮静坐标系中  $O_F X_F Y_F$  平面平行且相距高度为媒介齿轮齿顶圆半径  $r_a$ ,平面  $O_M X_M Y_M$  和平面  $O_F Y_F Z_F$  相互

平行且相距为  $d$ ,  $d$  为媒介齿轮齿宽中心面的定位基准,同时  $d$  随媒介齿轮相对于正交面齿轮初始位置的改变而改变.

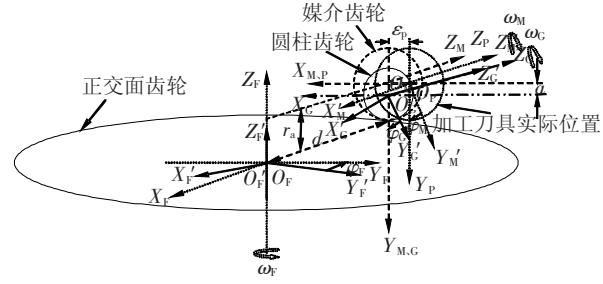


图 2 考虑加工偏置误差影响的点接触正交面齿轮传动坐标系

由图 2 可知,从坐标系  $S_{M'}$  到  $S_P$  的齐次转换矩阵为

$$M_{PM'} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_M & -\sin \varphi_M & 0 & 0 \\ \sin \varphi_M & \cos \varphi_M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

从坐标系  $S_P$  到  $S_M$  的齐次转换矩阵为

$$M_{MP} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\varepsilon_p \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

从坐标系  $S_M$  到  $S_F$  的齐次转换矩阵为

$$M_{FM} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -d \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & r_a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

从坐标系  $S_F$  到  $S_{F'}$  的齐次转换矩阵为

$$M_{FF'} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_F & -\sin \varphi_F & 0 & 0 \\ \sin \varphi_F & \cos \varphi_F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

因此,考虑加工偏置误差影响的媒介齿轮对正交面齿轮坐标系齐次转换矩阵为

$$M_{FM'} = M_{FF'} M_{FM} M_{MP} M_{PM'}.$$

从坐标系  $S_{C'}$  到  $S_C$  的齐次转换矩阵为

$$M_{CC'} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_C & -\sin \varphi_C & 0 & 0 \\ \sin \varphi_C & \cos \varphi_C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

从坐标系  $S_C$  到  $S_M$  的齐次转换矩阵为

$$M_{MC} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

由于装配关系中不考虑误差影响,圆柱齿轮对媒介齿轮转换时,坐标系  $S_P$  和  $S_M$  完全重合,所以从坐标系  $S_M$  到  $S_M'$  的齐次转换矩阵为

$$M_{MM'} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_M & \sin \varphi_M & 0 & 0 \\ -\sin \varphi_M & \cos \varphi_M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

故,圆柱齿轮对媒介齿轮的齐次转换矩阵为

$$M_{MG'} = M_{MM'} M_{MG} M_{GG'}$$

### 1.2 考虑加工偏置误差影响的传动中接触点方程

媒介齿轮是渐开线直齿圆柱齿轮<sup>[6]</sup>,其齿廓曲面坐标系如图3所示.其中,  $r_b$  为媒介齿轮的基圆半径,  $r_k$  为齿廓上任意一点  $k$  处的矢径,  $\theta_k$  为  $r_k$  与  $y_M$  轴的夹角.

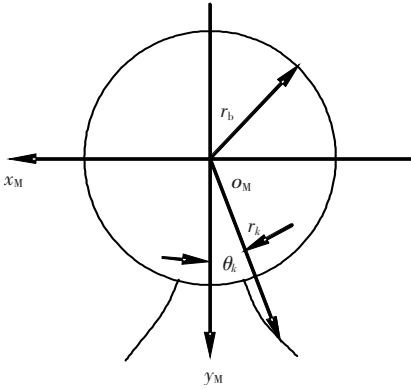


图3 媒介齿轮齿廓坐标系

因此,媒介齿轮齿廓方程为

$$\begin{cases} x_M = \pm r_k \sin \theta_k, \\ y_M = r_k \cos \theta_k, \\ z_M = u_k. \end{cases}$$

式中:  $\theta_k = \pi/2z - \text{inv } \alpha + \text{inv } \alpha_k$ ,  $\text{inv } \alpha = \tan \alpha - \alpha$ ,  $\text{inv } \alpha_k = \tan \alpha_k - \alpha_k$ ,  $\alpha$  为媒介齿轮分度圆压力角,  $\alpha_k$  为  $k$  点处压力角,  $u_k$  为媒介齿轮齿宽变量,  $x_M$  中“+”为左齿廓,  $x_M$  中“-”为右齿廓. 所以,媒介齿轮齿廓齐次矩阵为

$$R_M = [x_M \ y_M \ z_M \ 1]^T.$$

由于媒介齿轮和正交面齿轮满足包络关系,因此媒介齿轮经坐标系  $S_M'$  到  $S_F'$  的转换后,得到面族方程为

$$R_G^Z = M_{FG'} R_M. \quad (1)$$

根据包络原理得出其包络条件<sup>[7]</sup>为

$$\frac{\partial R_M^Z}{\partial \alpha_k} \times \frac{\partial R_M^Z}{\partial u_k} \cdot \frac{\partial R_M^Z}{\partial \varphi_M} = 0. \quad (2)$$

将式(1)、(2)联立,即得到考虑加工偏置误差影响的传动中媒介齿轮与正交面齿轮的接触线方程.

由于圆柱齿轮和媒介齿轮同样满足包络关系,因此圆柱齿轮经  $S_C'$  到  $S_M'$  的坐标系转换后,

得到面族方程为

$$R_G^Z = M_{CG'} R_C, \quad (3)$$

根据包络原理得出其包络条件<sup>[7]</sup>为

$$\frac{\partial R_C^Z}{\partial \alpha_k} \times \frac{\partial R_C^Z}{\partial u_k} \cdot \frac{\partial R_C^Z}{\partial \varphi_M} = 0. \quad (4)$$

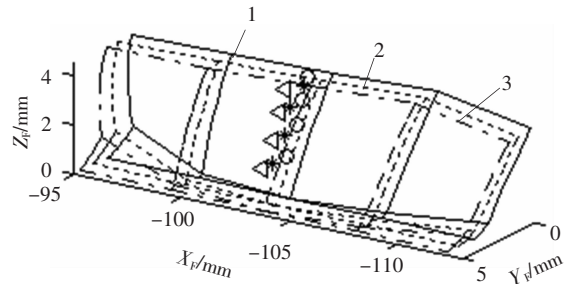
式中:  $R_C = [x_M \ y_M \ z_M \ 1]^T$ . 将式(3)、(4)联立,即得到考虑加工偏置误差影响的传动中圆柱齿轮与媒介齿轮的接触线方程.

将传动中媒介齿轮与正交面齿轮的接触线方程和圆柱齿轮与媒介齿轮的接触线方程联立,即得到考虑加工偏置误差影响的传动中接触点方程

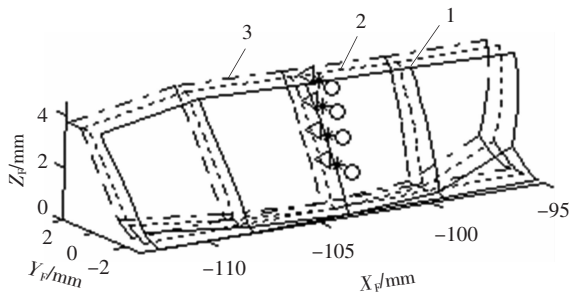
$$\begin{cases} R_M^Z = M_{FM} R_M, \\ \frac{\partial R_M^Z}{\partial \alpha_k} \times \frac{\partial R_M^Z}{\partial u_k} \cdot \frac{\partial R_M^Z}{\partial \varphi_M} = 0, \\ R_G^Z = M_{CG'} R_C, \\ \frac{\partial R_G^Z}{\partial \alpha_k} \times \frac{\partial R_G^Z}{\partial u_k} \cdot \frac{\partial R_G^Z}{\partial \varphi_M} = 0. \end{cases}$$

### 1.3 加工偏置误差对传动中正交面齿轮上接触点位置的影响

根据考虑加工偏置误差影响的传动中接触点方程,仿真分析加工偏置误差对正交面齿轮齿形和正交面齿轮上接触点位置的影响(见图4).



(a) 左齿廓接触点



(b) 右齿廓接触点

图4 加工偏置误差对传动中正交面齿轮上接触点位置的影响

仿真中,媒介齿轮模数取 2 mm, 齿数取 50, 分度圆压力角取 20°; 圆柱齿轮齿数取 48; 正交面齿轮齿数取 98, 内半径取 95 mm, 外半径取 112 mm;  $d$  取 103.5 mm; 加工偏置误差  $\varepsilon_p$  分别取

0, 1.0 和 1.8 mm. 考虑加工偏置误差影响的正交面齿轮左、右齿廓上接触点位置分别如图 4(a) 和 (b) 所示. 图中, “1, 2 和 3” 分别为加工偏置误差 0, 1.0 和 1.8 mm 时的正交面齿轮齿廓; “○、\* 和 Δ” 分别为加工偏置误差 0, 1.0 和 1.8 mm 时正交面齿轮齿廓上接触点.

由图 4 可知, 加工偏置误差使正交面齿轮齿形沿周向发生偏移. 当加工偏置误差为正时, 正交面齿轮齿形以其回转轴线为基准, 按顺时针方向偏移; 当加工偏置误差为负时, 齿形则按逆时针方向偏移; 齿形偏移量随加工偏置误差的增大而增大. 加工偏置误差对正交面齿轮齿廓几何形状的影响不大, 同时它对传动中正交面齿轮左右齿廓上相对应接触点的对称关系以及接触点相对于正交面齿轮齿廓上位置的影响均不明显.

## 2 加工偏置误差对传动中接触点处主曲率和接触特性的影响

### 2.1 加工偏置误差对接触点处主曲率的影响

利用式(5)<sup>[7]</sup> 对点接触正交面齿轮传动中圆柱齿轮和正交面齿轮上接触点的主方向进行求解:

$$\begin{vmatrix} du_k^2 & -d\alpha_k du_k & d\alpha_k^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0. \quad (5)$$

式中:  $E, F, G, L, M$  和  $N$  为圆柱齿轮和正交面齿轮齿廓曲面的第一基本量和第二基本量.

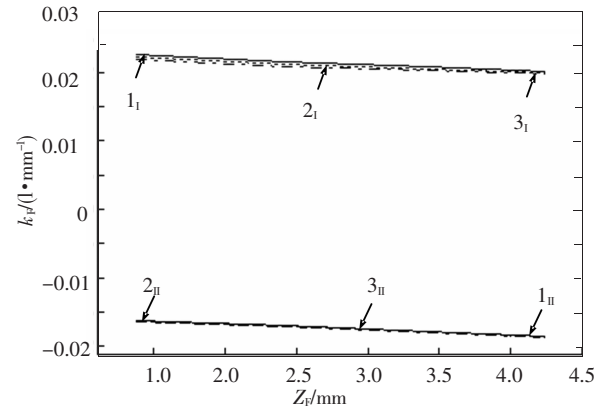
根据曲面法曲率求解方法<sup>[7]</sup>

$$k_I, k_{II} = \frac{Ld\alpha_k^2 + 2Md\alpha_k du_k + Ndu_k^2}{Ed\alpha_k^2 + 2Fd\alpha_k du_k + Gdu_k^2}.$$

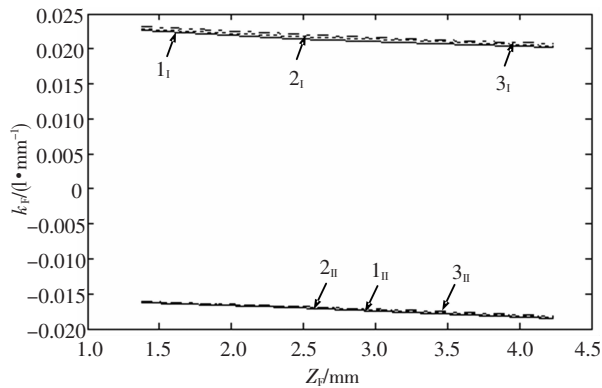
分别将圆柱齿轮和正交面齿轮的接触点处主方向代入, 即得到圆柱齿轮接触点处的主曲率  $k_{CI}, k_{CII}$  和正交面齿轮接触点处的主曲率  $k_{FI}, k_{FII}$ .

根据接触点处主曲率的计算方法, 对受加工偏置误差影响的点接触正交面齿轮传动时, 圆柱齿轮和正交面齿轮上接触点主曲率进行求解. 根据计算结果可知, 加工偏置误差不会对传动中圆柱齿轮上接触点处的主曲率  $k_{CI}$  和  $k_{CII}$  产生影响, 但是对正交面齿轮上接触点处的主曲率  $k_{FI}$  和  $k_{FII}$  却稍有影响. 当加工偏置误差取“+”且逐渐增大时, 正交面齿轮左齿廓上接触点主曲率  $k_{FI}$  和  $k_{FII}$  将逐渐减小, 右齿廓上接触点主曲率  $k_{FI}$  和  $k_{FII}$  将逐渐增大. 加工偏置误差对正交面齿轮左、右齿廓上接触点主曲率  $k_{FI}$  和  $k_{FII}$  的影响分别如图 5(a) 和 (b) 所示. 图中, “1<sub>I</sub> 和 1<sub>II</sub>、2<sub>I</sub> 和 2<sub>II</sub> 以及 3<sub>I</sub> 和 3<sub>II</sub>” 分别为加工偏置误差 0, 1.0 和 1.8 mm 时正交面

齿轮齿廓上接触点处主曲率  $k_{FI}$  和  $k_{FII}$ .



(a) 正交面齿轮左齿廓上接触点主曲率



(b) 正交面齿轮右齿廓上接触点主曲率

图 5 加工偏置误差对传动中正交面齿轮上接触点处主曲率的影响

### 2.2 加工偏置误差对接触点处接触特性的影响

齿轮承载接触分析是以布希涅斯克问题的解为基础, 建立弹性接触问题的基本方程. 根据对接触物体表面几何关系<sup>[8]</sup> 的分析可知, 物体表面上有相同距离的点在公切面上形成类椭圆区域, 故载荷  $F_m$  在接触区域的分布满足

$$z = \frac{3F_m}{2\pi\rho_x\rho_y} \sqrt{1 - \frac{x^2}{\rho_x^2} - \frac{y^2}{\rho_y^2}}.$$

式中:  $\rho_x$  和  $\rho_y$  为接触椭圆的长半径和短半径.

由接触点主曲率和两弹性体的弹性系数与接触区域的关系<sup>[8]</sup> 可知, 接触区域椭圆长、短半径应满足

$$\rho_x = u \sqrt{\frac{3F_m(\theta_G + \theta_F)}{8(k_{CI} + k_{CII} + k_{FI} + k_{FII})}},$$

$$\rho_y = v \sqrt{\frac{3F_m(\theta_G + \theta_F)}{8(k_{CI} + k_{CII} + k_{FI} + k_{FII})}}.$$

式中:  $u, v$  系数为椭圆积分系数, 可通过查椭圆积分系数表<sup>[8]</sup> 获得;  $\theta_i$  由式(6) 计算:

$$\theta_i = 4(s_i^2 - 1)/(E_i s_i^2). \quad (6)$$

式中:  $i$  分别为 G 和 F,  $s_i$  为材料纵向延伸与横向压缩之比的系数,  $E_i$  为材料的弹性模量.

接触区域最大压应力方程为

$$\sigma_{\max} = \frac{0.92}{uv} \sqrt[3]{\frac{F_m(k_{GI} + k_{GII} + k_{FI} + k_{FII})^2}{(\theta_G + \theta_F)^2}}$$

接触区域的最大弹性变形量为

$$\delta_{\max} = 3JF_m(\theta_G + \theta_F)/(8\pi\rho_x).$$

式中:  $J$  为椭圆积分系数, 其求解方法与系数  $u$ 、 $v$  相同.

根据接触特性方程, 对考虑加工偏置误差影响的传动中正交面齿轮上接触点处接触特性进行计算. 加工偏置误差分别取为 0、1.0 和 1.8 mm; 由于加工偏置误差对正交面齿轮齿形几乎没有影响, 因此齿间载荷分配系数取为 1<sup>[9]</sup>, 假设接触点处受力均为 3 000 N; 取圆柱齿轮和正交面齿轮的纵向延伸与横向压缩比系数为 3; 取圆柱齿轮和正交面齿轮的弹性模量为 210 GPa. 由计算结果可知, 加工偏置误差对点接触正交面齿轮传动接触特性的影响很小. 当加工偏置误差取“+”且逐渐增大时, 正交面齿轮左齿廓上最大压应力将稍许增加, 但是其齿顶处的最大压应力稍许减小; 右齿廓上最大压应力将稍许减小, 但是其齿顶处的最大压应力稍许增大. 考虑加工偏置误差影响的传动中正交面齿轮左、右齿廓上最大压应力比较, 分别如图 6(a) 和(b) 所示.

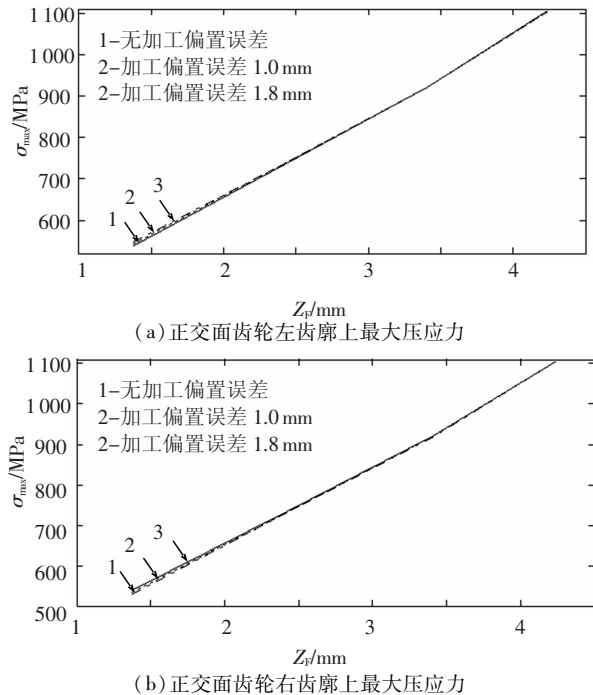


图6 加工偏置误差正交面齿轮最大压应力影响

### 3 结 论

1) 加工偏置误差对正交面齿轮的周向齿分

布有明显影响, 但是对正交面齿轮的几何齿形以及传动中接触点相对于正交面齿轮的位置无明显影响.

2) 加工偏置误差对正交面齿轮上接触点处主曲率产生一定的影响, 并当加工偏置误差取“+”且逐渐增大时, 正交面齿轮左齿廓上接触点处主曲率将逐渐减小, 而其右齿廓上接触点处主曲率将逐渐增大.

3) 当加工偏置误差取“+”且逐渐增大时, 正交面齿轮左齿廓上最大压应力将稍许增加, 但其变化率将稍许减小; 而其右齿廓上最大压应力将稍许减小, 但其变化率却将稍许增大.

总之, 点接触正交面齿轮传动的接触特性对正交面齿轮的加工偏置误差不敏感.

### 参 考 文 献:

- [1] LITVIN F L, FUENTES A, VECCHIATO D, *et al.* New Design and Improvement of planetary Gear Trains [R]. [S. l.]: Glenn Research Center, 2004: ARL-CR-0540, NASA CR-2004-213101, 1-32.
- [2] LITVIN F L, FUENTES A, GONZALEZ - PEREZ I, *et al.* Face Gear Drive With Helical Involute Pinion Geometry, Generation by a Shaper and a Worm, Avoidance of Singularities and Stress Analysis [R]. [S. l.]: Glenn Research Center ARL-CR - 557, NASA CR-2005-213443, 2005: 1-62.
- [3] MICHÉLE G, JEAN - PIERRE de V. COLIN-YANN J. Quasi-static analysis of a face gear under torque [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2005, 194(41): 4301-4318.
- [4] 李政民卿, 朱如鹏. 面齿轮插齿加工中过程包络面和理论齿廓的干涉 [J]. *重庆大学学报*, 2007, 30(7): 55-58, 95.
- [5] 李政民卿, 朱如鹏. 正交面齿轮齿廓的几何设计和根切研究 [J]. *华南理工大学学报*, 2008, 36(2): 78-82.
- [6] 李政民卿, 朱如鹏. 面齿轮滚磨刀具基蜗杆研究 [J]. *机械科学与技术*, 2009, 28(1): 98-101, 107.
- [7] 马香峰, 虞洪述, 吕荣寰. 确定共轭曲面的方法及其应用 [M]. 北京: 机械工业出版社, 1989: 75-93.
- [8] 宋乐民. 齿形与齿轮强度 [M]. 北京: 国防工业出版社, 1987: 172-173.
- [9] 朱孝录, 鄂中凯. 齿轮承载能力分析 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1992: 116-135.

(编辑 杨 波)