DOI:10.11918/202212019

利用努氏硬度表征金属的弹性模量和屈服强度

刘 明[1,2],徐智通[1,2],尉贺宝[3]

(1. 福建省太赫兹功能器件与智能传感重点实验室(福州大学),福州 350108;2. 福州大学 机械工程及自动化学院,福州 350108;3. 上海中研仪器制造有限公司,上海 201411)

摘 要:为利用努氏硬度表征金属材料弹性模量和屈服强度,提出了 Marshall 和 Conway 的修正模型表征弹性模量,以及 Lockett、Yu、Marsh、Johnson 和 Vandeperre 的修正模型表征屈服强度,开拓了努氏硬度表征金属材料力学性能的新应用。选取 35 种金属进行努氏硬度试验,利用 Meyer 定律、弹塑性变形模型、Hays-Kendall 模型和比例试样模型对努氏硬度的正压痕尺寸效应(硬度随载荷的减小而增大)进行了分析,可以用大载荷下趋于稳定的硬度值代表材料的真硬度。首次考虑金属材料在努氏压痕短对角线处材料堆积的影响,Marshall 模型和 Conway 模型进行了修正:Marshall 模型中原有的常参数 α 修正为 b/d(努氏压痕短对角线与长对角线的比值)的二次函数;Conway 模型引入了与 b/d 的平方呈线性关系修正系数 β。通过比较文献中与原模型计算的屈服强度,引入修正系数 k,首次获得了基于努氏硬度利用 Lockett、Yu、Marsh、Johnson 和 Vandeperre 模型计算金属屈服强度的修正模型。结果表明:除 Ti6Al4V 和 Sn 外,修正模型与仪器化压入得到的弹性模量一致,置信度不低于 0.94;除 60Si2Mn 弹簧钢外,修正后得到的屈服强度与文献值一致,置信度不低于 0.90。

关键词:金属;努氏硬度;仪器化压入;弹性模量;屈服强度

中图分类号:TB302.5 **文献标志码**:A **文章编号**:0367-6234(2024)04-0108-12

Characterization of elastic modulus and yield strength of metals by Knoop hardness

LIU Ming[1,2], XU Zhitong[1,2], WEI Hebao[3]

(1. Fujian Provincial Key Laboratory of Terahertz Functional Devices and Intelligent Sensing (Fuzhou University), Fuzhou 350108, China; 2. School of Mechanical Engineering and Automation, Fuzhou University, Fuzhou 350108, China; 3. Shanghai Zhongyan Instrument Manufacturing Co., Ltd., Shanghai 201411, China)

Abstract: To characterize the elastic modulus and yield strength of metallic materials by Knoop hardness, the modified Marshall model and Conway model were proposed to characterize the elastic modulus, and the modified Lockett, Yu, Marsh, Johnson and Vandeperre models were proposed to characterize the yield strength, broadening the new application of Knoop hardness to the characterization of mechanical properties of metallic materials. Knoop hardness tests were carried out on 35 metals. The positive indentation size effect of Knoop hardness (hardness increases with the decrease in load) was analyzed by Meyer's law, elastic-plastic deformation (EPD) model, Hays-Kendall model, and proportional specimen resistance (PSR) model. It was found that the hardness under large loads can be approximated to be constant, and can be used to represent true hardness of the material. For the first time, the influence of pile-up around the short diagonal of Knoop indent was considered to modify Marshall model and Conway model as follows: the constant parameter α in the original Marshall model was modified as a quadratic function of b/d (the ratio of the short diagonal to the long diagonal of the residual Knoop imprint), and a correction coefficient β linearly increasing with the square of b/d was introduced to Conway model. By comparing the values of yield strength in the literature and those calculated by original models, a correction coefficient k was introduced to modify Lockett, Yu, Marsh, Johnson and Vandeperre models for the calculation of yield strength of metals for the first time. The results showed that except for Ti6Al4V and Sn, values of elastic modulus obtained from the modified models were consistent with those from instrumented indentation, with a confidence degree no less than 0.94. Similarly, except for spring steel 60Si2Mn, values of yield strength obtained from the modified models were consistent with those in the literature, with a confidence degree no less than 0.90.

Keywords: metals; Knoop hardness; instrumented indentation; elastic modulus; yield strength

收稿日期:2022-12-07;**录用日期**:2023-03-03;**网络首发日期**:2023-11-07

网络首发地址:https://link.cnki.net/urlid/23.1235.T.20231106.1405.005

基金项目:国家自然科学基金(51705082);福建省"闽江学者特聘教授"项目(0020-510759);福州大学旗山学者海外人才引进计划项目(0020-650289);晋江市福大科教园区发展中心科研项目(2019-JJFDKY-11)

作者简介:刘 明(1985—),男,教授,博士生导师

通信作者:刘 明,mingliu@fzu.edu.cn

金属材料硬度[1]、弹性模量[2]和屈服强度是工程应用中重要的力学性能参数。硬度对微观组织结构和加工工艺敏感，是弹性模量和屈服强度的综合反映，基于压痕法获得材料的力学性能适用于小试样，较传统测试方法具有实验过程简便且对试样破坏小的优点，对材料力学性能的快速检测和降低测试成本有重要意义。努氏硬度 H_K 和维氏硬度 H_V 广泛应用于各种材料的表征，如涂层、薄膜、生物材料、陶瓷和金属玻璃等。同一种材料在相同载荷下，努氏压痕比维氏压痕深度浅，对试样破坏更小，测量精度高。由于维氏压痕两条对角线长度相等，对材料的弹性回复不敏感，无法定量表征材料的弹性回复，使得维氏硬度及其压痕对角线不能用于表征材料的弹性模量。Marshall 等[3]根据努氏压痕短对角的弹性回复求解得到了玻璃和陶瓷等脆性材料的弹性模量 E。基于努氏硬度表征弹性模量的方法对于压痕短对角线处堆积不太明显的材料较适合（如陶瓷、玻璃、光学晶体和热喷涂层），在较大载荷下同样适用于聚合物，但不适合短对角线处堆积较严重的金属材料。Conway[4]也提出了一种利用努氏压痕弹性回复计算弹性模量的方法，应用于玻璃、陶瓷和热障涂层。金属材料的名义硬度 H 可以衡量材料抗滑移性能，预估屈服强度σ_y[5]。基于 H_K 可以获得金属玻璃的 E 和σ_y[6]，对于理想塑性材料，其 H 与 σ_y 直接相关；对于非理想塑性材料，H 和 σ_y 之间有线性关系（例如 $\sigma_y \approx H/3$）[7]，并会受到材料（例如 E 和泊松比 v）和压头（例如等效圆锥半顶角 θ）的影响[8]。金属、陶瓷、玻璃、聚合物等材料的显微硬度存在压痕尺寸效应，即随着载荷的增加硬度值有下降的趋势：金属材料显微硬度的尺寸效应可以用 Meyer 定律[9]、弹塑性变形模型[10]、Hays-Kendll 模型[11]和比例试样阻力模型[12]等解释。材料的弹性模量可以被仪器化压入方法有效表征。仪器化压入具有试样制备简单和测试分辨率高等优点，广泛应用于表征各类材料（比如金属、高分子、陶瓷、玻璃和薄膜等）在微小区域的力学性能（比如压入硬度、结合强度、拉伸性能、断裂韧度、残余应力和黏弹塑性等）。分析仪器化压入载荷 - 位移曲线的加载[13]或卸载阶段都可以获得材料的弹性模量和硬度。仪器化压入过程的复杂应力使得通过载荷 - 位移曲线很难求解材料的屈服强度和硬化指数，并且单种压头下结果不唯一[14]，需要结合有限元和机器学习[15]和基于能量等效原理[16]等才能表征弹塑性本构力学参数。

本文首次利用努氏硬度表征金属材料的弹性模量和屈服强度。在考虑金属材料压痕短对角线堆积和压痕尺寸效应影响下，利用金属材料的努氏硬度建立了快捷估算材料弹性模量和屈服强度的修正模型，有助于降低实验成本，开拓了努氏硬度在金属材料力学性能表征的应用。

1　努氏硬度和仪器化压入试验

对 35 种金属材料进行多级水磨，随后进行机械抛光去掉试样表面划痕，最终达到镜面效果，最后依次在丙酮、无水乙醇和超纯水中进行 10 min 的超声清洗，除油去污，用高纯氮气吹干后放入干燥恒温箱中密封保存备用。35 种金属材料的弹性模量文献报道值 E_{ref}（下标“ref”表示由文献报道）见表 1。利用上海中研仪器制造有限公司的 HVST 系列显微硬度计进行努氏硬度测试。努氏压头是两棱间半夹角分别为 $\theta_1 = 86.25°$，$\theta_2 = 65.00°$ 的金刚石四棱锥压头[6]，实验载荷为 0.245 ~ 9.800 N。为使压痕不超过屏幕显示范围，软材料的最大测试载荷较小，各种材料测试的最大载荷见表 1。每种载荷测试 5 次取平均值，保载时间为 15 s，卸载后分别测量努氏压痕两条对角线的长度。努氏硬度 H_K 为实验载荷 P 与卸载后压痕投影面积 A_p 的比值[17]为

$$H_K = \frac{P}{A_p} = \frac{2P}{d^2} \cdot \frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} = 14.229 \cdot \frac{P}{d^2} \tag{1}$$

式中 d 为努氏压痕长对角线长度。

采用 Anton Paar 公司型号为 NHT² 的仪器化纳米压入仪在大气环境下采用载荷控制模式将金刚石三棱锥 Berkovcih 压头垂直压入试样表面测试金属材料的弹性模量 E_{IT}。仪器化压入载荷 - 位移（F-h）曲线的卸载段可以用幂函数拟合[18]：

$$\frac{F}{F_{max}} = \left(\frac{h - h_p}{h_{max} - h_p}\right)^m \tag{2}$$

式中：F_{max}、h_{max} 分别为最大载荷和最大位移，残余接触位移 h_p、m（大多数材料的 m 范围为 1.2 ~ 1.7[17]）为拟合参数。

接触刚度 S 在卸载初始（即最大位移 h_{max}）处确定：

$$S = \left.\frac{dF}{dh}\right|_{h_{max}} = \frac{mF_{max}}{h_{max} - h_p} \tag{3}$$

弹性模量 E_{IT} 可由缩减模量 E_r 获得，即

$$\frac{1}{E_r} = \frac{1 - v^2}{E_{IT}} + \frac{1 - v_i^2}{E_i}$$

$$E_r = \frac{\sqrt{\pi}}{2\beta} \frac{S}{\sqrt{A_p(h_c)}} \tag{4}$$

$$h_c = h_{max} - \varepsilon \frac{F_{max}}{S}$$

式中：v 为被测材料的泊松比（见表 1），$E_i = 1\,141$ GPa

和 $\upsilon_i = 0.07$ 分别为金刚石压头的弹性模量和泊松比，$\beta = 1.034$[19] 为 Berkovich 压头的形状修正因子，接触投影面积 $A_p(h_c)$ 为接触深度 h_c（在 h_{max} 处确定）的函数，通过对弹性模量和泊松比已知的标准材料（如熔融石英）进行仪器化压入试验获得若干 h_c 下的 A_p，利用 B - 样条插值拟合得到[19]，常数 ε 与压头几何形状有关，同时取决于拟合指数 m[20]。

表 1 35 种金属材料的力学性能（E_{ref}、υ、σ_{yref}）[21-22]、努氏硬度测试的最大载荷、最大载荷下努氏压痕长对角线 d、b/d 和努氏硬度 H_K

Tab. 1 Mechanical properties of 35 metals (E_{ref}, υ, σ_{yref})[21-22], Knoop hardness H_K, long diagonal d, and b/d under maximum load

材料	P/N	d/μm	b/d	H_K/GPa	E_{IT}/GPa	E_{ref}/GPa	υ	σ_{yref}/MPa
Mo	4.900	158.78	0.163 1	2.77	400	320.0	0.320	450.0
W	9.800	173.56	0.173 9	4.62	442	410.0	0.280	750.0
Sn	0.245	202.60	0.145 6	0.08	28	23.0	0.330	6.8 ~ 10.0
Al	2.940	184.30	0.157 2	1.22	69	69.0	0.330	220.0
Fe	4.900	192.40	0.172 8	1.88	251	217.0	0.300	142.0
DD5	9.800	210.80	0.148 5	2.14	244	128.0	0.300	—
DD6	9.800	190.70	0.118 8	3.84	254	227.0	0.300	770.0
DD11	9.800	195.70	0.137 7	3.54	230	130.0	0.300	950.0
GH4169	9.800	197.80	0.137 0	3.57	236	219.0	0.298	650.0 ~ 718.0
FGH96	9.800	203.80	0.129 0	3.36	238	180.0	0.317	900.0
T2 copper	2.940	204.20	0.181 3	1.01	140	116.0	0.326	75.0
H59 brass	2.940	180.50	0.141 2	1.29	110	98.0	0.360	135.0
H62 brass	2.940	170.70	0.154 0	1.44	129	105.0	0.360	193.0
H68 brass	2.940	179.40	0.152 3	1.30	117	113.0	0.360	270.0
AZ31	0.980	199.40	0.127 0	0.73	49	43.8	0.350	94.0
AZ41	0.980	153.70	0.126 2	0.59	39	—	0.350	184.0
AZ61	0.980	183.00	0.128 0	0.86	50	41.5	0.350	200.0
20#	4.900	218.70	0.155 2	1.46	259	223.0	0.260	280.0
45#	4.900	163.90	0.159 2	2.60	274	210.0	0.260	355.0
T8	4.900	177.80	0.153 2	2.20	253	203.0	0.260	290.0
T10	4.900	166.70	0.153 4	2.51	270	200.0 ~ 220.0	0.260	319.0
X80	4.900	180.60	0.152 3	2.14	216	206.0	0.300	594.0
304L	4.900	188.80	0.147 2	1.96	220	201.0	0.305	177.0
CLF-1 steel	4.900	188.20	0.160 2	1.97	220	214.0	0.330	492.0
65Mn	4.900	155.90	0.149 6	2.87	243	211.0	0.282	735.0
40Cr	4.900	162.40	0.156 0	2.64	254	210.0	0.285	320.0
H13	4.900	178.80	0.149 9	2.18	250	215.0	0.300	430.0
GCr15	4.900	174.40	0.162 0	2.29	224	200.0	0.300	353.0
Q235	2.940	147.60	0.157 1	1.92	260	208.0	0.330	235.0
60Si2Mn	4.900	152.70	0.150 3	2.99	232	206.0	0.290	1 180.0
CrWMn	4.900	164.50	0.158 0	2.58	244	210.0	0.300	—
W18Cr4V	4.900	159.20	0.167 1	2.75	247	210.0	0.275	—
QT500	4.900	192.10	0.154 1	1.89	211	151.0 ~ 160.0	0.270	—
HT150	4.900	181.60	0.122 7	2.11	195	116.0	0.250	—
Ti6Al4V	4.900	158.30	0.166 1	2.78	144	110.0	0.340	900.0

注：P 为载荷，d 为努氏压痕长对角线长度，b/d 为短对角线长度与长对角线长度之比，H_K 为努氏硬度，E_{IT} 为仪器压痕的弹性模量，E_{ref} 为弹性模量文献报道值。

2　微米努氏硬度尺寸效应分析

2.1　努氏硬度的 Meyer 定律[9]

Meyer 定律中压痕的实验载荷 P 与努氏压痕长对角线 d 之间满足：

$$P = A_0 d^n, \ln P = \ln A_0 + n\ln d \tag{5}$$

式中 A_0 和材料有关，指数 n 可以衡量微米硬度的尺寸效应：$n=2$ 时无尺寸效应，此时硬度不随载荷的增加而变化；$n<2$ 时材料有正尺寸效应，此时硬度随着载荷的增加而降低；$n>2$ 时材料有逆压痕尺寸效应，此时硬度随着载荷的增加而增加。图 1 显示了硬度尺寸效应的示意图，尺寸效应在小载荷下较为显著，在大载荷下硬度近似为常数，尺寸效应可以忽略，所以在大载荷下测量得到的硬度更接近材料的真硬度。

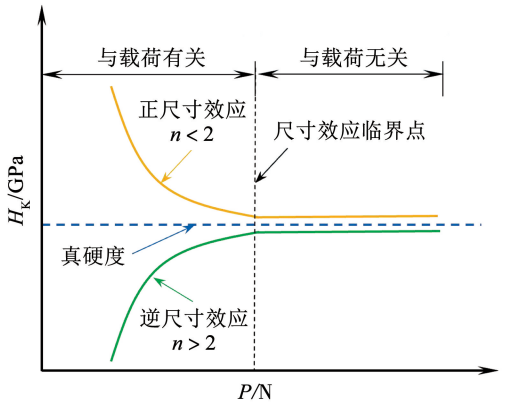


图 1　压痕尺寸效应曲线

Fig. 1　Schematic illustration of indentation size effect

2.2　努氏硬度的弹塑性变形模型(EPD)[10]

压头尖端的钝化和卸载后压痕的弹性回复等都会对测量结果产生影响[10]，因此努氏压痕长对角线 d 和载荷 P 有如下关系：

$$P = A_1 (d + d_0)^2, P^{1/2} = A_1^{1/2} d_0 + A_1^{1/2} d \tag{6}$$

式中：d_0 受压头钝化及压痕弹性回复综合影响，A_1 与材料有关。式(6)两侧同时除以 d^2 可得

$$\frac{P}{d^2} = A_1 \left(1 + \frac{d_0}{d}\right)^2 \tag{7}$$

式中可以解释努氏硬度随载荷下降。随着载荷的增加 d_0/d 和 P/d^2 都逐渐减小，d_0/d 趋近于 0，P/d^2 趋近于 A_1。与载荷无关的真硬度为

$$H_{K,EPD} = 14.229 \frac{P}{(d + d_0)^2} = 14.229 A_1 \tag{8}$$

2.3　努氏硬度的 Hays-Kendall(H-K)模型[11]

材料发生塑性变形时对应一个临界载荷 W，施加的载荷大于 W 时材料才会发生塑性变形，否则只会发生弹性变形。努氏压痕长对角线 d 与载荷 P 满足如下关系：

$$P = W + A_2 d^2, \frac{P}{d^2} = \frac{W}{d^2} + A_2 \tag{9}$$

式中 A_2 与材料有关，而与载荷无关。W/d^2 随载荷的增大而降低，趋近于 0，使得 P/d^2 趋近于 A_2，因此硬度随着载荷增加而降低，趋于常数。与载荷无关的真硬度为

$$H_{K,Hays} = 14.229 \frac{P - W}{d^2} = 14.229 A_2 \tag{10}$$

2.4　努氏硬度的比例试样模型(PSR)[12]

Li 等[12]提出了比例试样模型来解释材料的压痕尺寸效应：

$$P = A_3 d + A_4 d^2, \frac{P}{d^2} = \frac{A_3}{d} + A_4 \tag{11}$$

式中 A_3、A_4 分别为与材料的弹性和塑性性能相关的常数。随着载荷的增大，A_3/d 逐渐减小，使得 P/d^2 趋近于 A_4，因此硬度逐渐变小，趋于常数。材料的真硬度为

$$H_{K,PSR} = \frac{P - A_3 d}{A_P} = 14.229 A_4 \tag{12}$$

图 2 显示 60Si2Mn、HT150、Q235 和 T2 紫铜 4 种典型材料的努氏硬度随载荷的增加而降低，最后趋于稳定，有正压痕尺寸效应，其他材料具有相同的变化趋势。金属材料的维氏硬度[23]和压入硬度也有相同的现象。

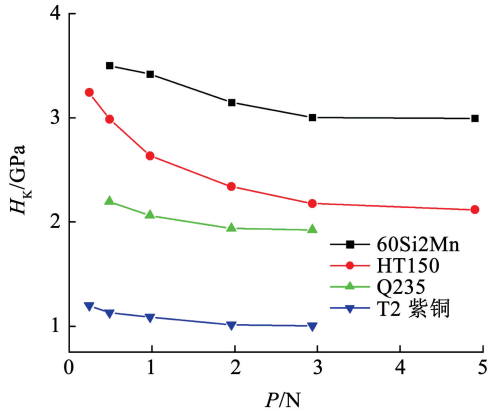


图 2　不同载荷下的努氏硬度

Fig. 2　Variation of Knoop hardness with load

利用 4 种模型对努氏硬度的尺寸分析分别如图 3(a)～3(d)所示，4 种模型拟合效果都很好，置信度 R^2 均大于 0.99，拟合参数见表 2。35 种金属材料在 Meyer 定律中的 n 在 1.73～1.98 之间(在 1.60～2.00 之间，属于软材料特性)，都表现出正压痕尺寸效应。Meyer 定律能直接反映材料的压痕尺寸效应，但不能解释压痕尺寸效应的原因。对于弹塑性变形模型，d_0 在 0.50～16.00 μm 之间，较大的 d_0 其他文献也有报道。对于 Hays-Kendall 模型，W 的值

在 11.00 ~ 272.00 mN 之间,说明不同材料加载时需要克服的最小弹性载荷不同。对于比例试样模型,A_3 在 0.488 ~ 3.750 mN/μm 之间,不同材料加载至相同深度时需要克服的弹性性能不同。虽然 d_0、W 和 A_3 都和材料的弹性性能相关,然而通过分析表 1、2 中的数据并没发现这些参数与弹性模量 E 或 H_K/E 之间的关系,因此各模型中参数的物理意义还有待于进一步深入研究。

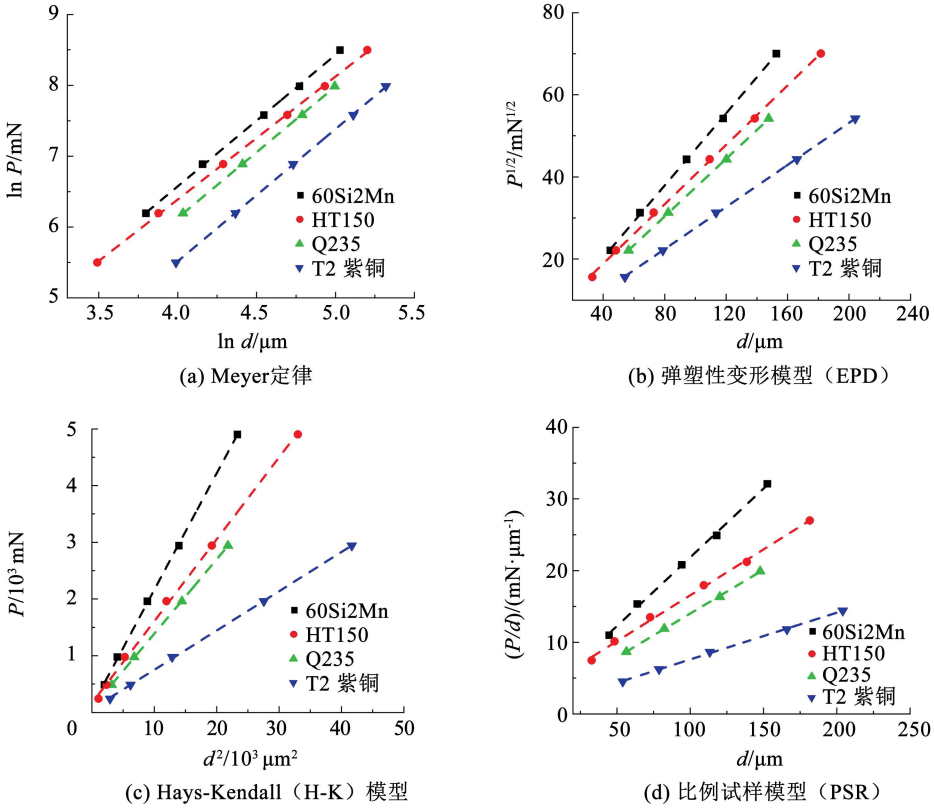


图 3 努氏硬度尺寸效应分析

Fig. 3 Analysis of size effect of Knoop hardness

表 2 压痕尺寸效应分析结果

Tab. 2 Analysis results of indentation size effect

材料	Meyer		EPD			Hays-Kendall			PSR		
	A_0/(mN·μm^{-n})	n	A_1/(mN·μm^{-2})	d_0/μm	$H_{K,EPD}$/GPa	A_2/(mN·μm^{-2})	W/mN	$H_{K,Hays}$/GPa	A_3/(mN·μm^{-1})	A_4/(mN·μm^{-2})	$H_{K,PSR}$/GPa
Mo	0.468	1.83	0.179	8.53	2.54	0.191	175.94	2.71	2.289	0.192	2.73
W	0.669	1.86	0.313	5.04	4.45	0.332	120.92	4.72	3.403	0.311	4.43
Sn	0.022	1.85	0.009	9.39	0.13	0.010	11.01	0.14	0.192	0.009	0.13
Al	0.121	1.93	0.083	3.23	1.18	0.085	24.54	1.21	0.556	0.083	1.18
Fe	0.174	1.95	0.131	2.84	1.86	0.132	50.84	1.88	0.769	0.130	1.85
DD5	0.264	1.96	0.216	0.51	3.07	0.213	20.50	3.03	0.229	0.216	3.07
DD6	0.447	1.89	0.253	3.35	3.60	0.265	22.38	3.77	1.781	0.252	3.59
DD11	0.407	1.91	0.250	3.67	3.55	0.255	110.61	3.63	1.918	0.249	3.54
GH4196	0.368	1.93	0.232	5.34	3.30	0.236	193.62	3.36	2.609	0.231	3.29
FGH96	0.547	1.86	0.240	8.00	3.42	0.248	272.59	3.53	4.183	0.239	3.40
T2 copper	0.143	1.87	0.066	7.73	0.93	0.069	61.39	0.99	1.090	0.065	0.93
H59 brass	0.258	1.80	0.079	13.57	1.13	0.087	151.74	1.23	2.409	0.078	1.11
H62 brass	0.322	1.78	0.087	14.37	1.23	0.096	161.70	1.37	2.833	0.085	1.21
H68 brass	0.252	1.80	0.083	9.54	1.19	0.090	89.35	1.28	1.692	0.083	1.18

表 2(续)

材料	Meyer		EPD			Hays-Kendall			PSR		
	A_0/(mN·μm^{-n})	n	A_1/(mN·μm^{-2})	d_0/μm	$H_{K,EPD}$/GPa	A_2/(mN·μm^{-2})	W/mN	$H_{K,Hays}$/GPa	A_3/(mN·μm^{-1})	A_4/(mN·μm^{-2})	$H_{K,PSR}$/GPa
AZ31	0.157	1.78	0.043	13.25	0.61	0.048	67.25	0.68	1.240	0.043	0.61
AZ41	0.148	1.75	0.034	15.13	0.49	0.039	63.57	0.55	1.199	0.034	0.48
AZ61	0.167	1.79	0.052	9.40	0.74	0.058	43.67	0.82	0.948	0.053	0.76
20#	0.216	1.86	0.097	6.89	1.38	0.101	77.27	1.44	1.145	0.096	1.37
45#	0.291	1.91	0.175	3.36	2.49	0.181	48.02	2.58	1.240	0.175	2.48
T8	0.323	1.86	0.141	8.77	2.01	0.150	160.81	2.14	2.516	0.142	2.02
T10	0.271	1.92	0.169	4.03	2.40	0.174	71.20	2.48	1.420	0.168	2.40
X80	0.229	1.91	0.145	2.46	2.07	0.149	19.42	2.12	0.750	0.145	2.06
304L	0.280	1.87	0.130	8.02	1.85	0.139	96.81	1.98	2.067	0.131	1.96
CLF-1 steel	0.198	1.93	0.134	2.79	1.91	0.137	27.52	1.95	0.751	0.134	1.91
65Mn	0.262	1.95	0.195	2.69	2.78	0.200	56.46	2.84	1.080	0.195	2.78
40Cr	0.282	1.92	0.176	4.56	2.51	0.183	93.82	2.60	1.500	0.179	2.54
H13	0.275	1.89	0.141	7.24	2.01	0.147	142.15	2.09	2.241	0.141	2.01
GCr15	0.198	1.96	0.158	1.67	2.24	0.160	22.28	2.28	0.540	0.158	2.24
Q235	0.275	1.86	0.123	6.80	1.75	0.131	79.58	1.88	1.800	0.122	1.74
60Si2Mn	0.430	1.85	0.193	6.42	2.74	0.205	112.53	2.92	2.680	0.192	2.73
CrWMn	0.230	1.95	0.177	2.25	2.52	0.180	44.79	2.56	0.488	0.180	2.56
W18Cr4V	0.290	1.92	0.185	3.83	2.64	0.191	76.61	2.72	1.480	0.185	2.63
QT350	0.455	1.74	0.099	16.14	1.41	0.111	206.06	1.58	3.720	0.097	1.38
HT150	0.579	1.73	0.131	12.32	1.86	0.144	165.83	2.06	3.750	0.128	1.82
Ti6Al4V	0.200	1.98	0.169	1.87	2.41	0.172	29.11	2.45	0.653	0.169	2.40

注：A_0、A_1、A_2、A_3、A_4分别为 Meyer、EPD、Hays-Kendall 和 PSR 中的常数，n 为指数，d_0为压头钝化和压痕弹性恢复的综合效应常数，$H_{K,EPD}$、$H_{K,Hays}$、$H_{K,PSR}$分别为由 EPD、Hays-Kendall 和 PSR 计算的真硬度。

图 4 显示了 4 种模型的拟合参数之间的关系。d_0随 n 的增大有线性减小的趋势，这是因为材料的正压痕尺寸效应越明显时，n 会越小或 d_0会越大。A_3随 W 的增大有线性增大的趋势，这是由于发生塑性变形的最小载荷变大时，A_3和 W 都会变大。

图 5 比较了不同模型计算的真硬度($H_{K,EPD}$、$H_{K,Hays}$和 $H_{K,PSR}$，见表 2)和趋于稳定的努氏硬度(即最大载荷下的硬度值，见表 1)，3 个模型(EPD、Hays-Kendoll、PSR)计算的真硬度与趋于稳定的 H_K大体一致，可以用大载荷下的努氏硬度值表示材料的真硬度，因此本文均采用大载荷下趋于稳定的努氏硬度值(见表 1)来表征材料的弹性模量和屈服强度。小载荷下材料的微观组织对努氏硬度有较大影响，应选用大载荷下的硬度值作为真硬度，此时，压痕尺寸远大于晶粒尺寸，努氏硬度受材料的各向异性和微观不均匀性的影响可忽略。

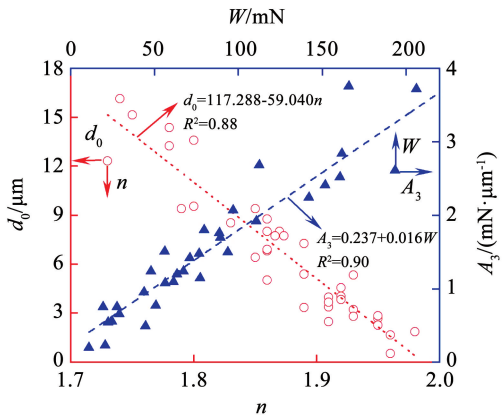


图 4　4 种压痕尺寸模型拟合参数之间的关系 A_3、W 和 d_0、n

Fig. 4　Relationships among fitting parameters of the 4 models for indentation size effect: A_3, W and d_0, n

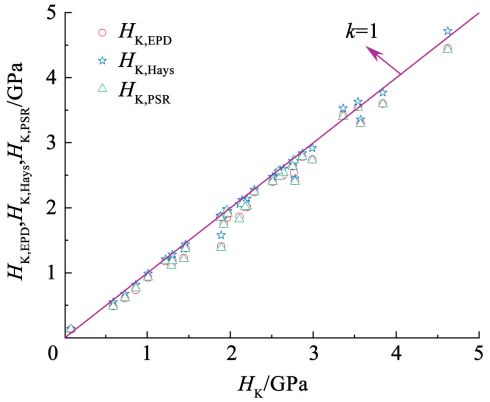
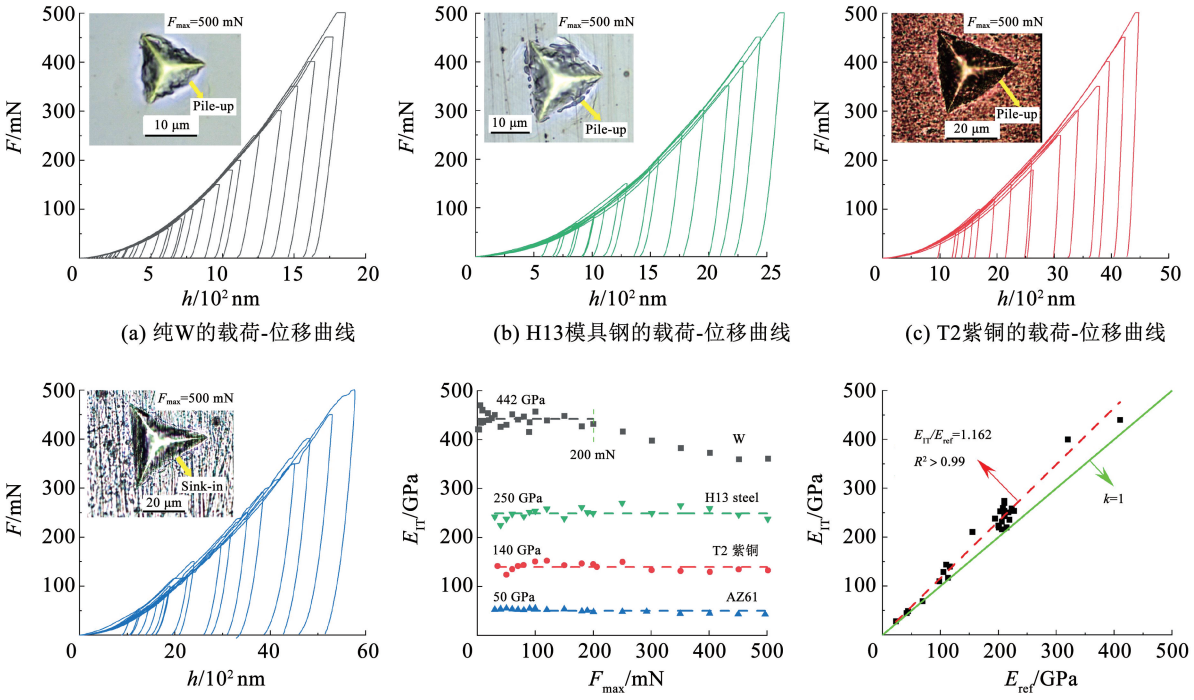


图 5　3 种压痕尺寸模型得到的真硬度($H_{K,EPD}$、$H_{K,Hays}$和$H_{K,PSR}$)与努氏硬度 H_K的比较

Fig. 5　Comparison between true hardness ($H_{K,EPD}$, $H_{K,Hays}$, and $H_{K,PSR}$) by 3 indentation size models and Knoop hardness H_K

3　利用仪器化压入表征弹性模量

图 6(a)~6(d)分别为纯 W、H13 模具钢、T2 紫铜和 AZ61 镁合金的仪器化压入载荷 - 位移曲线以及压痕光学图像。不同 F_{max}下加载曲线基本重合,压痕清晰,无裂纹。纯W和H13模量钢的压痕可以观察到材料堆积;T2 紫铜有较明显的堆积,所以大部分金属材料的 $b/d>1/7.11$,见表 2;AZ61 镁合金的压痕出现了明显的沉陷现象,所以镁合金的 $b/d<1/7.11$。4 种材料的弹性模量 E_{IT}(下标"IT"为由仪器化压入测得)随 F_{max}的变化如图 6(e)所示。大部分材料的 E_{IT}基本不随 F_{max}变化,例如 H13 模具钢、T2 紫铜和 AZ61 镁合金的 E_{IT}可近似为常数。少数材料的 E_{IT}在大载荷下缓慢下降,只有在小载荷下可近似为常数,比如纯 W 的 E_{IT}在小载荷下($F_{max}<200$ mN)可近似为常数,而在大载荷时($F_{max}>200$ mN)缓慢下降,这是因为纯 W 脆性较大,在大载荷下引起材料损伤,这时小载荷下的平均值才是材料真实的弹性模量。35 种金属材料的 E_{IT}在稳定区间(一般是大载荷,硬脆材料是小载荷)的平均值见表 1。图 6(f)比较了 35 种金属材料由仪器化压入得到的弹性模量 E_{IT}和文献报道值 E_{ref}(见表 1)。E_{IT}和 E_{ref}近似成比例,E_{IT}略大于 E_{ref},这是由于 E_{ref}通常是由宏观拉伸试验获得,受材料的各种缺陷影响较大,然而仪器化压入只测试微小局部区域,缺陷较少,所以由仪器化压入测得的弹性模量一般比宏观测试结果略大。



(a) 纯W的载荷-位移曲线　(b) H13模具钢的载荷-位移曲线　(c) T2紫铜的载荷-位移曲线

(d) AZ61镁合金的载荷-位移曲线　(e) 4种材料的弹性模量随加载力的变化　(f) 35种金属材料的E_{IT}与E_{ref}比较

图 6　利用仪器化压入表征金属材料的弹性模量:4 种典型金属的力和位移曲线,弹性模量随加载力的变化;35 种金属材料利用仪器化压入测得的弹性模量 E_{IT}与文献结果 E_{ref}的比较

Fig. 6　Characterization of elastic modulus of metals by instrumented indentation: indentation load-displacement curves and variation of elastic modulus with applied load for 4 representative metals, and comparison of elastic modulus E_{IT} measured by instrumented indentation and E_{ref} reported in the literature of 35 metals

4　利用努氏硬度表征金属材料的弹性模量

图 7(a)、7(b)分别为 W18Cr4V 和 T2 紫铜的努氏压痕光学形貌。b'、d'分别为在最大载荷时努氏压头与材料接触投影面的长对角线和短对角线(不考虑材料堆积或者压痕沉陷,由压头的几何形状可知 $b'/d'=1/7.11$[6])；b、d 分别为在卸载之后残余压痕投影面的长对角线和短对角线。对于玻璃和陶瓷等脆性材料:压痕是沉陷(sink-in)的,不会发生材料堆积(pile-up)；卸载后努氏压痕长对角线的弹性回复可以忽略不计,即 $d\approx d'$;但压痕短对角线发生明显弹性回复,使得 $b<b'$,所以 $b/d<1/7.11$。Marshall 等[3]提出可以利用卸载后努氏压痕的短对角线 b 与长对角线 d 的比值(b/d)计算弹性模量 E 为

$$\frac{b}{d}=\frac{b'}{d'}-\alpha\frac{H_K}{E}\approx\frac{1}{7.11}-\alpha\frac{H_K}{E} \tag{13}$$

式中：α 为与材料有关的常数(对于陶瓷等脆性材料 $\alpha=0.450$,对于牙齿 $\alpha=0.370$,对于聚合物 $\alpha=0.473$,对于大块金属玻璃 α 随 b/d 线性增加[6])；H_K应选用大载荷下趋于稳定的努氏硬度值(见表 1)。

Conway[4]对努氏压痕进行了分析,结果表明当压痕周围无明显堆积和沉陷时,通过分析压痕短对角线的弹性回复可以确定材料的弹性模量 E 为

$$\left(\frac{b}{b'}\right)^2=\left(7.11\frac{b}{d}\right)^2=1-2(1-\upsilon^2)\tan\gamma\left(\frac{H_K}{E}\right) \tag{14}$$

式中:υ 为材料泊松比(见表 1),$\gamma=75°$为努氏压头的等效半角,$b'=d'/7.11=d/7.11$。

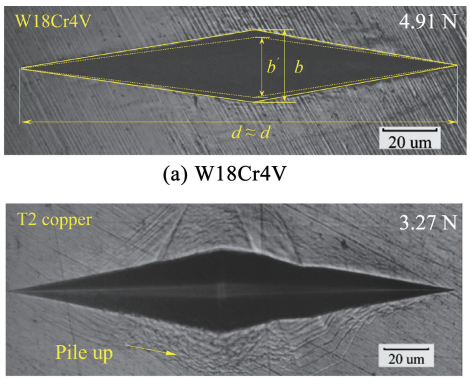
Marshall 模型和 Conway 模型主要用于硬脆材料,压痕周围无明显的堆积或沉陷,并且 $b/d<1/7.11$,可以利用压痕短对角线的弹性回复来计算弹性模量。利用有限元对金属材料的努氏压痕进行模拟,发现当材料的屈服强度和缩减模量之比 $\sigma_y/E_r<0.032$ 时,满载下压痕短对角线处有较大的堆积,虽然卸载后压痕的短对角线会有一定的弹性回复,但短对角线处仍然有较为严重的材料堆积,使得 $b>b'$,如图 7(c)所示;而长对角线基本无堆积且弹性回复量可以忽略不计,仍然有 $d'=d$[24],于是残余压痕形貌的短对角线和长对角线的比值 $b/d>1/7.11$。35 种金属材料在最大载荷下的 b/d 见表 1,对于大部分金属材料 $b/d>1/7.11$(≈0.14),Marshall 模型和 Conway 模型不适用(适用条件需满足 $b/d<1/7.11$),需要对模型进行修正。

对于 Marshall 模型,根据已知的弹性模量 E_{IT}(由仪器化压入测得),系数 α 可以由式(13)计算:

$$\alpha=E_{IT}\left(\frac{1}{7.11}-\frac{b}{d}\right)/H_K \tag{15}$$

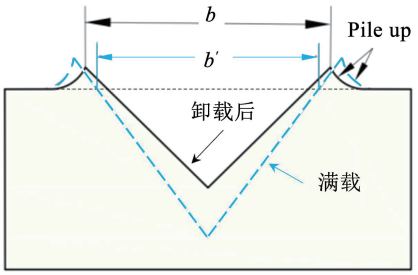
35 种材料的 α 随 b/d 的变化如图 8(a)所示。大部分材料的 $b/d>1/7.11$,所以 α 为负数,这是由于金属材料有严重的堆积,导致利用努氏硬度表征弹性模量只能应用于硬脆材料,还不能应用于金属材料;金属材料的 α 是 b/d 的二次函数,对 Marshall 模型进行修正,首次利用努氏硬度表征金属的弹性模量为

$$E_\alpha=\frac{[-2+117(b/d)-725(b/d)^2]H_K}{1/7.11-(b/d)} \tag{16}$$



(a) W18Cr4V

(b) T2紫铜



(c) 压痕短对角线堆积示意

图 7　努氏残余压痕形貌和努氏压痕短对角线堆积示意

Fig. 7　Residual morphologies of Knoop imprints and schematic diagram of pile-up around short-diagonal of Knoop imprint

对 Conway 模型引入修正系数 β,并认为:

$$\left(7.11\frac{b}{d}\right)^2=\beta\left[1-2(1-\upsilon^2)\tan\gamma\left(\frac{H_K}{E_{IT}}\right)\right] \tag{17}$$

由式(14)和已知的弹性模量 E_{IT}可以计算出 β 为

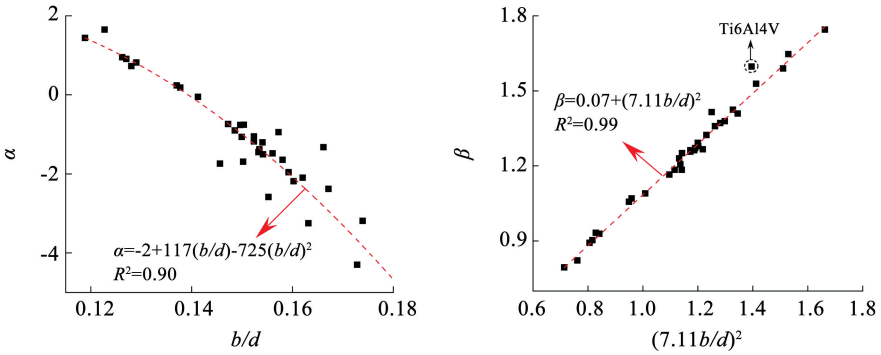
$$\beta=\frac{(7.11b/d)^2}{1-2[(1-\upsilon^2)\tan\gamma](H_K/E_{IT})} \tag{18}$$

35 种金属的 β 随 b/b'的变化如图 8(b)所示,随着压痕短对角线比值的平方$(7.11b/d)^2$ 的增加,β 有线性增加的趋势(Ti6Al4V 除外),适用于金属

材料的 Conway 修正模型为

$$E_\beta = \frac{2(1-\upsilon^2)\tan\gamma H_K}{1-\dfrac{(7.11b/d)^2}{0.07+(7.11b/d)^2}} \tag{19}$$

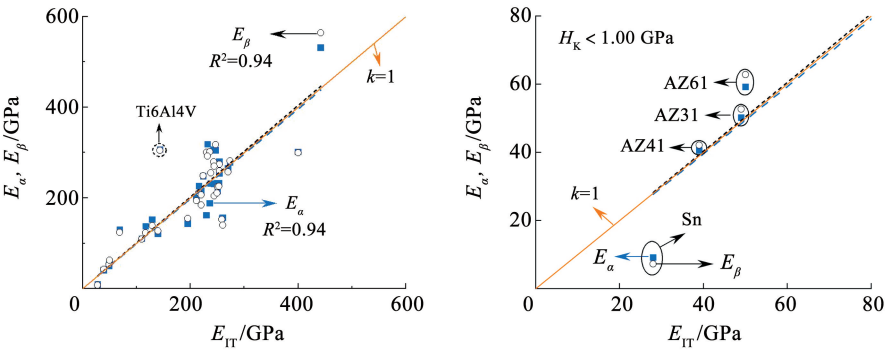
根据修正后的 Marshall 模型和 Conway 模型，见式(16)和式(19)，可分别计算得到 35 种金属材料的弹性模量 E_α、E_β，如图 9(a)所示，大部分材料的 E_α、E_β 和仪器化压入测得的弹性模量 E_{IT} 一致(Ti6Al4V 的弹性模量会被高估)，置信度 R^2 不低于 0.94。图 9(b)放大展示了图 9(a)中低硬度材料(H_K < 1.00 GPa)的结果：两修正模型计算的 3 种 AZ 系列镁合金的弹性模量与 E_{IT} 基本相等，但会低估硬度较小的 Sn(H_K = 0.08 GPa)的弹性模量。



(a) α与b/d的关系　　(b) β与$(7.11b/d)^2$的关系

图 8　Marshall 和 Conway 模型中系数的变化

Fig. 8　Variations of the empirical parameters of Marshall and Conway models



(a) 所有材料E_α、E_β与E_{IT}的比较　　(b) 低硬度材料E_α、E_β与E_{IT}的比较

图 9　金属弹性模量比较：Marshall 和 Conway 的修正模型计算的 E_α、E_β 与仪器化压入得到的 E_{IT}

Fig. 9　Comparison between E_α, E_β, and E_{IT} obtained by modified Marshall model, modified Conway model, and instrumented indentation, respectively

5　利用努氏硬度表征金属的屈服强度 σ_y

利用硬度表征材料屈服强度的模型首先是基于圆锥压头提出的，也适用于维氏压头(可通过等效圆锥半顶角等效为圆锥压头)。因为努氏硬度与维氏硬度相关性很强[25]，所以可以利用努氏硬度表征材料的屈服强度。相比于维氏压头，努氏压头长对角线远大于短对角线，如图 7(a)所示，对材料的各向异性较为敏感[26]，大载荷下的结果更能代表金属材料宏观的屈服强度[27]。

Schuh 等[28]研究金属材料的塑性变形时发现不同形状压头下屈服强度 σ_y 和名义硬度 H 呈线性关系：

$$\sigma_y = \frac{\sqrt{3}H}{1.41+2.72\theta},\quad H = \frac{P}{A_c} = 12.873\frac{P}{d^2} \tag{20}$$

式中：对于努氏压头取 $\theta = 77.64° \times \pi/180°$，$P$ 为最大载荷，A_c 为最大压入深度下压头和材料的接触投影面积。

Yu 等[29]发现屈服强度 σ_y 和名义硬度 H 之间满足：

$$\sigma_y = \frac{(1-\upsilon^2)E_r\cot\theta}{2C_\theta}\tanh^{-1}\left(\frac{2H}{(1-\upsilon^2)E_r\cot\theta}\right)$$

$$C_\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[2.845-2.3757\times10^{-2}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right]$$

$$52.5°\leqslant\theta\leqslant90.0° \tag{21}$$

Zhang 等[7]在分析膨胀腔模型时发现材料的屈服强度 σ_y、名义硬度 H、弹性模量 E 和泊松比 υ 之

间满足：

$$\frac{H}{\sigma_y}=\frac{2}{3}\left\{1+\ln\left[\frac{E}{3(1-\upsilon)\sigma_y}\right]\right\} \tag{22}$$

Fornell 等[8]基于膨胀腔模型得到新的表达式为

$$\frac{H}{\sigma_y}=\frac{2}{3}\left(2+\ln\frac{E\cot\theta}{3\sigma_y}\right) \tag{23}$$

Vandeperre 等[30]考虑了弹性表面变形的影响，提出另一种表达式：

$$\frac{H}{\sigma_y}=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{1-2\lambda}\ln\frac{3+2\mu}{6\lambda+3\mu-2\lambda\mu}\right)$$

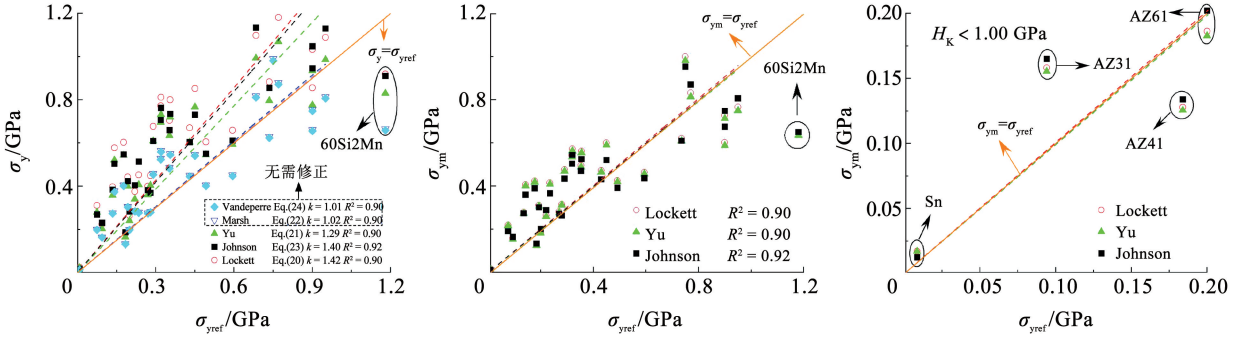
$$\lambda=(1-2\upsilon)\frac{\sigma_y}{E}$$

$$\mu=(1+\upsilon)\frac{\sigma_y}{E} \tag{24}$$

根据式(20) ~ (24)，当材料的名义硬度 H、弹性模量 E(即仪器化压入测试的弹性模量 E_{IT}，见表 1)、泊松比 υ(见表 1)和压头的等效圆锥半顶角 θ 已知时，可以求得材料的屈服强度 σ_y。式(20)、(21)可直接计算材料的屈服强度 σ_y，式(22) ~ (24)可采用牛顿迭代法计算，初始迭代点可采用 $\sigma_y\approx H/3$。由式(1)和式(20)可知名义硬度 H 和努氏硬度 H_K 成比例，$H=0.905H_K$。将不同模型的名义硬度 H 替换为大载荷下趋于稳定的努氏硬度 H_K(见表 1)，可计算得到 35 种金属屈服强度，与文献报道值(见表 1)的比较如图 10(a)所示，除 60Si2Mn 弹簧钢外，不同模型计算的屈服强度和文献报道值近似成比例，可以引入修正系数 k 来对模型进行修正，k 表示文献值与原模型计算值的比值(拟合时未考虑偏离线性趋势较远的 60Si2Mn 弹簧钢)。60Si2Mn 弹簧钢具有较高的弹性极限，并且其屈服强度与抗拉强度十分接近，与普通金属材料差异显著，所以适用于普通金属的公式不适合 60Si2Mn 弹簧钢。Vandeperre 和 Marsh 两个模型的 k 值近乎等于 1，模型不需要修正。基于 k 值，同时把名义硬度 H 替换成努氏硬度 H_K，对其他 3 个模型(Lockett、Johnson 和 Yu)进行了修正，修正前、后的模型仅仅差一个系数，即 Lockett 的修正模型为

$$\sigma_{ym}=\frac{\sqrt{3}H_K}{2.21+4.27\theta} \tag{25}$$

3 个修正模型计算出的 35 种金属屈服强度 σ_{ym}(下标“ym”表示修正模型计算值)与文献报道值 σ_{yref}(见表 1)的比较如图 10(b)所示，修正后模型计算的屈服强度与文献报道值一致，置信度 R^2 不低于 0.90，说明修正后的模型可以准确预测大部分金属材料的屈服强度，偏差主要是由于金属材料的屈服强度受加工过程等因素影响，使得金属的屈服强度是一个范围，见表 1。图 10(c)放大展示了图 10(b)中低硬度材料($H_K<1.00$ GPa)的结果：修正后的模型计算的低硬度材料的 σ_{ym} 与 σ_{yref} 基本一致，说明修正后模型也适用于硬度较低的金属。Marsh、Johnson、Vandeperre 模型需要利用牛顿迭代法解方程来计算材料的屈服强度 σ_y，Lockett、Yu 模型可直接计算 σ_y，由于 Lockett 形式更简单，所以当努氏硬度容易测量时，推荐式(25)计算金属材料的屈服强度。大塑性变形得到的硬度还与材料的硬化指数有关[25]，而本文中的模型均未考虑硬化指数的影响，因此适用于硬化指数对大变形影响不大的金属材料，从而为工程实践中基于努氏硬度评估金属材料的屈服强度提供简便方法。



(a) 模型修正前计算的屈服强度σ_y　(b) 修正模型计算的屈服强度σ_{ym}　(c) 修正模型计算的低硬度材料σ_{ym}

图 10　35 种材料屈服强度的计算值和文献值 σ_{yref} 比较

Fig. 10　Comparison between values of yield strength calculated by different models and σ_{yref} reported in the literature

6　结　论

1)对 35 种金属材料进行努氏硬度试验，发现金属材料的努氏硬度存在正压痕尺寸效应，大载荷下的硬度值区域稳定，并与弹塑性变形模型(EDP)、Hays-Kendall 模型和比例试样模型(PSR)各自计算的真硬度值一致。

2)首次考虑金属材料在努氏压痕短对角线处

材料堆积的影响,利用最大载荷下的努氏硬度值计算金属材料的弹性模量和屈服强度,将 Marshall 模型中原有的常参数 α 修正为 b/d(努氏压痕短对角线与长对角线的比值)的二次函数;将 Conway 模型乘以与 b/d 的平方呈线性关系的修正系数 β。除 Ti6Al4V 和 Sn 外,修正模型与仪器化压入测得的弹性模量一致,置信度 R^2 不低于 0.94。

3)通过比较文献值与 Lockett、Yu、Marsh、Johnson 和 Vandeperre 模型计算的屈服强度,引入修正系数 k(文献值与原模型计算值的比值),首次建立了基于努氏硬度表征金属材料屈服强度的模型。除 60Si2Mn 弹簧钢外,修正模型计算值与文献值一致,置信度 R^2 不低于 0.90。

参考文献

[1] 杨浩志, 辛艳青, 郑小龙, 等. 结构调制高硬度 TiCu/TiN-Cu 纳米多层复合膜制备及其机械性能[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2021, 53(8): 56
YANG Haozhi, XIN Yanqing, ZHENG Xiaolong, et al. Preparation and mechanical properties of structure modulated TiCu/TiN-Cu nano-composite multilayer films [J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2021, 53(8): 56. DOI: 10.11918/202001059

[2] 刘晓立, 曹建国, 柴雪婷, 等. 变弹性模量对高强钢辊弯成型回弹预测的影响[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2018, 50(7): 137
LIU Xiaoli, CAO Jianguo, CHAI Xueting, et al. Springback prediction of DP980 steel considering nonlinear elastic modulus in cold roll forming [J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2018, 50 (7): 137. DOI: 10.11918/j.issn.0367 - 6234.201707163

[3] MARSHALL D B, NOMA T, EVANS A G. A simple method for determining elastic-modulus-to-hardness ratios using Knoop indentation measurements [J]. Journal of the American Ceramic Society, 1982, 65(10): c175. DOI: 10.1111/j.1151 - 2916.1982.tb10357.x

[4] CONWAY J C Jr. Determination of hardness to elastic modulus ratios using Knoop indentation measurements and a model based on loading and reloading half-cycles[J]. Journal of Materials Science, 1986, 21(7): 2525. DOI: 10.1007/BF01114301

[5] LAWN B R, MARSHALL D B. Hardness, toughness, and brittleness: An indentation analysis [J]. Journal of the American Ceramic Society, 1979, 62(7/8): 347. DOI: 10.1111/j.1151 - 2916.1979.tb19075.x

[6] 刘明, 郑强, 高诚辉. 基于努氏硬度表征大块金属玻璃的力学性能[J]. 固体力学学报, 2021, 42(4): 376
LIU Ming, ZHENG Qiang, GAO Chenghui. Characterization of mechanical properties of bulk metallic glasses based on Knoop hardness[J]. Chinese Journal of Solid Mechanics, 2021, 42(4): 376. DOI: 10.19636/j.cnki.cjsm42 - 1250/o3.2021.002

[7] ZHANG H W, SUBHASH G, JING X N, et al. Evaluation of hardness-yield strength relationships for bulk metallic glasses [J]. Philosophical Magazine Letters, 2006, 86 (5): 333. DOI: 10.1080/09500830600788935

[8] FORNELL J, CONCUSTELL A, SURIÑACH S, et al. Yielding and intrinsic plasticity of Ti—Zr—Ni—Cu—Be bulk metallic glass[J]. International Journal of Plasticity, 2009, 25(8): 1540. DOI: 10.1016/j.ijplas.2008.11.002

[9] CAI Jun, LI Fuguo, LIU Taiying, et al. Microindentation study of Ti—6Al—4V alloy[J]. Materials & Design, 2011, 32(5): 2756. DOI: 10.1016/j.matdes.2011.01.003

[10] CHENG W L, PARK S S, TANG W N, et al. Influence of alloying elements on microstructure and microhardness of Mg-Sn-Zn-based alloys [J]. Transactions of Nonferrous Metals Society of China, 2010, 20(12): 2246. DOI: 10.1016/S1003 - 6326(10)60636 - X

[11] FAGHIHI D, VOYIADJIS G Z. Determination of nanoindentation size effects and variable material intrinsic length scale for body-centered cubic metals [J]. Mechanics of Materials, 2011, 44: 189. DOI: 10.1016/j.mechmat.2011.07.002

[12] LI Hong, HAN Y H, BRADT R C. Knoop microhardness of single crystal sulphur[J]. Journal of Materials Science, 1994, 29(21): 5641. DOI: 10.1007/BF00349959

[13] 龚江宏, 刘明. 一种确定纳米压入接触面积的简便方法[J]. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2023, 53(1): 87
GONG Jianghong, LIU Ming. A simple method for the determination of contact area for nanoindentation tests[J]. Scientia Sinica (Physica, Mechanica & Astronomica), 2023, 53(1): 87. DOI: 10.1360/SSPMA - 2022 - 0208

[14] 陈辉, 蔡力勋, 包陈. 双锥度压入的 FAT 迭代法获取材料的力学性能[J]. 核动力工程, 2015, 36(5): 101
CHEN Hui, CAI Lixun, BAO Chen. FAT iterative method based on dual conical indentation to obtain properties of materials [J]. Nuclear Power Engineering, 2015, 36(5): 101. DOI: 10.13832/j.jnpe.2015.05.0101

[15] 龙旭, 申子怡, 贾敬普, 等. 纳米压痕下单/多层薄膜弹塑性本构的无量纲分析[J]. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2023, 53(1): 55
LONG Xu, SHEN Ziyi, JIA Qipu, et al. Dimensionless analysis of the elastoplastic constitutive properties of single/multilayered filmsunder nanoindentation [J]. Scientia Sinica (Physica, Mechanica & Astronomica), 2023, 53(1): 55. DOI: 10.1360/SSPMA - 2022 - 0203

[16] 张志杰, 郑鹏飞, 陈辉, 等. 基于能量等效原理的金属材料硬度预测方法[J]. 工程力学, 2021, 38(3): 17
ZHANG Zhijie, ZHENG Pengfei, CHEN Hui, et al. The method for hardness prediction of metal materials based on energy equivalence principle[J]. Engineering Mechanics, 2021, 38(3): 17. DOI: 10.6052/j.issn.1000 - 4750.2020.04.0249

[17] LIU Ming, XU Zhitong, FU Renli. Micromechanical and microstructure characterization of BaO—Sm_2O_3—5TiO_2 ceramic with addition of Al_2O_3[J]. Ceramics International, 2022, 48(1): 992. DOI: 10.1016/j.ceramint.2021.09.184

[18] GAO Chenghui, YAO Ligang, LIU Ming. Berkovich nanoindentation of borosilicate K9 glass [J]. Optical Engineering, 2018, 57(3): 034104. DOI: 10.1117/1.OE.57.3.034104

[19] GAO Chenghui, LIU Ming. Instrumented indentation of fused silica by Berkovich indenter [J]. Journal of Non-Crystalline Solids, 2017, 475: 151. DOI: 10.1016/j.jnoncrysol.2017.09.006

[20] YANG Fuqian, LIU Ming. Analysis for the indentation with a flat indenter on an elastic-perfectly plastic thin film [J]. Journal of Computational and Theoretical Nanoscience, 2014, 11(1): 265.

DOI：10.1166/jctn.2014.3347

[21]张雪，程赫明，李建云，等. T10 钢经常压高速气雾淬火工艺处理后组织及性能的研究[J]. 热加工工艺，2015，44(6)：219
ZHANG Xue，CHENG Heming，LI Jianyun，et al. Study on microstructure and mechanical properties of T10 steel quenched by atomized water with nitrogen gas[J]. Hot Working Technology，2015，44(6)：219. DOI：10.14158/j.cnki.1001－3814.2015.06.066

[22]罗少强，舒林森，王波，等. 1 mm 厚 304 L 不锈钢冷轧板的低周疲劳性能分析[J]. 陕西理工大学学报(自然科学版)，2019，35(2)：6
LUO Shaoqiang，SHU Linsen，WANG Bo，et al. Analysis of low cycle fatigue properties of 1 mm thick 304 L stainless steel cold rolled sheet[J]. Journal of Shaanxi University of Technology (Natural Science Edition)，2019，35(2)：6. DOI：10.3969/j.issn.1673－2944.2019.02.002

[23]刘松. 金属材料显微硬度压痕尺寸效应分析及其试验研究[J]. 失效分析与预防，2019，14(4)：225
LIU Song. Size effect analysis and experimental study of microhardness indentation of metal materials[J]. Failure Analysis and Prevention，2019，14(4)：225. DOI：10.3969/j.issn.1673－6214.2019.04.002

[24]GIANNAKOPOULOS A E，ZISIS T. Analysis of Knoop indentation[J]. International Journal of Solids and Structures，2011，48(1)：175. DOI：10.1016/j.ijsolstr.2010.09.014

[25]LIU Ming，ZHENG Qiang，WANG Xin，et al. Characterization of distribution of residual stress in shot-peened layer of nickel-based single crystal superalloy DD6 by nanoindentation technique[J]. Mechanics of Materials，2022，164：104143. DOI：10.1016/j.mechmat.2021.104143

[26]AMITAY-SADOVSKY E，WAGNER H D. Hardness and Young's modulus of transcrystalline polypropylene by vickers and Knoop microindentation[J]. Journal of Polymer Science Part B：Polymer Physics，1999，37(6)：523. DOI：10.1002/(sici)1099－0488(19990315)37:6<523:aid－polb4>3.0.co;2－2

[27]MURUGESAN G，KALAINATHAN S. Experimental and theoretical modelling of Vickers，Knoop microhardness and laser damage threshold studies on $Ca_{0.9}Nd_{0.1}Ti_{0.9}Al_{0.1}O_3$ single crystals grown by optical floating zone technique[J]. Journal of Alloys and Compounds，2016，677：121. DOI：10.1016/j.jallcom.2016.03.178

[28]SCHUH C A，ARGON A S，NIEH T G，et al. The transition from localized to homogeneous plasticity during nanoindentation of an amorphous metal[J]. Philosophical Magazine，2003，83(22)：2585. DOI：10.1080/14786430310001180l2

[29]YU Weiping，BLANCHARD J P. An elastic-plastic indentation model and its solutions[J]. Journal of Materials Research，1996，11(9)：2358. DOI：10.1557/JMR.1996.0299

[30]VANDEPERRE L J，GIULIANI F，CLEGG W J. Effect of elastic surface deformation on the relation between hardness and yield strength[J]. Journal of Materials Research，2004，19(12)：3704. DOI：10.1557/JMR.2004.0473

(编辑　张　红)

(上接第 107 页)

[8]张恒，李和言，昌和，等. 湿式多片离合器摩擦转矩衰减特性分析[J]. 哈尔滨工业大学学报，2018，50(7)：94
ZHANG Heng，LI Heyan，CHANG He，et al. Experimental study on attenuation characteristics of friction torque transferred by the wet multi-disc clutch[J]. Journal of Harbin Institute of Technology，2018，50(7)：94. DOI:10.11918/j.issn.0367－6234.201709141

[9]于亮，马彪，陈漫，等. 润滑油温度对铜基湿式离合器摩擦转矩的影响[J]. 机械工程学报，2020，56(20)：155
YU Liang，MA Biao，CHEN Man，et al. Influence of the temperature of lubricating oil on the friction torque of Cu-based wetclutch[J]. Journal of Mechanical Engineering，2020，56(20)：155. DOI：10.3901/JME.2020.20.155

[10]JANG J Y，KHONSARI M M. Thermal characteristics of a wet clutch[J]. Journal of Tribology，1999，121(3)：610. DOI：10.1115/1.2834111

[11]JANG J Y，KHONSARI M M，MAKI R. Three-dimensional thermohydrodynamic analysis of a wet clutch with consideration of grooved friction surfaces[J]. Journal of Tribology，2011，113(1)：1. DOI：10.1115/1.4003019

[12]LI M，KHONSARI M M，MCCARTHY D M C，et al. Parametric analysis for a paper-based wet clutch with groove consideration[J]. Tribology International，2014，80：222. DOI：10.1016/j.triboint.2014.06.023

[13]郑良杰，马彪，陈漫，等. 花键摩擦对湿式多片离合器分离过程影响[J]. 哈尔滨工业大学学报，2022，54(7)：89
ZHENG Liangjie，MA Biao，CHEN Man，et al. Influence of spline friction coefficient on a wet multi-disc clutch in the disengaging process[J]. Journal of Harbin Institute of Technology，2022，54(7)：89. DOI：10.11918/202107082

[14]陈漫，刘宇键，于亮，等. 湿式多片离合器结构特征对接触压力特性的影响[J]. 兵工学报，2023，44(2)：406
CHEN Man，LIU Yujian，YU Liang，et al. Effects of structural characteristics of a wet multi-disk clutch on contact pressure[J]. Acta Armamentarii，2023，44(2)：406. DOI：10.12382/bgxb.2021.0618

[15]于亮，李和言，马彪，等. 多片离合器轴向平均比压的衰减特性[J]. 吉林大学学报(工学版)，2018，48(4)：990
YU Liang，LI Heyan，MA Biao，et al. Analysis and verification for average axial pressure attenuation of multi-disc clutch[J]. Journal of Jilin University (Engineering and Technology Edition)，2018，48(4)：990. DOI：10.13229/j.cnki.jdxbgxb20170269

(编辑　张　红)