DOI:10.11918/202412051

低复杂度一维线阵单快拍 DOA 估计算法

戚连刚[1,2],何加康[1,2],国 强[1,2],Duplii Stepan[1]

(1.哈尔滨工程大学 信息与通信工程学院,哈尔滨 150001;
2.先进船舶通信与信息技术工业和信息化部重点实验室(哈尔滨工程大学),哈尔滨 150001)

摘 要:为解决现有单快拍波达方向(direction of arrival,DOA)估计算法在高实时性应用中计算复杂度高且仅适用于均匀线阵的问题,提出一种适用于任意线阵的低复杂度单快拍 DOA 估计算法。该算法采用初始估计+优化迭代的两步策略。在初始估计阶段,基于扩展的自适应对角加载技术缓解快拍数不足导致的噪声特征值发散问题,并通过近似算法替代传统的矩阵分解以降低计算复杂度;同时,引入估计-相减策略,使加载矩阵在每次估计中仅针对单个信源,提升角度分辨率并匹配加载量以提高估计精度。在优化阶段,利用初始估计结果的高精度特性,在较小搜索范围内快速迭代,以期进一步提升估计性能并减少计算开销。仿真结果表明:在均匀线阵和非均匀线阵条件下,本文所提算法的 DOA 估计精度与角度分辨能力均优于5种对比算法;计算复杂度最低,且平均计算时间分别减少了69.60%与76.94%。所提算法在保证高精度 DOA 估计性能的同时,显著降低了计算复杂度,可为雷达、通信及水声测向等高实时性系统中的目标定位与参数估计提供有效技术支撑,具有较高的工程应用价值与推广意义。

关键词:波达方向估计;单快拍;低复杂度;自适应对角加载;实时性;一维线阵
中图分类号:TU375 **文献标志码**:A **文章编号**:0367-6234(2026)09-0009-08

Low-complexity single-snapshot DOA estimation algorithm for one-dimensional linear arrays

Qi Liangang[1,2], He Jiakang[1,2], Guo Qiang[1,2], Duplii Stepan[1]

(1. College of Information and Communication Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China;
2. Key Laboratory of Advanced Ship Communication and Information Technology (Harbin Engineering University), Ministry of Industry and Information Technology, Harbin 150001, China)

Abstract: To address the limitations of existing single-snapshot direction of arrival (DOA) estimation algorithms, namely the high computational complexity in real-time applications and the restriction to uniform linear arrays, this paper proposed a low-complexity single-snapshot DOA estimation algorithm applicable to arbitrary linear arrays. The algorithm adopted a two-stage strategy of initial estimation + optimization iteration. In the initial estimation stage, an extended adaptive diagonal loading technique was employed to mitigate the divergence problem of noise eigenvalues caused by insufficient snapshots, and approximate algorithms were introduced to replace traditional matrix decompositions to reduce computational complexity. At the same time, an estimation-subtraction strategy was incorporated to ensure that the loading matrix focused on a single source per estimation, thereby improving angular resolution and matching the loading level to enhance estimation accuracy. In the optimization stage, the high-accuracy characteristic of the initial estimation results was leveraged to perform fast iterations within a smaller search range, in order to further improve estimation performance and reduce computational cost. Simulation results demonstrate that under the conditions of uniform linear arrays and non-uniform linear arrays, the proposed algorithm outperforms the five benchmark algorithms in terms of DOA estimation accuracy and angular resolution; its computational complexity is the lowest, and the average computation time is reduced by 69.60% and 76.94%, respectively. While ensuring high-accuracy DOA estimation performance, the proposed algorithm significantly reduces the computational complexity, and can provide effective technical support for target localization and parameter estimation in highly real-time systems such as radar, communications, and underwater acoustic direction finding, holds high engineering application value and promotion significance.

Keywords: direction of arrival estimation; single-snapshot; low-complexity; adaptive diagonal loading; real-time performance; one-dimensional linear array

收稿日期:2024-12-18;**录用日期**:2025-03-04;**网络首发日期**:2025-11-25
网络首发地址:https://link.cnki.net/urlid/23.1235.T.20251125.0937.002
基金项目:国家自然科学基金(62101155);哈尔滨工程大学本科教育教学改革项目(JG2022B0805)
作者简介:戚连刚(1990—),男,副教授,博士生导师;国 强(1972—),男,教授,博士生导师
通信作者:何加康,hjk@hrbeu.edu.cn

自第二次世界大战以来,波达方向(direction of arrival,DOA)估计一直是阵列信号处理的核心研究领域,广泛应用于雷达、无线通信、声纳和定位系统等[1]。多年来,研究者相继提出了多种经典的DOA估计算法,包括基于波束形成的算法[2]、基于子空间的多重信号分类(multiple signal classification,MUSIC)算法[3]和旋转不变子空间(estimating signal parameter via rotational invariance techniques,ESPRIT)算法[4]等。然而,以上算法均仅适用于大快拍场景下,对于许多高实时性应用场景,如汽车雷达,可用于DOA估计的快拍数往往较少,甚至仅为单快拍,以上经典算法便不再适用。

为降低单快拍DOA估计计算复杂度,研究者提出了一系列基于离散傅里叶变换(discrete Fourier transform,DFT)的单快拍DOA估计算法。文献[5]提出了一种首先采用DFT进行初始DOA估计,再通过在初始估计结果左右区间划分一定数量的网格并对其进行搜索从而优化估计结果的算法,该算法可在一定程度上抑制了频谱泄露,提高了DOA估计精度。文献[6]提出了一种基于DFT迭代优化DOA估计结果的频谱插值算法。然而,文献[5-6]均存在仅适用于大规模阵列的问题。文献[7]提出了一种基于DFT的多目标DOA估计算法,其通过估计入射信号的幅度和相位信息重构时间域采样序列,达到了较高的估计精度,但仍存在计算复杂度较高的问题。文献[8]在文献[6]的基础上优化了迭代过程,降低了计算复杂度,但其仅适用于单一信号源的DOA估计。以上单快拍DOA估计算法均仅适用于均匀线阵,在为降低硬件复杂度使用稀疏阵列或因均匀线阵阵元损坏而导致的非均匀线阵场景下并不适用。

随着稀疏表示理论的发展,研究者提出了一系列基于压缩感知的DOA估计算法,如文献[9-15],这些算法在单快拍场景下展现出较高的估计精度。文献[9]提出了一种基于交替投影的无网格DOA估计算法,将无网格DOA估计推广到非均匀阵列,在少快拍及单快拍场景下获得较高的DOA估计精度。文献[10]针对单快拍无网格DOA估计中使用原子范数最小化带来的高计算复杂度问题,提出了一种在辅助先验信息下的正交原子范数最小化无网格DOA估计算法,获得了更高的原子自由度并在一定程度上降低了计算复杂度。文献[11]利用稀疏贝叶斯框架提出一种基于变分贝叶斯期望最大化的DOA估计离网格误差校准方法,其通过加权Sinc插值更新网格,获得了较高的估计精度。文献[12]提出了一种基于网格的单快拍信源数与DOA联合估计算法,该算法对在网格和离网格模型分别使用稀疏信号恢复和块稀疏恢复,但存在中、高信噪比场景下估计效果较好而不适用于低信噪比场景的问题。文献[13]通过梯度阈值迭代提出了一种基于非凸原子范数的DOA估计算法,该算法通过添加扰动以避免陷入鞍点,并具有较快的收敛速度以及DOA估计精度。然而,以上基于压缩感知算法的单快拍DOA估计算法仍然存在计算复杂度过高的问题,限制了其在高实时性场景下的应用。并且,上述算法中基于原子范数最小化的算法不适用非均匀线阵场景。

由上述分析可知,一维线阵单快拍DOA估计算法在均匀线阵下存在计算复杂度较高和部分算法仅适用于大规模阵列的问题。而对于非均匀线阵,同样面临计算复杂度高的挑战,且由于阵列流型矩阵不具备范德蒙德结构而使得基于DFT的算法和基于原子范数最小化的算法不适用。

针对以上问题,本文提出一种适用于任意一维线阵的低复杂度单快拍DOA估计算法。该算法采用初始估计+优化迭代策略,在初始估计阶段采用扩展的自适应对角加载技术,一方面解决因采样快拍数少导致的噪声特征值发散问题,另一方面使得对噪声子空间的求解可以使用低复杂度的近似计算算法,避免矩阵分解操作,从而极大地降低计算复杂度。同时,采用估计-相减策略以保证每次生成的加载矩阵仅含单个待测信源,不仅可以减少估计时相邻信源的干扰,也使得加载量的设置可以和待测信源相匹配。优化迭代阶段,由于初始估计阶段将DOA估计值限制在距离真实值较小的范围内,从而仅需较少的迭代次数即能达到较好的优化效果。最后,通过仿真实验验证所提算法的精度和复杂度。

1 阵列信号模型及对角加载理论

1.1 阵列信号模型

考虑有M个阵元的一维线性阵列,阵元位置设置为$\boldsymbol{r}=[r_1,r_2,\cdots,r_M]^{\mathrm{T}}$,其中$r_i(i=1,2,\cdots,M)$表示第$i$个阵元与参考阵元以接收信号半波长为单位的距离。设阵列左端第1个阵元作为参考阵元,对于均匀线阵,其阵元位置可以表示为$\boldsymbol{r}=[0,1,\cdots,M-1]^{\mathrm{T}}$,而对于阵元位置为$\boldsymbol{r}=[r_1,r_2,\cdots,r_M]^{\mathrm{T}}$的非均匀线阵,则可视作具有阵元位置$\boldsymbol{r}'=[0,1,\cdots,r_M-1]^{\mathrm{T}}$的虚拟均匀线阵保留相应阵元构造的阵列。举例五阵元的均匀线阵与非均匀线阵如图1所示。假设该阵列接收到K个远场窄带独立信源的入射信号,入射角为$\boldsymbol{\theta}=[\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_K]^{\mathrm{T}}$,则阵列接收到的单快拍信号$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{C}^{M\times 1}$可以表示为

$$\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{K} s_k \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r},\theta_k) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{s} + \boldsymbol{\eta} \tag{1}$$

其中：

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\theta}) = [\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r},\theta_1),\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r},\theta_2),\cdots,\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r},\theta_K)] \tag{2}$$

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r},\theta_k) = [\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi r_1 \sin\theta_k},\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi r_2 \sin\theta_k},\cdots,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi r_M \sin\theta_k}]^{\mathrm{T}}, k = 1,2,\cdots,K \tag{3}$$

式中：$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\theta}) \in \boldsymbol{C}^{M\times K}$ 为阵列流型矩阵，$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r},\theta_k) \in \boldsymbol{C}^{M\times 1}$ 为在角度为 θ_k 处的导向矢量；$\boldsymbol{s} = [s_1, s_2, \cdots, s_K]^{\mathrm{T}} \in \boldsymbol{C}^{M\times 1}$ 为源信号；$\boldsymbol{\eta} \in \boldsymbol{C}^{M\times 1}$ 为加性高斯白噪声，每个元素的方差为 σ_η^2。

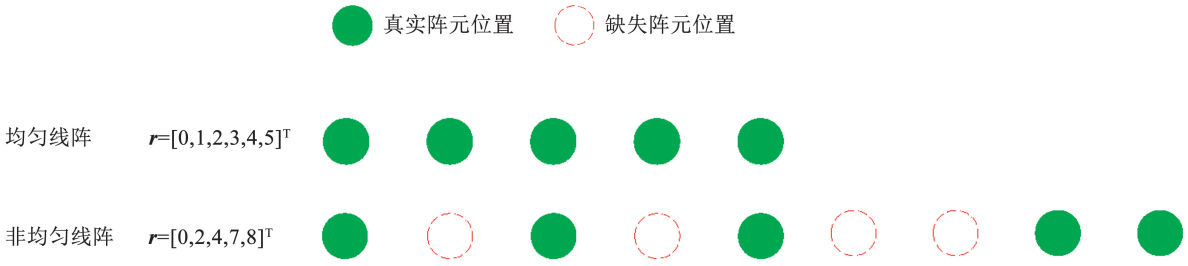


图 1　五阵元线阵阵列位置示意

Fig. 1　Schematic diagram of array element positions of a five-element linear array

1.2　对角加载理论

定义接收信号的理论协方差矩阵为

$$\boldsymbol{R} = E\{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{\mathrm{s}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} + \boldsymbol{E}_{\eta} \tag{4}$$

式中：$E\{\cdot\}$ 为数学期望，$\boldsymbol{E}_{\mathrm{s}} = E\{\boldsymbol{s}\boldsymbol{s}^{\mathrm{H}}\}$ 为信号子空间，$\boldsymbol{E}_{\eta}$ 为噪声子空间。

采样协方差矩阵为

$$\hat{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}} \tag{5}$$

实际应用中，通常用采样协方差矩阵近似表示理论协方差矩阵。然而，在单快拍场景下，由于快拍数较少，存在采样协方差矩阵秩不足以及噪声特征值发散的问题，从而导致 DOA 估计失败。因此，文献[16－17]提出了对角加载技术，即首先对采样协方差矩阵噪声特征值进行修正，进而使用修正后的采样协方差矩阵进行 DOA 估计的算法。对角加载技术因在处理包括信道估计和有限样本误差在内的各种误差方面的有效性而受到广泛应用。对角加载矩阵公式为

$$\boldsymbol{R}_{\mathrm{DL}} = \hat{\boldsymbol{R}} + F\boldsymbol{I}_M \tag{6}$$

式中：$\boldsymbol{I}_M$ 为 M 阶单位矩阵，F 为加载量。设采样协方差矩阵 $\hat{\boldsymbol{R}}$ 的特征值为 $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_M]$，对角加载矩阵 $\boldsymbol{R}_{\mathrm{DL}}$ 的特征值为 $\boldsymbol{\lambda}' = [\lambda'_1, \lambda'_2, \cdots, \lambda'_M]$，特征值由大到小排列。

由式(6)可知，二者特征值满足以下关系：

$$\lambda'_i = \lambda_i + F,\ i = 1,2,\cdots,M \tag{7}$$

式(5)还可以表示为

$$\hat{\boldsymbol{R}} = \sum_{m=1}^{M} \lambda_m \boldsymbol{e}_m \boldsymbol{e}_m^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{E}_{\mathrm{s}}\boldsymbol{D}_{\mathrm{s}}\boldsymbol{E}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{H}} + \boldsymbol{E}_{\eta}\boldsymbol{D}_{\eta}\boldsymbol{E}_{\eta}^{\mathrm{H}} \tag{8}$$

式中：$\boldsymbol{e}_m (m = 1,2,\cdots,M)$ 为 $\hat{\boldsymbol{R}}$ 的特征向量；λ_m 为 $\boldsymbol{e}_m$ 对应的特征值；$\boldsymbol{E}_{\mathrm{s}} = [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_K]$、$\boldsymbol{E}_{\eta} = [\boldsymbol{e}_{K+1}, \boldsymbol{e}_{K+2}, \cdots, \boldsymbol{e}_M]$ 分别为信号子空间和噪声子空间；$\boldsymbol{D}_{\mathrm{s}} = \mathrm{diag}([\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_K])$、$\boldsymbol{D}_{\eta} = \mathrm{diag}([\lambda_{K+1}, \lambda_{K+2}, \cdots, \lambda_M])$，$\mathrm{diag}(\cdot)$ 为对角矩阵。

设 θ_k 表示某一信源的期望信号入射角度，$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r},\theta_k)$ 表示其对应的导向矢量，则有

$$\hat{\boldsymbol{R}}^{-1}\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r},\theta_k) = \sum_{m=1}^{M} \frac{\boldsymbol{e}_m^{\mathrm{H}}\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r},\theta_k)}{\lambda_m}\boldsymbol{e}_m \tag{9}$$

由式(9)可见，当 λ_m 是一个相对较小的值时，$\hat{\boldsymbol{R}}^{-1}\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r},\theta_k)$ 会较大，表现为较大的旁瓣误差，从而导致对期望方向的 DOA 估计错误。结合式(6)，可得

$$\boldsymbol{R}_{\mathrm{DL}}^{-1}\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r},\theta_k) = (\hat{\boldsymbol{R}} + F\boldsymbol{I}_M)^{-1}\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r},\theta_k) = \sum_{m=1}^{M} \frac{\boldsymbol{e}_m^{\mathrm{H}}\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r},\theta_k)}{\lambda_m + F}\boldsymbol{e}_m \tag{10}$$

由式(10)可见，通过选择合适的加载量 F 可以使得噪声特征值被限定在 F 的附近，从而减少噪声特征值的发散水平，起到平滑噪声的作用。设 λ' 中特征值为从大到小排列，此时值之间的关系满足：

$$\lambda'_1 \geqslant \lambda'_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda'_K > \lambda'_{K+1} \approx \lambda'_{K+2} \approx \cdots \approx \lambda'_M \approx F \tag{11}$$

2　DOA 估计算法

2.1　初始估计

由 1.2 节可知，选取合适的加载量对增强 DOA 估计的鲁棒性至关重要。对加载量的确定，目前采用的算法主要为结合特征值算法[16]和经验值法[18]。然而，经验值法存在估计精度低的问题，结合特征值算法需要进行特征值求解，从而导致计算量较高。采样快拍数较少导致噪声特征值发散以及信号特征值大小可能相差较大，使用单一加载量进行均匀加载只对信噪比高的信源匹配，而对其他信

源估计效果较差。为此,本文采用自适应迭代加载技术和估计–相减策略进行初始估计,通过从接收到的信号中移除已估计的相较于待估计信源特征值较大的信源,确保当前待估计信源在剩余信号中对应的特征值最大,从而提高初始估计精度和邻近信号分辨能力。

设当前待估计的第 $i(i>1)$ 次迭代第 k 个信源使用的信号为

$$\boldsymbol{x}_k^i = \boldsymbol{x} - \sum_{n=1,n\neq k}^{K} \hat{s}_n^{i-1}\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r},\hat{\theta}_n^{i-1}),k=1,\cdots,K \tag{12}$$

式中 $\hat{\theta}_n^{i-1}$、$\hat{s}_n^{i-1}$、$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r},\hat{\theta}_n^{i-1})$ 分别为对第 $i-1$ 次迭代第 n 个信源估计获得的 DOA 估计值、幅值、导向矢量。

在第 1 次迭代时,由于第 k 个信源之后的信源的幅值以及导向矢量未知,则有

$$\boldsymbol{x}_k^1 = \boldsymbol{x} - \sum_{n=1}^{k-1} \hat{s}_n^1\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r},\hat{\theta}_n^1) \tag{13}$$

此时,$\boldsymbol{x}_k^i$ 的采样协方差矩阵为

$$\hat{\boldsymbol{R}}_k^i = \boldsymbol{x}_k^i(\boldsymbol{x}_k^i)^{\mathrm{H}} \tag{14}$$

第 1 次迭代时,依据信号能量进行设置加载量;在第 1 次迭代获得各信源 DOA 估计结果后,依据期望信号方向的算法设置加载量,即第 i 次迭代第 k 个信源测量的加载量设置为

$$F_k^i = \begin{cases} (\boldsymbol{x}_k^i)^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x}_k^i, & i=1 \\ \dfrac{1}{K}\|\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{H}}\hat{\boldsymbol{R}}_k^i\|_2^2, & i>1 \end{cases} \tag{15}$$

式中 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r},\hat{\theta}_n^{i-1})/\|\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r},\hat{\theta}_n^{i-1})\|_2$ 为期望方向的归一化导向矢量。

由式(6)、式(14)和式(15)可知,此时对第 i 次迭代第 k 个信源测量的对角加载矩阵为

$$\tilde{\boldsymbol{R}}_k^i = \hat{\boldsymbol{R}}_k^i + F_k^i\boldsymbol{I}_M \tag{16}$$

由式(12)和式(13)可知,因为其余信号在估计–相减策略下已被减去,当前对角加载矩阵主要包含信号为第 k 个信源的信号。设 $\tilde{\boldsymbol{R}}_k^i$ 的特征值为 $\boldsymbol{u}_k^i=[u_1,u_2,\cdots,u_M]^{\mathrm{T}}$,$u_i(1\leqslant i\leqslant M)$ 对应特征向量为 $\boldsymbol{v}_i$,此时特征值间满足以下关系。

$$u_1 \gg u_2 \approx u_3 \approx \cdots \approx u_M \approx F_k^i \tag{17}$$

由式(8)和式(16)可得

$$\left(\frac{\hat{\boldsymbol{R}}_k^i}{F_k^i}\right)^{-q} = \left(\frac{F_k^i}{u_1}\right)^q\tilde{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{s}}\tilde{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{H}} + \tilde{\boldsymbol{E}}_{\eta}\mathrm{diag}\left(\left(\frac{F_k^i}{u_2}\right)^q,\left(\frac{F_k^i}{u_3}\right)^q,\cdots,\left(\frac{F_k^i}{u_M}\right)^q\right)\tilde{\boldsymbol{E}}_{\eta}^{\mathrm{H}} \tag{18}$$

式中,$\tilde{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{s}}=v_1$、$\tilde{\boldsymbol{E}}_{\eta}=[v_2,v_3,\cdots,v_M]$ 分别为 $\tilde{\boldsymbol{R}}_k^i$ 的信号子空间和噪声子空间。

由式(17)和式(18)可知,设置 q 为足够大的整数,可得

$$\left(\frac{\tilde{\boldsymbol{R}}_k^i}{F_k^i}\right)^{-q} \approx \tilde{\boldsymbol{E}}_{\eta}\tilde{\boldsymbol{E}}_{\eta}^{\mathrm{H}} \tag{19}$$

式中 q 在实际测试中验证设置为 10 即可达到近似效果。

由 MUSIC 算法在第 i 次迭代对第 k 个信源 DOA 估计可得

$$\hat{\theta}_k^i = \underset{\boldsymbol{\theta}\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}{\mathrm{argmax}} \frac{1}{\boldsymbol{a}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\theta})\tilde{\boldsymbol{E}}_{\eta}\tilde{\boldsymbol{E}}_{\eta}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\theta})} \tag{20}$$

由式(19)和式(20)可得

$$\hat{\theta}_k^i \approx \underset{\boldsymbol{\theta}\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}{\mathrm{argmax}} \frac{1}{\boldsymbol{a}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\theta})\left(\frac{\tilde{\boldsymbol{R}}_k^i}{F_k^i}\right)^{-q}\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\theta})} \tag{21}$$

相较于式(20),本文采用式(21)的算法,避免了通过矩阵分解对噪声子空间的求解,从而极大地降低了计算复杂度。

对于 $\hat{s}_k^i$,可以通过最小化式(22)求解。

$$L_k^i(\hat{\theta}_k^i,\hat{s}_k^i) = (\boldsymbol{x}_k^i - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r},\hat{\theta}_n^i)\hat{s}_k^i)^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{x}_k^i - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r},\hat{\theta}_n^i)\hat{s}_k^i) \tag{22}$$

对于由式(21)求得的固定的 $\hat{\theta}_k^i$,求 $L_k^i(\hat{\theta}_k^i,\hat{s}_k^i)$ 对 $\hat{s}_k^i$ 的偏导,并令偏导值为 0,可得

$$\hat{s}_k^i = \frac{\boldsymbol{a}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{r},\hat{\theta}_n^i)\boldsymbol{x}_k^i}{M} \tag{23}$$

设最大迭代次数为 Q_1,允许估计误差为 ε_1,迭代次数达到 Q_1 或满足式(24)时退出迭代。

$$\|\hat{\boldsymbol{\theta}}^i - \hat{\boldsymbol{\theta}}^{i-1}\|_2 \leqslant \varepsilon_1 \tag{24}$$

输出基于迭代加载算法下的初始 DOA 估计结果。

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^{\mathrm{ini}} = [\hat{\theta}_1^{\mathrm{ini}},\hat{\theta}_2^{\mathrm{ini}},\cdots,\hat{\theta}_K^{\mathrm{ini}}] \tag{25}$$

初始估计阶段采用式(15)和式(16)表示的自适应对角加载技术和式(12)及式(13)表示的估计–相减策略确保加载量的设置与待测信源相匹配,在抑制特征值发散的同时减少对应更大特征值的信源对当前待测信源的干扰。由式(12)、式(13)、式(15)和式(16)可知,在此迭代次数下,当前待测信源信号的对角加载矩阵不仅与其本身上一次迭代的 DOA 估计结果有关,还受其他信源在上一次迭代下的 DOA 估计结果影响,这种其他信源 DOA 估计结果变化产生的“扰动”,有助于避免当前待测信源信号 DOA 估计结果因陷入局部最优而导致估计精度的降低。且由式(18)、式(19)和式(21)代表的本文改进的低复杂度 MUSIC 算法在进行谱峰搜索时,可缩减网格划分至上一次迭代 DOA 估计角度值更小范围,即细化网格,在降低计算复杂度的同时,也保证了一定范围的角度搜索,从而避免陷入局部最优,确保初始估计结果的准确性。

2.2　优化估计

由于初始估计已经获得了较为精确的 DOA 估计结果，优化阶段可在较小范围内调整 DOA 估计值进行优化，且仅需较少的迭代次数。设优化估计阶段第 $t(t\geqslant 1)$ 次迭代对信源的幅值估计为

$$\tilde{s}^t=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{r},\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{t-1})\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{t-1}))^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{r},\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{t-1})\boldsymbol{x} \tag{26}$$

式中 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{t-1})$ 为第 $t-1$ 次迭代 DOA 估计结果构成的阵列流型矩阵，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{t-1})=[\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r},\tilde{\theta}_1^{t-1}),\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r},\tilde{\theta}_2^{t-1}),\cdots,\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r},\tilde{\theta}_K^{t-1})]$，且 $\tilde{\boldsymbol{\theta}}^0=\hat{\boldsymbol{\theta}}^{\mathrm{ini}}$。

设有剩余量

$$\boldsymbol{p}^t=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{t-1})\tilde{s}^t-\boldsymbol{x} \tag{27}$$

可令代价函数为

$$\Gamma=\|\boldsymbol{p}^t\|_2^2=(\boldsymbol{p}^t)^{\mathrm{H}}\boldsymbol{p}^t \tag{28}$$

则由代价函数对 $\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{t-1}$ 求偏导，可得：

$$\nabla_{\tilde{\theta}^{t-1}}\Gamma=\frac{\partial(\Gamma)}{\partial\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{t-1}}=2\mathrm{real}\left((\boldsymbol{p}^t)^{\mathrm{H}}\frac{\partial(\boldsymbol{p}^t)}{\partial\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{t-1}}\right) \tag{29}$$

$$\frac{\partial(\boldsymbol{p}^t)}{\partial\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{t-1}}=\frac{\partial(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{t-1}))}{\partial\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{t-1}}\mathrm{diag}(\tilde{s}^t)+\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},\tilde{\boldsymbol{\theta}}^t)\frac{\partial(\tilde{s}^t)}{\partial\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{t-1}} \tag{30}$$

式中 real(·)表示取实部运算。

由 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{t-1})\tilde{s}^t-\boldsymbol{x}=0$，对其左右求导可得

$$\frac{\partial(\tilde{s}^t)}{\partial\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{t-1}}=-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{t-1})(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{r},\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{t-1})\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{t-1}))^{-1}\times\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{r},\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{t-1})\frac{\partial(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{t-1}))}{\partial\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{t-1}}\mathrm{diag}(\tilde{s}^t) \tag{31}$$

设有 $\gamma=(2\pi/M)/100$，则优化估计阶段第 $j(j\geqslant 1)$ 次迭代对信源的 DOA 估计结果为

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}}^t=\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{t-1}-\gamma\frac{\nabla_{\tilde{\theta}^{t-1}}\Gamma}{\|\nabla_{\tilde{\theta}^{t-1}}\Gamma\|_2} \tag{32}$$

设最大迭代次数为 Q_2，允许估计误差为 ε_2，当迭代次数达到 Q_2 或满足式(33)时退出迭代。

$$\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}^t-\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{t-1}\|_2\leqslant\varepsilon_2 \tag{33}$$

综上，低复杂度单快拍 DOA 估计算法流程如下：

输入：阵列接收信号 $\boldsymbol{x}$，信源数 K，阵元位置 $\boldsymbol{r}$，最大迭代次数 Q_1、Q_2，收敛阈值 ε_1 和 ε_2。

输出：DOA 估计结果 $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$。

Step1　初始化迭代次数 $i=1$，第 1 次迭代，由式(13)得到 $\boldsymbol{x}_k^1$，由式(14) ~ (16)构造对角加载矩阵，由式(21)更新 DOA 估计值。

Step2　更新迭代次数 $i=i+1$，由式(12)得到 $\boldsymbol{x}_k^i$，由式(14) ~ (16)构造对角加载矩阵，由式(21)更新 DOA 估计值。

Step3　当达到最大迭代次数 Q_1 或满足式(24)的收敛条件时，退出迭代，获得初始 DOA 估计结果，进入 Step4，否则重复 Step2。

Step4　初始化迭代次数 $t=1$，由式(26)得到本次迭代信源幅值估计 $\tilde{s}^t$，由式(32)得到信源 DOA 估计值 $\tilde{\boldsymbol{\theta}}^t$。

Step5　更新迭代次数 $t=t+1$，由式(26)得到本次迭代信源幅值估计 $\tilde{s}^t$，由式(32)得到信源 DOA 估计值 $\tilde{\boldsymbol{\theta}}^t$。

Step6　当达到最大迭代次数 Q_2 或满足式(33)的收敛条件时，输出最终 DOA 估计值，否则重复 Step5。

结束

3　仿真分析

通过仿真实验验证本文所提算法的测向精度、邻近信号分辨能力以及计算复杂度。实验设置阵元单位间距为接收信号的半波长，对均匀线阵和非均匀线阵两种阵列类型均进行了仿真实验，其中非均匀阵列阵元位置采用随机选取的算法，以验证本文所提算法对非均匀阵列的适用性。每次仿真实验选用不同的非均匀阵列构型，设 (m,l) 表示从 m 个阵元的均匀线阵中随机选取 l 个阵元作为非均匀阵真实阵元位置。采用均方误差(mean square error，E_{ms})作为性能衡量指标，其公式为

$$E_{\mathrm{ms}}=\frac{1}{KL}\sum_{l=1}^{L}\sum_{k=1}^{K}(\hat{\theta}_k^{(l)}-\theta_k^{(l)})^2 \tag{34}$$

式中 $\hat{\theta}_k^{(l)}$、$\theta_k^{(l)}$ 分别为第 l 次实验中第 k 个信号的 DOA 估计值、真实值。

将本文所提算法与 AP-Gridless[9]、SSANM[11]、DPL1[14]、JSBL[15] 以及 Root-SBL[19] 进行对比，并采用文献[20]中提出的克拉美罗界(CRB)作为比较的基准。在所有仿真中，接收信号均为单快拍信号，且所有结果均是在 500 次蒙特卡罗实验的基础上计算得出的。

3.1　DOA 估计精度

通过比较本文所提算法与各对比算法在不同信噪比下的均方误差性能，评估所提算法的测向精度。设置有 3 个信源从角度 $\boldsymbol{\theta}=[-8.6°,0.3°,30.2°]$ 入射至阵元数为 20 的均匀线阵。图 2 为均匀线阵下均方误差随信噪比(SNR)变化曲线。

由图 2 可以看出：在低于 0 dB 时，本文算法的均方误差性能与对比算法相近；随着信噪比的提升，各算法的均方误差均明显下降，其中，本文算法优于 5 种对比算法，且随着信噪比的提升，其更接近于 CRB。说明均匀线阵下，相较于各对比算法，本文算法具有更高的测向精度。

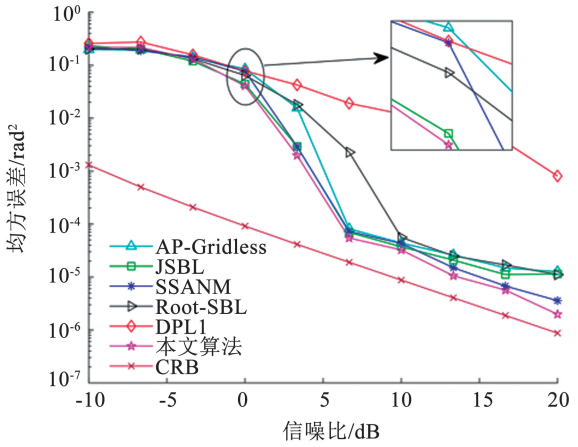


图 2 均匀线阵下均方误差随信噪比变化曲线

Fig. 2 Variation curves of mean square error with signal-to-noise ratio under uniform linear array

设置有 3 个信源从角度 $\boldsymbol{\theta}=[-2.6°,3.8°,75.2°]$ 入射至$(m,l)=(40,20)$的非均匀线阵。图 3 为信噪比在 −10 ~ 20 dB 之间变化时,非均匀线阵下均方误差随信噪比的变化曲线。由图 3 可知:在非均匀线阵下,信噪比低于 0 dB 时,本文算法与各对比算法的均方误差相近;而在信噪比大于 0 dB 时,随信噪比的提升,本文算法的均方误差明显低于其他对比算法,具有更高的测向精度。对比图 2 和图 3 发现,存在因不同阵列构型所产生的相同算法收敛速度不同的现象。

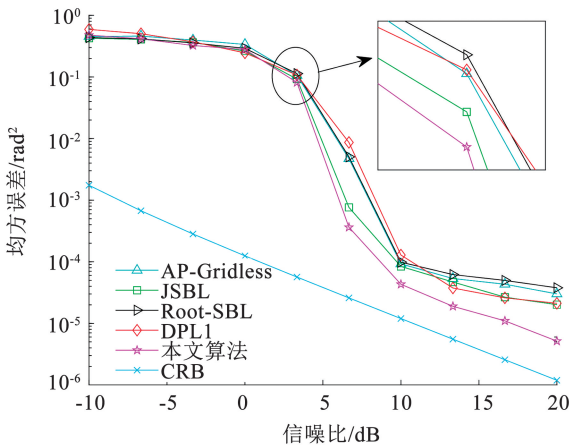


图 3 非均匀线阵下均方误差随信噪比变化曲线

Fig. 3 Variation curves of mean square error with signal-to-noise ratio under non-uniform linear array

3.2 邻近信源分辨能力

为评估 DOA 估计算法对邻近信源的分辨能力,引入分辨成功概率作为对邻近信源分辨能力的评价指标。假定有 5 个等幅信源,信噪比为 10 dB,从角度$(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4,\theta_5)=(-2\Delta\theta,-\Delta\theta,0,\Delta\theta,2\Delta\theta)$入射至阵列。其中 $\Delta\theta$ 变化范围为 0.5° ~ 8.0°。当 DOA 估计结果满足$|\hat{\theta}_i-\theta_i|<(\Delta\theta/2),i\in\{1,2,3,4,5\}$时,认为该次实验邻近信号被成功分辨。

图 4 为在阵元数为 30 的均匀线阵下,不同算法的分辨成功概率随角度间隔变化曲线。由图 4 可知,本文算法随角度间隔的增加始终比其他对比算法具有更高的分辨成功概率,且最先达到 100%。说明本文所提算法在均匀线阵下具有良好的邻近信源分辨能力。

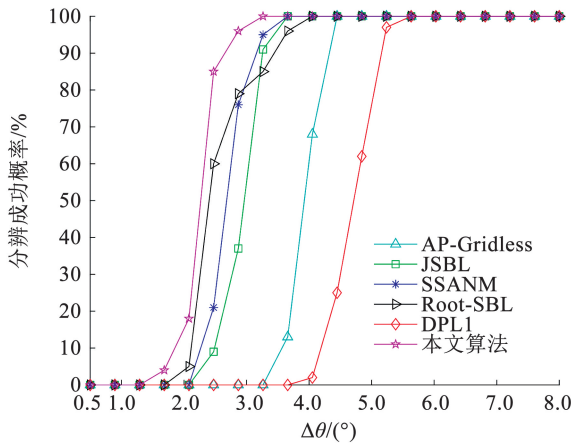


图 4 均匀线阵下不同算法分辨成功概率对比

Fig. 4 Comparison of resolution among different algorithms under uniform linear array

图 5 为阵元设置为$(m,l)=(60,30)$的非均匀线阵下,不同算法的分辨成功概率随角度间隔变化曲线。由图 5 可知,角度间隔在 0.5° ~ 3.0°之间时,随着角度间隔的增加,本文算法的分辨成功概率迅速提升,并接近于 100%,且始终优于其他对比算法,说明本文算法在非均匀线阵下具有良好的邻近信源分辨能力。

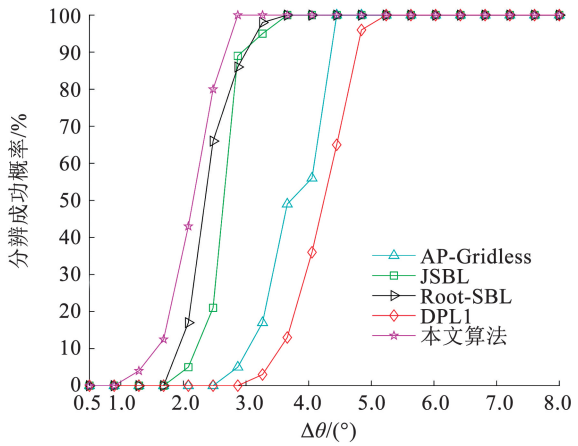


图 5 非均匀线阵下不同算法分辨成功概率对比

Fig. 5 Comparison of resolution among different algorithms under non-uniform linear array

3.3 计算复杂度

各种算法的计算复杂度见表 1。其中,P_1 ~ P_5 分别表示各对比算法的迭代次数,P_6 表示所提算法初始估计阶段的迭代次数,P_7 表示所提算法优化阶

段迭代次数，Q_1、Q_2 分别表示 JSBL、Root-SBL 的划分网格数量，Q_3 表示本文算法初始估计阶段网格划分数量，$O(\cdot)$表示计算复杂度。

由表 1 可以看出：SSANM 存在迭代计算复杂度高且迭代次数多的问题；相较于 SSANM，AP-Gridless 迭代次数较少，但也存在单次迭代计算复杂度高的问题；JSBL 与 Root-SBL 作为基于稀疏贝叶斯学习的算法，均存在网格划分数量大导致的单次迭代计算复杂度高的问题；DPL1 从初始估计至收敛所需迭代次数多；本文算法由于初始估计阶段采用了优化的迭代加载计算，避免了特征分解操作而具有较低的计算复杂度，且估计-相减策略使初始估计可以在 20 ~ 30 次迭代内收敛。由于初始估计精度较高，经测试优化估计阶段在 10 ~ 25 次迭代内即可收敛。本文算法单次迭代计算量远低于各对比算法，且迭代次数(数百次)更少。

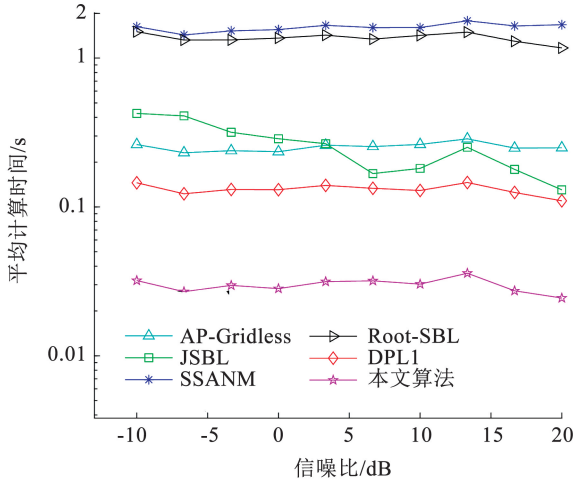
表 1　各种算法的计算复杂度

Tab. 1　Computational complexity of various algorithms

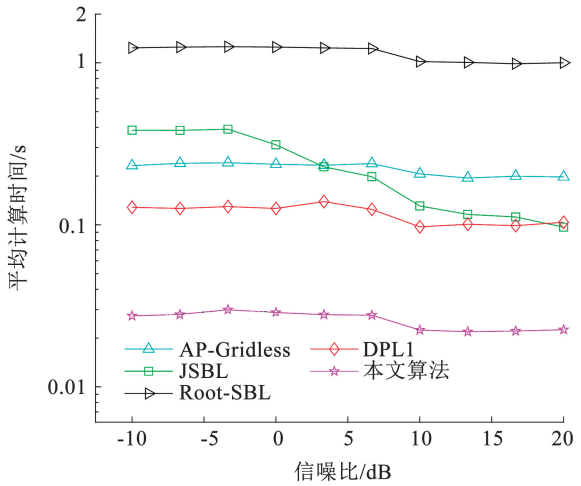
算法	计算复杂度
AP-Gridless	$O(P_1[(M+1)^3+M^3])$
SSANM	$O(P_2(M+1)^3)$
DPL1	$O(M^3+P_3K^3)$
JSBL	$O(P_4(M^2Q_1+2MQ_1))$
Root-SBL	$O(P_5MQ_2^2)$
本文算法	$O(P_6Q_3K+P_7K^3)$

为验证本文算法的计算复杂度，设有 3 个信源入射至阵元数为 20 的均匀线阵和$(m,l)=(40,20)$的非均匀线阵，入射信源角度在每次实验时随机生成。仿真程序在具有 Intel(R) Core(TM) 2.5 GHz i9-12900H CPU 和 32 GB RAM 硬件条件的计算机平台上采用 MATLAB R2022A 运行。

图 6 为不同算法平均计算时间对比。由图 6 可知：对于任意一维线阵，在各信噪比下，本文算法运行时间均显著低于各对比算法，验证了本文算法计算复杂度低的特点；DPL1 在均匀线阵和非均匀线阵下相较于其他各对比算法均具有最低的平均计算时间。进一步地，将本文算法与 DPL1 的平均计算时间进行了对比，结果见表 2。由图 6 及表 2 可知，在均匀线阵和非均匀线阵下，本文算法的平均计算时间比 DPL1 分别降低了 69.60% 和 76.94%，验证了本文算法计算复杂度低的特点。



(a) 均匀线阵下不同算法平均计算时间对比



(b) 非均匀线阵下不同算法平均计算时间对比

图 6　不同算法平均计算时间对比

Fig. 6　Comparison of average computation time among different algorithms

表 2　本文算法与 DPL1 平均计算时间对比

Tab. 2　Comparison of average computation time between proposed algorithm and DPL1

信噪比/dB	均匀线阵			非均匀线阵		
	t_1/s	t_2/s	ρ/%	t_1/s	t_2/s	ρ/%
-10.0	0.109 97	0.033 43	69.60	0.128 31	0.027 42	78.63
-6.6	0.125 12	0.027 33	78.16	0.126 25	0.028 02	77.82
-3.3	0.145 97	0.035 86	75.43	0.128 96	0.029 89	76.82
0	0.129 03	0.030 29	76.52	0.126 22	0.028 76	77.21
3.3	0.133 42	0.031 89	76.10	0.139 15	0.027 90	79.95
10.0	0.130 58	0.028 26	78.36	0.097 22	0.022 42	76.94
13.3	0.131 07	0.029 71	77.33	0.100 87	0.021 89	78.29
16.6	0.122 58	0.026 95	78.01	0.098 89	0.022 10	77.65
20.0	0.145 33	0.032 02	77.97	0.103 72	0.022 53	78.28

注：t_1、t_2 分别表示 DPL1、本文算法的平均计算时间，ρ 表示本文算法相较于 DPL1 的平均计算时间降低比例。

4 结 论

1)本文提出了估计-相减策略,通过动态适配待估计信号的迭代加载量,在提升估计精度的同时增强了邻近信源分辨能力;进一步结合扩展的自适应对角加载技术,避免了复杂的矩阵分解操作,从本质上降低了计算复杂度。

2)基于初始估计阶段已获得的高精度 DOA 结果,优化估计阶段仅需在小范围内迭代修正,大幅减少了迭代次数。此设计在保证估计精度的同时,进一步提升了算法的实时性。

3)仿真结果表明,相较于对比算法,本文算法在均匀线阵和非均匀线阵下的平均计算时间分别降低了 69.60% 和 76.94%;同时,在估计精度和邻近信源分辨能力方面表现更优,验证了所提策略的有效性和实用性。

参考文献

[1] Krim H, Viberg M. Two decades of array signal processing research [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 1996, 13(4):67. DOI: 10.1109/79.526899

[2] Capon J. High-resolution frequency-wavenumber spectrum analysis [J]. Proceedings of the IEEE, 1969, 57(8): 1408. DOI:10.1109/PROC.1969.7278

[3] Gao Feifei, Nallanathan A, Wang Yide. Improved MUSIC under the coexistence of both circular and noncircular sources [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2008, 56(7): 3033. DOI: 10.1109/TSP.2007.916123

[4] Gao Feifei, Gershman A B. A generalized ESPRIT approach to direction-of-arrival estimation [J]. IEEE Signal Processing Letters, 2005, 12(3): 254. DOI: 10.1109/LSP.2004.842276

[5] Cao Renzheng, Liu Binyue, Gao Feifei, et al. A low-complex one-snapshot DOA estimation algorithm with massive ULA [J]. IEEE Communications Letters, 2017, 21(5): 1071. DOI: 10.1109/LCOMM.2017.2652442

[6] Aboutanios E, Hassanien A, Amin M G, et al. Fast iterative interpolated beamforming for accurate single-snapshot DOA estimation [J]. IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters, 2017, 14(4): 574. DOI: 10.1109/LGRS.2017.2661315

[7] Wang Kai, Li Jincheng, Yu Zichuan, et al. Multitarget separation algorithm based on DFT transform in uniform linear array scene [J]. IEEE Sensors Letters, 2024, 8(10): 6013504. DOI: 10.1109/LSENS.2024.3417381

[8] Liu Yicen, Zhao Peiyan, Yao Denghui, et al. Fast and accurate single-snapshot DOA estimation: iterative interpolated approaches [J]. IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters, 2023, 20: 3505005. DOI:10.1109/LGRS.2023.3283288

[9] Wagner M, Park Y, Gerstoft P. Gridless DOA estimation and root-MUSIC for non-uniform linear arrays [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2021, 69: 2144. DOI: 10.1109/TSP.2021.3068353

[10] Lau K H, Ng C K, Song Jian. Low-complex single-snapshot DoA-estimation with higher degree of atomic separation-freedom in a MU-MIMO system aided by prior information [J]. IEEE Signal Processing Letters, 2023, 30: 349. DOI: 10.1109/LSP.2023.3262378

[11] Fu Haosheng, Dai Fengzhou, Hong Ling. Off-grid error calibration for DOA estimation based on sparse Bayesian learning [J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2023, 72(12): 16293. DOI: 10.1109/TVT.2023.3298965

[12] Jagannath R. Detection, estimation and grid matching of multiple targets with single snapshot measurements [J]. Digital Signal Processing: A Review Journal, 2019, 92: 82. DOI: 10.1016/j.dsp.2019.05.008

[13] Zhao Yangying, Chen Peng, Cao Zhenxin, et al. NoncovANM: gridless DOA estimation for LPDF system [J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2023, 72(12): 15563. DOI:10.1109/TVT.2023.3293189

[14] Zhang Wei, Yu Feng. Dynamic parameterized l_1-regulation for single-snapshot DOA estimations [J]. IEEE Communications Letters, 2017, 21(10): 2218. DOI: 10.1109/LCOMM.2017.2725268

[15] Karimi M, Zare M, Derakhtian M. Sparse Bayesian learning with Jeffreys' noninformative prior for off-grid DOA estimation [J]. Signal Processing, 2025, 230: 109809. DOI: 10.1016/j.sigpro.2024.109809

[16] 王玉玺, 黄国策, 李伟, 等. 非均匀广义对角加载稳健波束形成算法[J]. 西安交通大学学报, 2016, 50(8): 64
Wang Yuxi, Huang Guoce, Li Wei, et al. A robust beamforming algorithm based on non-uniform generalized diagonal loading method [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2016, 50(8): 64. DOI: 10.7652/xjtuxb201608011

[17] Muhammad M, Li Minghui, Abbasi Q H, et al. Adaptive diagonal loading technique to improve direction of arrival estimation accuracy for linear antenna array sensors [J]. IEEE Sensors Journal, 2022, 22(11): 10986. DOI:10.1109/JSEN.2022.3168785

[18] 赵辰乾, 刘益辰, 刘欣. 有色噪声下 GNSS 空时抗干扰算法的性能分析和改进[J]. 电子与信息学报, 2022, 44(4): 1388
Zhao Chenqian, Liu Yichen, Liu Xin. Effect of colored noise on STAP algorithm for GNSS anti-jamming and algorithm improvement [J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2022, 44(4): 1388. DOI:10.11999/JEIT210174

[19] Dai Jisheng, Bao Xu, Xu Weichao, et al. Root sparse Bayesian learning for off-grid DOA estimation [J]. IEEE Signal Processing Letters, 2017, 24(1): 46. DOI:10.1109/LSP.2016.2636319

[20] Stoica P, Nehorai A. Performance study of conditional and unconditional direction-of-arrival estimation [J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1990, 38(10): 1783. DOI:10.1109/29.60109