

双足被动行走模型局部稳定性分析

胡运富, 赵杰, 朱延河, 臧希喆

(哈尔滨工业大学 机器人研究所, 哈尔滨 150001, huyunfu134@yahoo.com.cn)

摘要: 为了实现双足被动机器人进行稳定周期行走, 给出了求解双足被动模型不动点的方法, 并详细分析了被动行走模型各机械参数和斜面坡度对稳定不动点存在的影响, 并分析各参数在给定初始条件下, 对模型收敛到稳定周期运动状态速度的影响以及各参数对模型稳定不动点状态变化的影响. 结果表明: 较小的腿质量 ($m \in [0.3 \text{ kg}, 30 \text{ kg}]$), 较高的质心位置 ($K_c \in [0.0304, 0.6240]$), 合适的足半径 ($K_r = 0.16$), 较大的转动惯量 ($K_j = 0.128$) 以及合适的斜面坡度 ($\beta \in [0.02 \text{ rad}, 0.1 \text{ rad}]$) 有利于提高被动机器人的局部稳定性.

关键词: 被动行走; 不动点; 双足机器人; 周期; 相空间; 局部稳定性

中图分类号: TP242

文献标志码: A

文章编号: 0367-6234(2010)09-1485-06

Analysis of local stability of biped passive dynamic walking model

HU Yun-fu, ZHAO Jie, ZHU Yan-he, ZANG Xi-zhe

(Robotics Institute, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China, huyunfu134@yahoo.com.cn)

Abstract: To realize the stable walking cycle of passive biped robot, this paper presents a method to find the fixed point and a detailed analysis on the effect of the change of mechanical parameters of the passive walking model and slope gradient on the existence of stable fixed point is carried out. The effect for each parameter at the given initial conditions on the speed of converging to the stable cycle walking and the effect of changing status of stable fixed point from the change of the parameters are investigated. It is concluded that the smaller mass for legs, a higher location for the center of mass, the right radius of foot, the larger moment of inertia as well as the right slope gradient are beneficial for improving the local stability of the passive robot.

Key words: passive walking; fixed point; biped robot; cycle; phase space; local stability

相对于传统机器人而言, 被动步行机器人以其结构和控制简单, 步态自然, 节能和在非结构化环境中具有更好的移动能力等特点引起广大学者的极大关注^[1]. 加拿大学者 McGeer 发现^[2-3]: 完全不用驱动和控制的机器人也能实现稳定的下坡运动, 并提出“被动动力步行”概念. Garcia^[4], Collins^[5] 等对机器人行走的参数匹配问题进行了研究. Grizzle 从理论上证明了被动双足机器人前向运动存在复杂零动态子系统, 给出稳定极限环存在的条件^[6], 并通过 Rabbit 实现了稳定动态步

行^[7]. 当前, 稳定性问题严重制约了被动机器人的发展, 影响被动机器人模型稳定行走的因素很多, 同时被动机器人本体的设计必须要建立在其能稳定行走的基础上.

本文分析了机械参数和斜面坡度对被动行走模型局部稳定性的影响, 为后续被动机器人全局稳定性分析以及机器人本体机械参数设计提供指导和理论依据.

1 被动行走模型

所讨论的被动行走机器人模型是两刚性匀质的直腿圆弧足模型, 如图 1 所示. 两腿通过髋关节相连, 髋关节为无质量、无摩擦、无阻尼的被动铰链. 这种模型明显优化于传统的点足模型, 更接近于真实的机器人样机. 每条腿质量为 m , 其相对质

收稿日期: 2009-03-25.

基金项目: 机器人技术与系统国家重点实验室(哈尔滨工业大学)自主课题(SKLR200804C).

作者简介: 胡运富(1985—), 男, 硕士研究生;

赵杰(1968—), 男, 教授, 博士生导师.

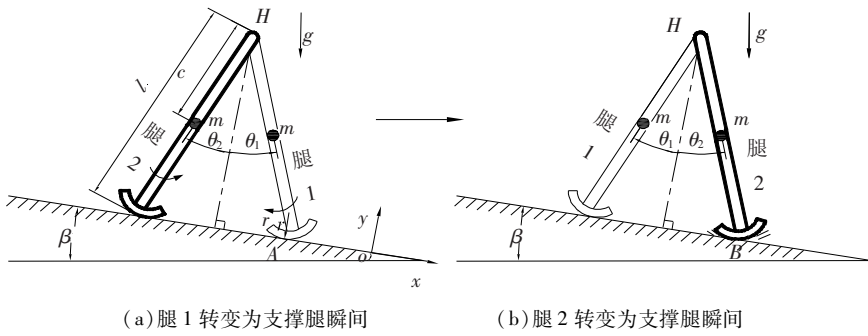


图 1 被动行走模型

心的转动惯量为 J , 腿长均为 l , 质心距离离关节的距离为 c , 圆弧足的足半径为 r , 斜面坡度为 β .

当给定初始条件, 在重力和自身的惯性作用下, 该被动动力模型可沿小坡度的刚性平坦斜面稳定地向下行走. 其每一步的运动过程可分为如下两部分.

1) 当摆动腿离开地面时, 支撑腿绕支撑足做倒立摆运动(支撑足与地面是纯滚动), 而摆动腿则绕髋关节做单摆运动. 此过程为连续运动阶段. 该过程中只有重力做功, 故其总的机械能是守恒的.

为使所建立的动力学方程适用性更广, 将方程无量纲化, 令 $K_J = J/ml^2, K_r = r/l, K_c = c/l$, 且将时间无量纲化为 $t \sqrt{(g/l)}$; 由拉格朗日方程推导该阶段的动力学方程, 可得

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\theta, \dot{\theta}) \\ f_2(\theta, \dot{\theta}) \end{bmatrix}$$

其中:

$$M_{11} = K_J + (2K_r - 1)^2 + (K_c - 1)^2 + 2K_c K_r - 2K_r \cos \theta_1 (2K_r + K_c - 2),$$

$$M_{12} = M_{21} = K_c [(K_r - 1) \cos(\theta_2 - \theta_1) - K_r \cos \theta_2],$$

$$M_{22} = K_J + K_c^2,$$

$$f_1(\theta, \dot{\theta}) = K_r \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1 (2 - K_c - 2K_r) + K_c \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) (K_r - 1) - 2gK_r \sin \beta + g \sin(\theta_1 - \beta) (2 - K_c - 2K_r) - K_c K_r \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2,$$

$$f_2(\theta, \dot{\theta}) = -K_c (K_r - 1) \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) - gK_c \sin(\theta_2 - \beta).$$

2) 当摆动腿与地面碰撞后, 摆动腿和支撑腿角色互换, 假设碰撞是瞬时的, 完全非弹性(摆动足与地面无滑动), 故在碰撞前后, 两腿角速度发生突变, 而两腿角度不变, 系统满足角动量守恒. 描述碰撞过程: 设碰撞瞬间前后分别用上角标“-”和“+”表示, 系统角动量用 L 表示.

对于碰撞点 B 和髋关节 H 角动量守恒:

$$\begin{cases} L_B^-(\theta_1^-, \dot{\theta}_1^-, \theta_2^-, \dot{\theta}_2^-) = L_B^+(\theta_1^+, \dot{\theta}_1^+, \theta_2^+, \dot{\theta}_2^+), \\ L_H^-(\theta_1^-, \dot{\theta}_1^-, \theta_2^-, \dot{\theta}_2^-) = L_H^+(\theta_1^+, \dot{\theta}_1^+, \theta_2^+, \dot{\theta}_2^+). \end{cases} \quad (1)$$

由前述分析知:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1^- = \dot{\theta}_1^+, \\ \dot{\theta}_2^- = \dot{\theta}_2^+, \\ \theta_1 = -\theta_2. \end{cases} \quad (2)$$

由方程(1), (2) 可求出 $\dot{\theta}_1^+$ 和 $\dot{\theta}_2^+$.

该无膝被动模型的摆动方程和碰撞方程构成了一个完整步态周期的动力学模型, 是后续的仿真和稳定性分析的基础.

2 稳定不动点的求解

如图 1 所示, 被动机器人的运动过程可由状态变量 $\phi(t) = (\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)$ 来描述, 每个状态变量对应空间中的一个点, 由这些点构成的空间称为“相空间”. 令机器人双足着地的状态是某步的起始状态或终点状态, 通过研究双足着地的状态, 可判断机器人运动的周期稳定性. 双足同时着地时由图 1 知 $\theta_1 = -\theta_2$, 故其状态可由状态变量 $\phi(t) = (\theta_1, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)$ 来表示.

设不动点为被动机器人稳定周期运动时, 腿 1 刚与地面相碰后, 转为支撑腿的瞬间(此时双腿同时着地) 所对应的状态在相空间中的点用 $\phi_{PP}(t) = (\theta_1, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)$ 表示. 不动点的存在是被动机器人能稳定行走的必要条件. 由于为非线性系统, 机器人每走一步即为一次庞加莱映射 S (S 是包括碰撞在内的一次完整的动态步行的表达式, 它反映相邻两步之间的关系), 即 $\phi_{n+1} = S(\phi_n)$, 显然对于稳定的周期运动有 $\phi_{PP} = S(\phi_{PP})$. 当所给的初始条件非常接近于不动点时, 则模型可收敛到稳定的运动. 影响不动点存在的因素为该被动模型的机械结构参数和斜面的坡度.

首先考虑如何求被动模型稳定不动点, 所有的初始条件可以写为不动点和偏差的和:

$$\phi_n = \phi_{PP} + \Delta\phi_n.$$

对于偏离不动点的小的偏差 $\Delta\phi_n$, 可用线性

化的方法来估计相空间:

$$\begin{cases} \phi_{p} + \Delta\phi_{n+1} = S(\phi_{p} + \Delta\phi_n) \approx S(\phi_p) + \mathbf{J}\Delta\phi_n, \\ \mathbf{J} = \partial S / \partial \phi. \end{cases}$$

方程简化为 $\Delta\phi_{n+1} = \mathbf{J}\Delta\phi_n$, \mathbf{J} 为雅克比矩阵,其特征值的模是进行局部稳定性分析的关键. 如果其模小于 1, 则说明结果将收敛于稳定不动点. 当所给的初值接近于不动点的一定范围内, 通过牛顿 - 拉普森迭代函数可快速求得不动点. 过程如下:

重复

$$\begin{cases} \Delta\phi = [\mathbf{I} - \mathbf{J}]^{-1}(S(\phi) - \phi), \\ \phi = \phi + \Delta\phi, \end{cases}$$

表 1 每条腿的参数

腿的质量 m/kg	质心与髋关节距离 c/m	腿长 l/m	腿对质心的转动惯量 $J/(\text{kg} \cdot \text{m}^2)$	圆弧足半径 r/m	斜坡倾角 β/rad
1	0.1	0.5	0.01	0.2	0.01

在此基础上逐一分析各参数对机器人局部稳定性的影响: 方法是在保证其他参数不变的情况下, 只改变某一个参数的值, 判断雅克比矩阵的特征值的模的变化, 若模大于或等于 1, 则模型无稳定的不动点; 若模小于 1 则有稳定的不动点, 模越小则收敛到不动点的速度就越快(即模型在所给初始条件下收敛到稳定运动状态的速度就越快).

如图 2 为模型在 Matlab 仿真下的运动动画, 所有分析都是基于模型可以行走的条件下进行, 这样获得的结果更为可靠, 对被动机器人的设计具有很好的指导意义.



图 2 仿真模型运动动画

从图 3(a) 中可看出当腿质量过小时(约小于 0.3 kg), 会出现特征值的模大于 1, 被动模型会出现无稳定的不动点, 即不具有稳定周期运动的必要条件; 此后在 $m \in [0.3 \text{ kg}, 30 \text{ kg}]$ 之间时, 特征值的模小于 1, 说明该模型具有稳定的不动点, 但随着腿质量的增大, 特征值的模也随之增大, 这意味着被动模型收敛到稳定周期运动状态的速度逐渐变慢, 同时可看出 $m \in [0.3 \text{ kg}, 5 \text{ kg}]$ 之间时特征值的模对质量的变化非常敏感(这为设计机器人提供依据: 尽量取较小质量的腿, 以便于通过微调腿的质量来改善机器人的局部稳定性); 由特征值的模随质量增加而增大的趋势可看出, 当质量过大时会出现特征值的模大于 1, 即稳定不动点会消失.

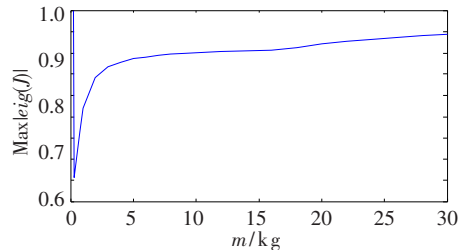
图 3(b) 中可看出: 稳定不动点在相空间的位置随着腿质量的增大, 沿曲线按箭头所指方向运动.

直到 $|\Delta\phi| < \varepsilon$.

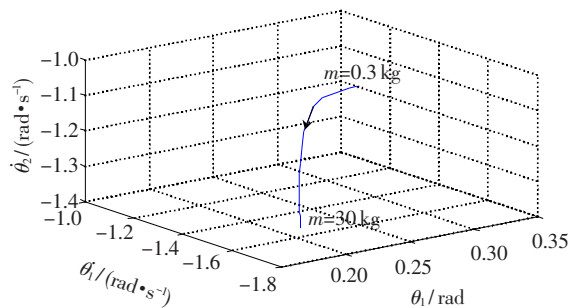
3 局部稳定性分析

对模型局部稳定性的分析就是对模型不动点的存在与否, 机器人在所给的初始条件下收敛到不动点的快慢程度以及各参数对不动点状态分量变化的影响进行分析. 机器人运动的不动点是否存在与所给初始条件无关, 只和该模型的机械参数和斜面的坡度有关. 现举例分析, 如表 1.

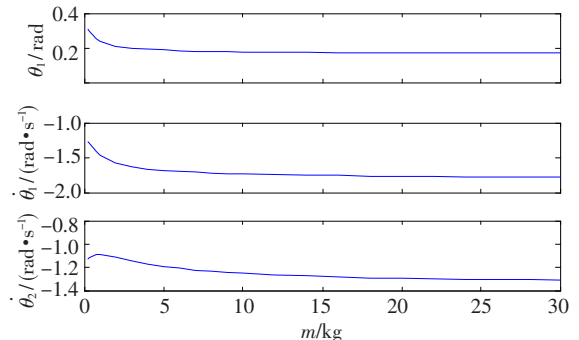
图 3(c) 为不动点的状态随质量的变化曲线. 随着腿质量的增加, θ_1 单调减小, 而 $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$ 的绝对值呈单调增加趋势, 在 $m \in [0.3 \text{ kg}, 5 \text{ kg}]$ 时, 这种变化比较明显. 可见, 当被动机器人具有稳定不动点时, 腿质量对其模型最终的稳定运动状态也有很大影响.



(a) 腿质量对特征值模的影响



(b) 腿质量对不动点在相空间中的位置变化影响



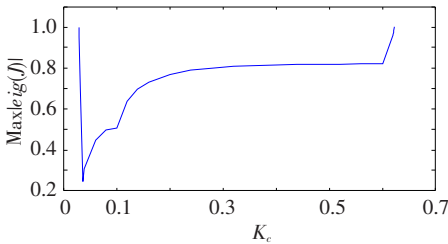
(c) 腿质量对不动点各状态的影响

图 3 腿质量对局部稳定性的影响

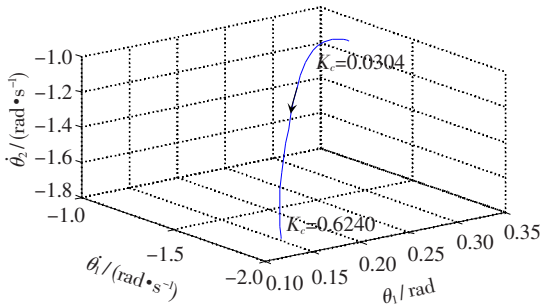
从图4(a)中可看出,当 K_c 过小(约小于0.03)即质心位置过高时,特征值的模大于1,机器人不具有稳定状态;当 $K_c \in [0.0304, 0.6240]$ 时,特征值的模小于1,机器人有稳定的不动点,但随着 K_c 的增大,特征值的模也在增大,被动机器人收敛到稳定运动状态的速度越慢,且在 $K_c \in [0.0304, 0.2000]$ 和 $K_c > 0.6000$ 时特征值的模对质心位置的变化非常敏感(这为设计机器人提供依据:尽量取 $K_c \in [0.0304, 0.2000]$ 腿,既有较快的收敛速度也便于通过微调腿的质心位置来改善机器人的局部稳定性);当 $K_c > 0.6240$ 后机器人不具有稳定的运动状态;可见质心位置过低($K_c < 0.03$)和过高($K_c > 0.6240$)都不利于被动机器人的稳定运动。

图4(b)中可看出:稳定不动点在相空间位置随 K_c 的增大,沿曲线按箭头所指方向移动。

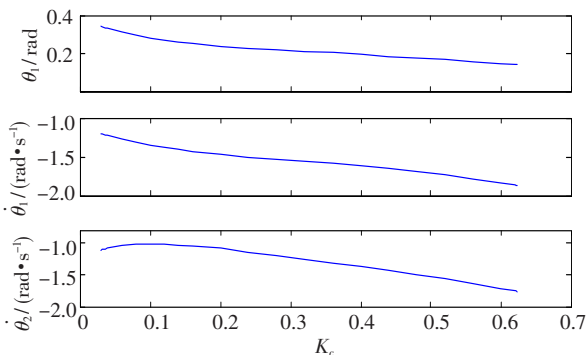
图4(c)为不动点的状态随质心位置的变化曲线。随着 K_c 的增加, θ_1 单调减小,而 $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$ 的绝对值呈单调增加趋势,可见当被动机器人具有稳定不动点时,质心位置对其最终的稳定运动状态也有很大影响。



(a) 质心位置对特征值模的影响



(b) 质心位置对不动点在相空间中的位置变化影响



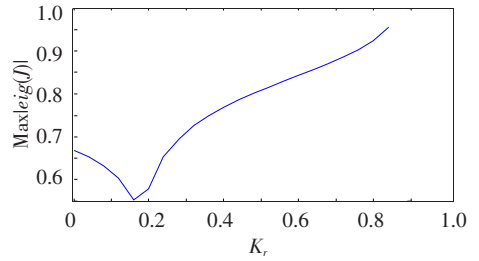
(c) 质心位置对不动点各状态的影响

图4 质心位置对局部稳定性的影响

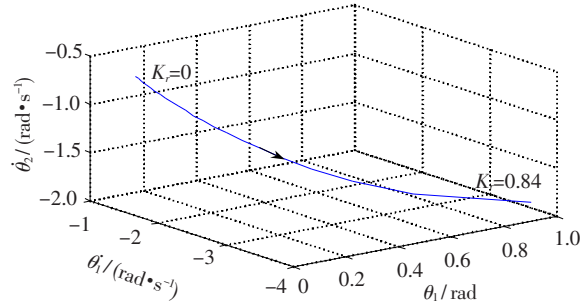
从图5(a)可看出,雅克比特征值的模并不随半径的增大而单调变化,但当 $K_r < 0.84$ 时,特征值的模都小于1,即模型存在稳定的不动点;当 $K_r \in [0, 0.16]$ 之间时特征值的模单调减小;当 $K_r \in [0.16, 0.84]$ 之间时特征值的模单调增大,即模型收敛到稳定状态的速度减慢。当足半径在 $K_r = 0.16$ 附近时,特征值变化敏感(这为设计机器人提供依据:尽量取 $K_r = 0.16$ 附近的足半径,既有较快的收敛速度也便于通过微调足半径来改善机器人的局部稳定性)。

图5(b)中可看出稳定不动点在相空间位置,随着 K_r 的增大,沿曲线按箭头所指方向移动。

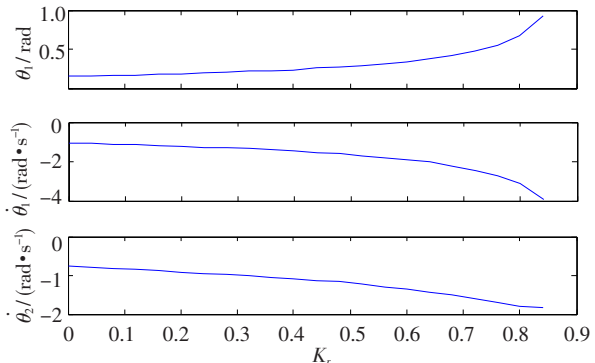
图5(c)为不动点的状态随质心位置的变化曲线。随着 K_r 的增加, θ_1 呈增大趋势, $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$ 的绝对值也呈增大趋势,可见当被动机器人具有稳定不动点时,足半径对其最终的稳定运动状态也有很大影响。



(a) 足半径对特征值模的影响



(b) 足半径对不动点在相空间中的位置变化的影响



(c) 足半径对不动点各状态的影响

图5 足半径对局部稳定性的影响

从图6(a)中可看出,特征值的模并不随转动惯量的增大而单调变化,当 $K_j \in [0, 0.154]$ 时,

特征值的模小于1,被动模型具有稳定的不动点,特征值的模在 $K_j = 0.128$ 时,特征值的模具有最小值,即模型具有最快的收敛速度(这为设计机器人提供依据:尽量取 $K_j = 0.128$ 附近的转动惯量,既有较快的收敛速度也便于通过微调转动惯量来改善机器人的局部稳定性);当 $K_j > 0.154$ 时,特征值的模大于1,可见此时系统不具有稳定行走的必要条件。

图6(b)可看出:不动点在相空间位置随着 K_j 的增大,沿曲线按箭头所指方向移动。

图6(c)为不动点的状态随腿的转动惯量的变化曲线。随着转动惯量的增加, $\theta_1, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$ 都呈单调变化趋势: θ_1 增大,而 $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$ 的绝对值减小。可见当被动机器人具有稳定不动点时,转动惯量对其最终的稳定运动状态也有很大影响。

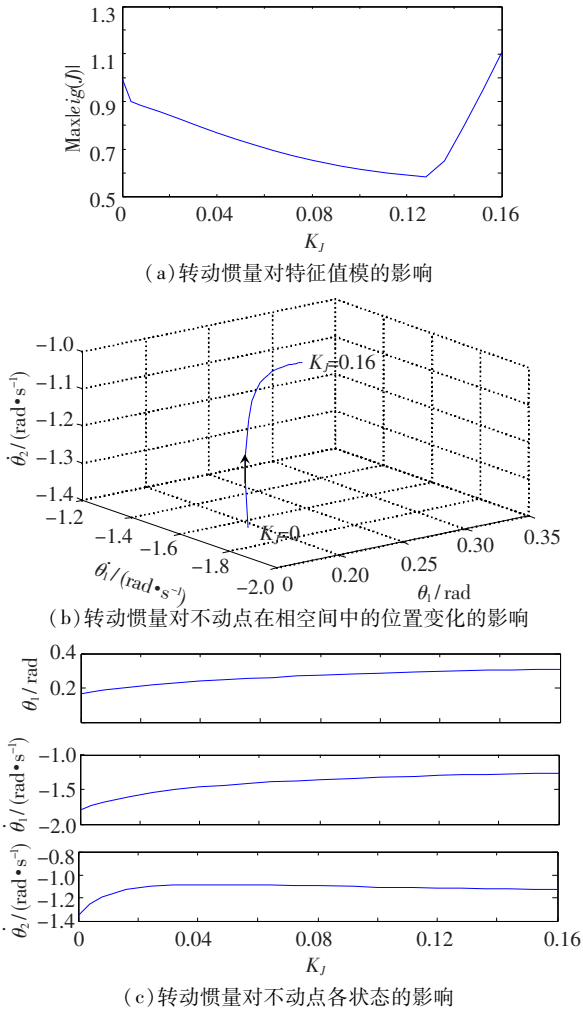


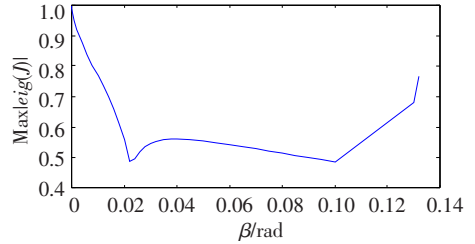
图6 转动惯量对局部稳定性的影响

从图7(a)中可看出,特征值的模并不随坡度的增大而单调变化,而是先减小 ($\beta \in [0, 0.021 \text{ rad}]$),后增大 ($\beta \in [0.021 \text{ rad}, 0.038 \text{ rad}]$),再减小 ($\beta \in [0.038 \text{ rad}, 0.1 \text{ rad}]$),最后再增大 ($\beta > 0.1 \text{ rad}$)。

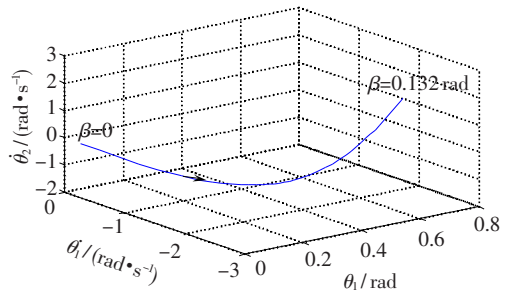
图7(b)可看出:不动点在相空间位置随着 β

的增大,沿曲线按箭头所指方向移动。

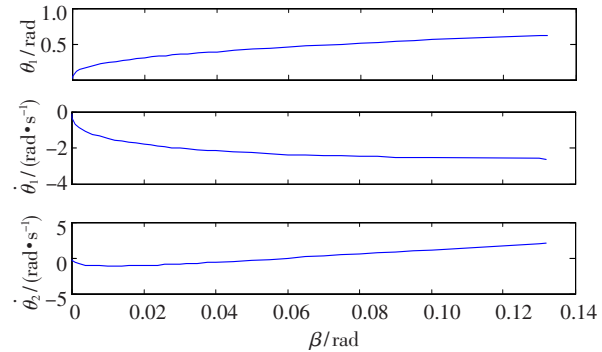
图7(c)为不动点的状态随坡度变化的曲线。随着坡度的增加, θ_1 增大,而 $\dot{\theta}_1$ 的绝对值减小, $\dot{\theta}_2$ 的方向由负变为正。可见当被动机器人具有稳定不动点时,坡度对其最终的稳定运动状态也有很大影响。



(a) 斜面坡度对特征值模的影响



(b) 质心位置对不动点在相空间中的位置变化的影响



(c) 质心位置对不动点各状态的影响

图7 斜面坡度对局部稳定性的影响

4 结论

1) 给出了如何求被动机器人稳定不动点的方法,同时详细分析了模型的各机械参数和斜面坡度对机器人局部稳定性的影响。

2) 较小的腿质量 ($m \in [0.3 \text{ kg}, 30 \text{ kg}]$),考虑到收敛的快速性和被动机器人的刚度和强度,可取 $m = 1 \text{ kg}$),较高的质心位置 ($K_c \in [0.0304 \text{ 0}, 0.624 \text{ 0}]$,同时考虑到被动机器人稳定行走鲁棒性,取 $K_c = 0.2$),合适的足半径 ($K_r = 0.16$),较大的转动惯量 ($K_j = 0.128$)以及合适的斜面坡度 ($\beta \in [0.02 \text{ rad}, 0.10 \text{ rad}]$,同时考虑到被动机器人稳定行走鲁棒性可取 $\beta = 0.02 \text{ rad}$)有利于提高被动机器人的局部稳定性。

3) 被动机器人的局部稳定性分析和后续全局稳定性分析将为被动机器人本体样机的设计提供指导和理论依据.

参考文献:

- [1] HUANG Q, YOKOI K, KAJITA S, *et al.* Planning walking patterns for a biped robot[J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 2001, 17(3): 280 - 289.
- [2] MCGEER T. Passive dynamic walking[J]. International Journal of Robotics Research, 1990, 9(2): 62 - 82.
- [3] MCGEER T. Passive dynamic biped catalogue [C]//In Chatila R and Hirzinger, editors, Proc, Experiment Robotics II: The 2nd International Symposium. Berlin: Springer-Verlag, 1992: 465 - 490.
- [4] GARCIA M, CHATTERJEE A, RUINA A, *et al.* The Simplest Walking Model: Stability, Complexity, and

Scaling[J]. ASME Journal of Biomechanical Engineering, 1998, 120(2): 281 - 288.

- [5] COLLINS S H, WISSE M, RUINA A. A 3-d passive dynamic walking robot with two legs and knees[J]. International Journal of Robotics Research, 2001, 20(7): 607 - 615.
- [6] GRIZZLE J W, GABRIEL A, PLESTAN F. Asymptotically Stable Walking for Biped Robots: Analysis via Systems with Impulse Effects[J]. IEEE Transactions on Automatic Control (S0018-9286), 2001, 46(1): 51 - 64.
- [7] CHEVALLEREAU C, ABBA G, Aoustin Y, *et al.* RABBIT: A Test bed for Advanced Control Theory [J]. IEEE Control Systems Magazine CSM-02-038 Revision (S0272 - 1708), 2003, 08(6): 57 - 79.

(编辑 杨波)

(上接第 1484 页)

良好的滤波性能,通过调整等效元件参量(可通过调整单负材料结构参量实现),可在一定范围内调整该滤波器的中心频率与带宽.这种结构可以使滤波器向微型化、集成化方向发展.

参考文献:

- [1] VESELAGO V G. The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ϵ and μ [J]. Sov Phys Usp, 1968, 10(14): 509 - 514.
- [2] ALÙ A, ENGHETA N. Pairing an epsilon-negative slab with a mu-negative slab: resonance, tunneling and transparency [J]. IEEE Trans Anten Propag, 2003, 51(10): 2558 - 2571.
- [3] AGRANOVICH V M, GARTSTEIN Y N. Spatial dispersion and negative refraction of light [J]. Physics-Usp, 2006, 49(10): 1029 - 1044.
- [4] JIANG H T, CHEN H, LI H Q, *et al.* Properties of one-dimensional photonic crystals containing single-negative

materials[J]. Phys Rev E, 2004, 69(6): 066607 - 066612.

- [5] LI J, ZHOU L, CHAN C T, *et al.* Photonic band gap from a stack of positive and negative index materials [J]. Phys Rev Letts, 2003, 90(8): 083901(1 - 4).
- [6] CALOZ C, ITOH T. Application of the transmission line theory of left-handed (LH) materials to the realization of a microstrip "LH line" [C]//IEEE Antennas and Propagation Society, AP - S International Symposium (Digest). San Antonio: IEEE, 2002: 412 - 415.
- [7] CALOZ C, ITOH T. Lossy transmission line metamaterials [J]. Microwave and Optical Technology Letters, 2004, 43(2): 112 - 114.
- [8] POZAR D M. Microwave Engineering[M]. Translated by ZHANG Z, ZHOU L, WU D, *et al.* 3rd Edition. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2006: 42 - 45.

(编辑 张红)