

河冰抗压强度概率特征值的自助法估计

周道成¹, 段忠东¹, 姚迪¹, 黄美兰², 汪振凯²

(1. 哈尔滨工业大学 土木工程学院, 哈尔滨 150090, daocheng_z@hit.edu.cn;

2. 黑龙江省公路勘察设计院, 哈尔滨 150080)

摘要: 为了解决在小样本条件下河冰抗压强度概率特征值不稳定性及其概率模型确定难的问题. 将增广样本统计方法——自助法应用于河冰抗压强度概率特征值的计算, 解决了小样本情况下其概率特征值的不稳定性问题, 从而确定其概率分布. 试验数据表明: 基于自助法计算得到了河冰抗压强度概率特征值优于常规方法和刀切法计算的结果. 自助法能改善小样本条件下其概率特征值的稳定性.

关键词: 河冰; 抗压强度; 概率特征值; 自助法

中图分类号: TV 312

文献标志码: A

文章编号: 0367-6234(2010)04-0541-05

Bootstrap – based estimation for probabilistic characteristic value of river ice compression strength

ZHOU Dao-cheng¹, DUAN Zhong-dong¹, YAO Di¹, HUANG Mei-lan², WANG Zhen-kai²

(1. School of Civil Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150090, China, daocheng_z@hit.edu.cn;

2. Highway Reconnaissance and Design Institute of Heilongjiang Province, Harbin 150080, China)

Abstract: Aimed at the problems that the probabilistic characteristic value of the river ice compression strength of small sample is unstable and it is difficult to obtain its distribution, the Bootstrap is applied to the determination of the characteristic value of river ice compression strength, then the stable characteristic value of the compression strength of small sample is obtained and its distribution is determined. The experimental data indicate that the probabilistic characteristic value calculated by Bootstrap is better than the results obtained by classical calculating method and Jackknife method, so Bootstrap can improve the stability of probabilistic characteristic value of the river ice compression strength of small sample.

Key words: river ice; compression strength; probabilistic characteristic value; bootstrap

河冰作用是高纬度地区河流上各种建筑物和构筑物设计必须考虑的重要荷载^[1]. 河冰基本力学性能参数受其晶体结构、组成成分等不确定性因素的影响^[2], 同时在试验过程中由于试件制作误差、测量误差等不确定性因素的存在, 河冰基本力学性能参数具有随机性. 研究河冰基本力学性能参数的概率特性, 对于认识河冰荷载作用机理和确定冰抗压强度取值原则具有重要的指导作用. 河冰抗压强度是河冰重要的基本力学性能参数. 冰抗压强度值一般通过试验获得, 由于试验昂

贵等因素的影响, 试验数据往往都是很有限制的, 即属于小样本情况. 采用随机变量的子样进行其概率特性分析, 对其子样的容量都有限制, 否则结果可信程度不高. 在小样本情况下, 如何有效地估计其概率特征值是一个重要问题^[3]. Efron^[4]提出了一种新的增广样本统计方法——自助法(Bootstrap), 为小样本条件下研究随机变量的概率特性提供了一种合理的方法, 在目前得到广泛的应用^[5-7]. 本文将自助法应用于河冰基本力学性能概率特性的分析, 解决由于数据少导致分析结果可信程度低的不足.

收稿日期: 2008-07-07.

作者简介: 周道成(1976—), 男, 讲师;

段忠东(1968—), 男, 教授, 博士生导师.

1 自助法基本原理

Bootstrap 法的基本思想就是用一个可重复抽样的分布 F 的估计结果来代替未知的不能重复抽样的分布 F . Bootstrap 法的前提是假设观测数据是总体的代表,并且是相互独立的,通过对观测数据的重新抽样,也即是 Bootstrap 子样,模拟对总体的抽样,获得对未知分布的估计. Bootstrap 法的主要步骤如下:(1) 已知样本总体中的一个观测样本序列为 $X = \{x_1, \dots, x_i, \dots, x_n\}$; (2) 确定所要考察的未知参数 θ ; (3) 给出 θ 的估计量计算公式 $\theta = S(X)$; (4) 随机对样本序列 X 进行重采样,得到 Bootstrap 子样序列 $X^* = \{x_1^*, \dots, x_i^*, \dots, x_n^*\}$; (5) 根据 θ 的估计量计算公式 $\theta = S(X)$ 计算 Bootstrap 子样 X^* 的参数 θ^* ; (6) 重复步骤(4)与步骤(5) m 次; (7) 根据得到的估计参数序列 $\{\theta_1^*, \dots, \theta_i^*, \dots, \theta_m^*\}$ 确定 θ 的统计分布,作为对样本总体参数分布的估计. 当 θ 的频数分布近似正态时,以其均数 $\bar{\theta}$ 作为其点估计,用正态原理可估计其可信区间;当 θ 的频数分布为偏态时,以其中位数作为其点估计,以上、下 2.5% 分位数作为其 95% 可信限^[8].

2 河冰抗压强度试验与结果

2.1 试件的制备

采冰和试件制备的时间为 1 月下旬,采冰的地点位于逊比拉河上游河段河中心处,水质纯净,结冰晶莹剔透,采样比较安全,且距离实验室较近(约 2 km),减少因为运输给冰块带来的内部结构破坏. 现场采样冰块尺寸约为 800 mm × 300 mm × 500 mm(长边方向为顺水流放向,500 mm 为冰厚方向). 根据国际水力学会研究协会(IAHR)建议,将其加工成标准试件,其尺寸为 10 cm × 10 cm × 25 cm 的长方体. 然后装入冰柜,按拟定的试验温度恒温 24 h,以备试验.

2.2 试验方法与结果

试验机为济南试金集团生产的 WE-300 液压式万能试验机,不具备自动调节应变率数的控制系统,如图 1 所示. 因此,根据试验机工作原理,采用试验机空载时压头运动速度,确定所需应变率的档位. 试验机带有球形铰支座,为消除单轴无侧限压缩试验中端部不平整或端部约束导致的试验误差,在试验装置中,试件受压底部安装该球形铰支座.

在试件上、下承压面上均垫以 3 mm 的橡皮垫板,见图 2. 一是提供端部压力均匀的可能性,

不致引起显著的切向应力;二是可以隔离冰块与铁制支座直接接触,尽量保证冰块恒定的温度.

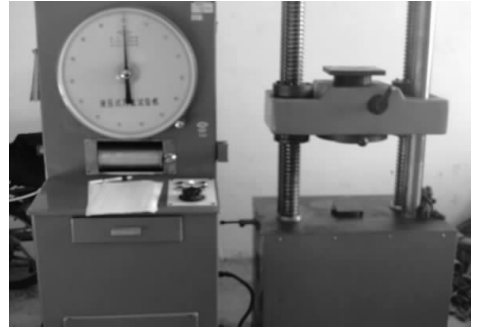


图 1 液压式万能试验机

应变速率是应变对时间的变化率. 应变速率对冰的抗压强度有明显影响. 在低应变速率的情况下,冰显著呈粘性性质;而在高应变速率下,冰呈现脆性性质. 在较大的应变速率范围内,冰是流动或塑性破坏. 一些研究表明:冰温度越低,冰晶空间格子中的原子变位越困难,晶格也越坚固,冰的弹性、脆性性能越突出;反之,温度越高,冰的塑性性能越显著. 因此应变速率和冰温是冰抗压强度的主要影响因素. 在本次试验中,取 $-5\text{ }^{\circ}\text{C}$ 、 $-5\text{ }^{\circ}\text{C}$ 和 $-30\text{ }^{\circ}\text{C}$ 三种温度,每种温度的冰试件按三种应变速率值:50 mm/min、5 mm/min 和 0.5 mm/min 进行试验,每组 10 个试件,因此试件数量为 $10 \times 3 \times 3 = 90$ 个.

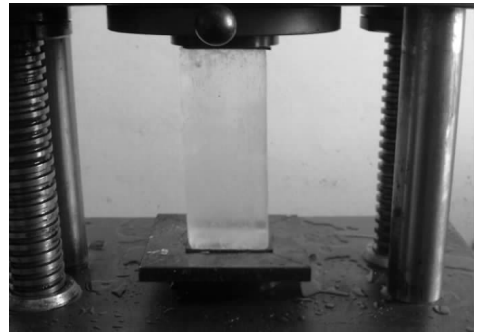


图 2 试件加载情况

对恒温 24 h 的试件,按图 2 所示的情况把试件放在试验机上,按标定的加载速度进行加载,记录试验机第一次卸载时对应的加载值,结合试件尺寸,可计算冰的抗压强度,根据 90 个试件,可得 90 个抗压强度,但是每一种温度每一种应变速率情况只有 10 个抗压强度,因此在给定温度和应变速率条件下,河冰的抗压强度的试验数据是一个小样本.

3 河冰抗压强度的概率特征值计算

在给定温度和应变速率条件下,河冰抗压强度的试验数据是一个小样本. 因此这里将前面的自助法应用于河冰抗压强度试验数据的均值和标准差计算.

3.1 基于自助法的河冰抗压强度概率特征值的计算

3.1.1 自助法的计算过程

以温度为 $-5\text{ }^{\circ}\text{C}$ 及加载速率为 0.5 mm/min 单轴无侧限压缩试件组为例. 按照自助法的抽样原则对实验数据进行重抽样, 抽取 $m = 200$ 组自助样本, 分别计算出各组样本的概率特征值, 也即是均值和标准差. 由各组样本计算的均值和标准差, 可获得它们的直方图和概率分布图, 分别如图3和图4所示. 采用 Kolmogorov - Smirnov 检验法对特征值的正态分布进行检验. 检验结果表明均值和标准差都服从正态分布, 因此可根据各组均值和标准差计算其平均值, 获得其估计值.

3.1.2 河冰抗压强度概率特征值的计算结果

根据上述基于自助法河冰抗压强度均值和标准

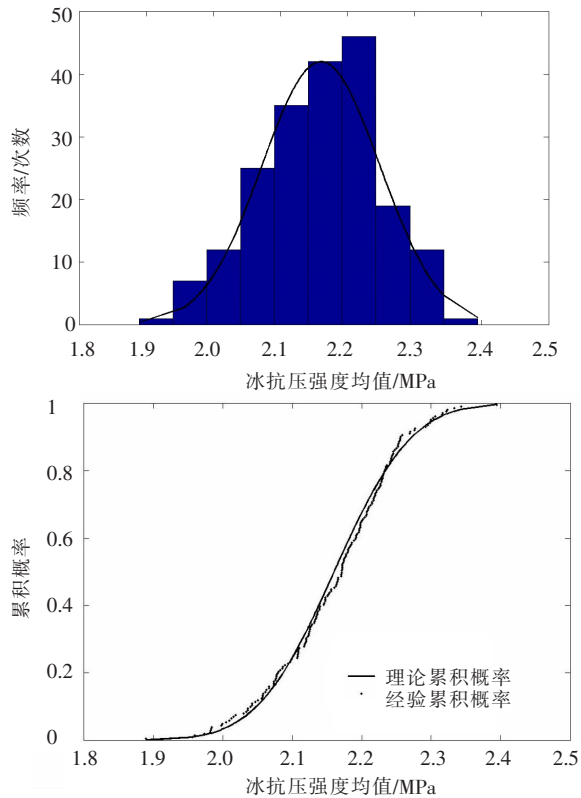


图3 河冰抗压强度均值概率特性的拟合优度检验 (0.5 mm/min 和 $-5\text{ }^{\circ}\text{C}$)

差的计算方法, 可计算得到不同温度和加载速率条件下河冰抗压强度的均值和标准值, 列入表1. 把温度考虑为随机影响因素, 可得到不同加载速率条件下河冰抗压强度的均值和标准值, 列入表2. 把加载速率考虑为随机影响因素, 可得到不同温度条件下河冰抗压强度的均值和标准值, 列入表3. 将温度和加载速率都考虑为随机影响因素可得到河冰抗压强度的均值和标准值, 列入表4. 由表1~3的结果可知, 由自助法可计算河冰抗压强度概率特征值在95%置信度下的置信区间, 使得概率特征参数的取值有明确的概率意义, 可以从概率保证率的角度为冰荷载的确定提供一定的参考; 而常规计算方法是无法实现这点的.

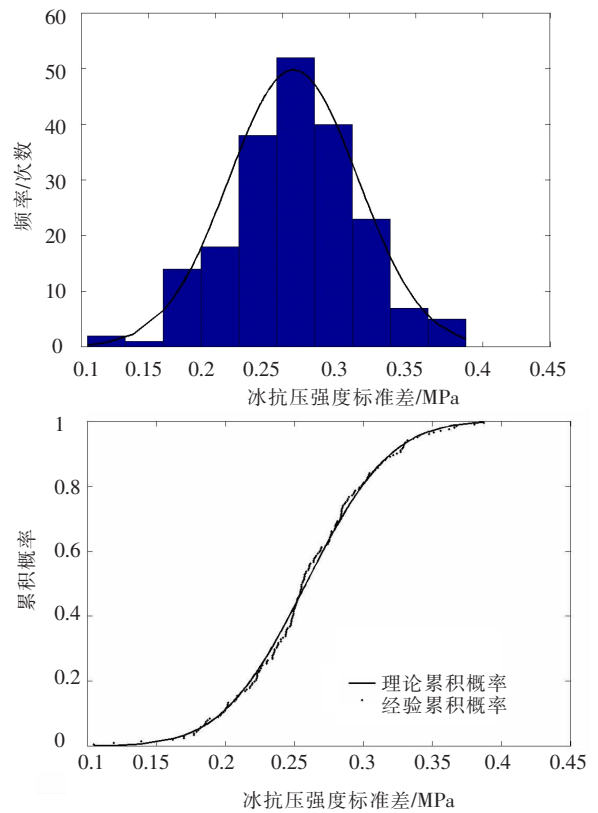


图4 河冰抗压强度标准差概率特性的拟合优度检验 (0.5 mm/min 和 $-5\text{ }^{\circ}\text{C}$)

表1 不同温度和加载速率条件下河冰抗压强度概率特征值

加载速率/ ($\text{mm} \cdot \text{min}^{-1}$)	试件 温度/ $^{\circ}\text{C}$	试验样本		自助法样本		均值95% 的置信区间	标准值95% 的置信区间
		μ_0	σ_0	μ_1	σ_1		
0.5	-5	2.157 7	0.276 3	2.159 2	0.257 6	(2.125 1, 2.193 4)	(0.237 8, 0.277 6)
	-15	2.060 7	0.429 5	2.072 3	0.402 5	(2.019 7, 2.124 9)	(0.377 7, 0.427 3)
	-30	2.028 3	0.604 9	2.021 9	0.558 4	(1.940 6, 2.103 2)	(0.517 2, 0.599 5)
5	-5	1.763 5	0.235 0	1.756 1	0.217 5	(1.725 5, 1.786 6)	(0.201 3, 0.233 8)
	-15	1.941 6	0.539 8	1.947 7	0.506 7	(1.884 1, 2.011 3)	(0.468 0, 0.545 4)
	-30	2.012 3	0.362 5	2.009 9	0.336 4	(1.961 3, 2.058 6)	(0.304 4, 0.368 3)
50	-5	2.460 3	0.385 3	2.470 3	0.347 0	(2.417 4, 2.523 1)	(0.297 5, 0.396 5)
	-15	2.454 5	0.503 1	2.474 9	0.470 7	(2.416 0, 2.533 8)	(0.429 2, 0.512 2)
	-30	3.031 6	0.676 8	2.994 8	0.639 1	(2.905 3, 3.084 3)	(0.588 3, 0.690 0)

MPa

表 2 不同加载速率条件下河冰抗压强度的概率特征值

加载速率/ (mm · min ⁻¹)	试验样本		自助法样本		均值 95% 的置信区间	标准值 95% 的置信区间
	μ_0	σ_0	μ_1	σ_1		
0.5	2.082 2	0.444 5	2.090 7	0.433 3	(2.059 9, 2.121 5)	(0.415 8, 0.450 8)
5	1.905 8	0.399 6	1.909 3	0.392 4	(1.882 9, 1.935 8)	(0.374 5, 0.410 3)
50	2.648 8	0.585 3	2.653 6	0.571 1	(2.615 3, 2.691 9)	(0.547 0, 0.595 3)

表 3 不同温度条件下河冰抗压强度的概率特征值

试件温度/ ℃	试验样本		自助法样本		均值 95% 的置信区间	标准值 95% 的置信区间
	μ_0	σ_0	μ_1	σ_1		
-5	2.127 2	0.413 7	2.127 7	0.400 6	(2.099 4, 2.156 0)	(0.375 8, 0.425 4)
-15	2.152 3	0.525 3	2.152 8	0.509 0	(2.119 6, 2.186 0)	(0.485 0, 0.533 0)
-30	2.357 4	0.729 2	2.369 6	0.708 8	(2.319 9, 2.419 4)	(0.679 6, 0.738 0)

表 4 河冰抗压强度的概率特征值

试验样本		自助法样本		均值 95% 的置信区间	标准值 95% 的置信区间
μ_0	σ_0	μ_1	σ_1		
2.212 3	0.574 2	2.208 5	0.567 7	-	-

3.2 对比分析

为比较自助法计算结果的合理性,将刀切法^[9-10](Jackknife)也应用于河冰抗压强度概率特征值的计算(限于篇幅,不列结果,仅作对比分析),并与常规方法进行比较.为了便于分析,定义相对误差比来检验其差异程度.其计算结果列入表 5~7.

$$err_{mi} = \frac{|m_0 - m_i|}{m_0}, (i = 1, 2);$$

$$err_{\sigma i} = \frac{|\sigma_0 - \sigma_i|}{\sigma_0}, (i = 1, 2).$$

式中: err_{mi} 和 $err_{\sigma i}$ 分别为均值和标准差的相对误差; m_0, m_1 和 m_2 分别为和常规方法、自助法和刀切法计算的均值, σ_0, σ_1 和 σ_2 分别为常规方法、自助法和刀切法计算的标准差.

表 5 不同温度和加载速率条件下特征值相对误差 %

加载速率/ (mm · min ⁻¹)	试件温度/℃	err_{m1}	$err_{\sigma 1}$	err_{m2}	$err_{\sigma 2}$
0.5	-5	0.07	6.77	0.00	0.22
	-15	0.56	6.29	0.00	0.12
	-30	0.32	7.69	0.00	0.18
5	-5	0.42	7.45	0.00	0.21
	-15	0.31	6.13	0.00	0.19
	-30	0.12	7.20	0.00	0.33
50	-5	0.41	9.94	0.00	1.12
	-15	0.83	6.44	0.00	0.30
	-30	1.21	5.57	0.00	0.21

表 6 不同加载速率条件下特征值相对误差 %

加载速率/ (mm · min ⁻¹)	err_{m1}	$err_{\sigma 1}$	err_{m2}	$err_{\sigma 2}$
0.5	0.41	2.52	0.00	0.02
5	0.18	1.80	0.00	0.03
50	0.18	2.43	0.00	0.02

表 7 不同温度条件下特征值相对误差 %

试件温度/℃	err_{m1}	$err_{\sigma 1}$	err_{m2}	$err_{\sigma 2}$
-5	0.02	3.17	0.00	0.07
-15	0.02	3.10	0.00	0.04
-30	0.52	2.80	0.00	0.03

表 8 不分条件下特征值相对误差 %

err_{m1}	$err_{\sigma 1}$	err_{m2}	$err_{\sigma 2}$
0.17	1.13	0.00	0.02

由表 5 可知,当样本容量为 10 时,自助法计算的河冰强度均值与原始试验样本直接计算的均值基本一致,其相对误差在 0.07% ~ 1.21%;但是自助法计算的河冰轴压强度标准差与原始试验样本直接计算的标准差有一定的差别,其相对误差在 5.57% ~ 9.94%. 由表 6 和表 7 可知,当样本容量为 30 时,自助法计算的河冰强度均值与原始试验样本直接计算的均值基本一致,其相对误差在 0.02% ~ 0.52%;但是自助法计算的河冰轴压强度标准差与原始试验样本直接计算的标准差有稍微的差别,其相对误差在 1.80% ~ 3.17%. 当样本容量为 90 时,河冰抗压强度的均值和标准值

的相对误差分别为 0.17% 和 1.13%。当样本容量为 10、30 和 90 时,刀切法计算的河冰强度均值与原始试验样本直接计算的河冰强度均值完全一致,标准差也基本一致,相对误差在 0.02% ~ 1.12%。因此从总体上可知,随着原始试验样本容量的增加,基于自助法的自助样本和原始样本计算的均值和标准值相对误差逐渐减小,这说明自助法在样本容量较小时有更好的效果,同时也表明当样本容量足够大时,其估计的概率特征值趋于稳定,与采用的计算方法无关,与概率理论预期结果是一致的;但刀切法计算的河冰强度概率特征值与原始试验样本直接计算的特征值基本一致,在样本容量小时,不能有效改善其计算效果。

4 结 论

1)由自助法可计算河冰抗压强度概率特征值在 95% 置信度下的置信区间,使得概率特征参数的取值有明确的概率意义,而常规计算方法是无法实现的,在小样本情况下,这是重要的。

2)样本容量对基于自助法计算的河冰轴压强度均值和原始试验样本直接计算的均值影响很小,其计算结果基本一致;但是样本容量对基于自助法计算的河冰轴压强度标准差和原始试验样本直接计算的标准差有一定影响,特别在样本容量较小时。

3)随着原始试验样本容量的增加,基于自助法的自助样本和原始样本计算的河冰抗压强度的均值和标准值相对误差逐渐减小,这说明自助法在样本容量较小时有更好的效果,同时也表明当样本容量足够大时,两种方法估计的概率特征值趋于一致;刀切法计算的河冰强度概率特征值与

原始试验样本直接计算的特征值基本一致。

参 考 文 献:

- [1] 中华人民共和国交通部标准. JTG D60 - 2004 公路桥涵设计通用规范[S]. 北京:人民交通出版社, 2004.
- [2] 陆钦年,汤爱平,钟南萍. 河冰对桥墩作用的冰荷载计算方法(I) - 河冰的力学性能试验[J]. 自然灾害学报, 2002, 11(2): 75 - 79.
- [3] 邹心遥,姚若河. 小子样统计理论及 IC 可靠性评估[J]. 控制与决策, 2008, 23(3): 241 - 250.
- [4] EFRON B. Computers and the theory of statistics: thinking the unthinkable[J]. SIAM Review, 1979, 4: 460 - 480.
- [5] 宋天莉,安维廉,王书宁. 三维射击精度的 Bayes 参数自助评估方法[J]. 宇航学报, 2008, 29(2): 601 - 604.
- [6] PHILIP J, KEVIN E. Uncertainties in extreme wave height estimates for hurricane - dominated regions [J]. Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering, 2007, 129: 300 - 305.
- [7] 刘攀,郭生练. 基于自助法的水文频率区间估计[J]. 武汉大学学报, 2007, 40(2): 55 - 64.
- [8] EFRON B. Better bootstrap confidence intervals [J]. J Amer Statist Assoc, 1987, 82: 171 - 200.
- [9] 梁士楚,王伯荪. 云贵鹅耳枥群落物种多样性及其刀切法估计[J]. 热带亚热带植物学报, 2001, 9(2): 129 - 135.
- [10] WU C B, SITTE R R. Variance estimation for the finite population distribution function with complete auxiliary information[J]. Canadian Journal of Statistics, 2001, 29(2): 289 - 307.

(编辑 赵丽莹)