

DOI: 10.11918/202004136

山地轨道运载机牵引钢丝绳空间结构分析与几何建模

欧阳玉平¹⁻⁴, 王天玉¹, 孙 晗¹, 孙旭东^{1,2}, 洪添胜³, 黄志平⁴, 姜小刚^{1,2}

(1. 华东交通大学 机电与车辆工程学院, 南昌 330013; 2. 载运工具与装备教育部重点实验室(华东交通大学), 南昌 330013;
3. 华南农业大学 工程学院, 广州 510642; 4. 广东振声科技股份有限公司, 广东 梅州 514700)

摘要: 山地轨道运载机牵引系统主要包括驱动卷筒、钢丝绳及载物滑车, 钢丝绳是其核心组成部分. 目前还没有明确针对山地轨道运载机钢丝绳的空间数学模型, 为了进一步研究钢丝绳力学模型及失效行为, 需要推导空间几何数学模型与三维模型, 从而避免大规模试验来探究钢丝绳的使用寿命及其损伤规律. 首先, 山地轨道运载机属于农业运载新式机械, 作业环境复杂, 因此本文对钢丝绳绳径进行了重新计算. 然后利用微分几何学及空间坐标变换原理, 推导了山地轨道运载机牵引钢丝绳在直立及弯曲状态的空间螺旋方程. 最后, 为更直观了解该类钢丝绳的结构, 通过已建立钢丝绳空间数学模型, 运用 MATLAB 参数化功能及 Solidworks 软件曲线、扫描和实体阵列等功能建立钢丝绳三维实体模型. 结果表明, 通过推导出的钢丝绳在直立及弯曲状态的空间螺旋方程, 得出该类钢丝绳直线段和弯曲段的曲率与挠率呈明显的周期性变化规律, 并在三维建模中得到钢丝绳股和丝参考点系列坐标. 提出了适用于山地轨道运载机牵引钢丝绳的空间螺旋方程, 为后续轨道运载机钢丝绳力学模型建立及损伤机理的研究奠定基础.

关键词: 农业运输机械; 钢丝绳; 空间螺旋方程; 曲率; 挠率; 牵引式双轨运输机

中图分类号: S229+1

文献标志码: A

文章编号: 0367-6234(2021)01-0184-09

Spatial structure analysis and geometric modeling of traction wire rope of mountain track carrier

OUYANG Yuping¹⁻⁴, WANG Tianyu¹, SUN Han¹, SUN Xudong^{1,2}, HONG Tiansheng³,
HUANG Zhiping⁴, JIANG Xiaogang^{1,2}

(1. School of Mechanical and Electrical and Vehicle Engineering, University of East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China; 2. Key Laboratory of Transportation Tools and Equipment, Ministry of Education(University of East China Jiaotong University), Nanchang 330013, China; 3. College of Engineering, University of South China Agricultural University, Guangzhou 510642, China; 4. Guangdong Zhensheng Technology Co. Ltd., Meizhou 514700, Guangdong, China)

Abstract: Traction system of mountainous track carrier mainly includes driving drum, wire rope, and cargo trolley, but the wire rope is the core component. At present, there is no clear spatial mathematical model for the wire rope of mountainous track carrier. To further study the mechanical model and failure behavior of the wire rope, it is necessary to derive the spatial geometric mathematical model and three-dimensional model, so as to avoid large-scale tests to explore the service life and damage rules of the wire rope. The spatial spiral equation of the traction wire rope in the upright and curved state are derived by using differential geometry and the principle of spatial coordinate transformation, and the software of MATLAB and Solidworks are utilized to parameterize design and establish entity array. The results show that the curvature and deflection of the straight section and the bending section of the wire rope are periodically changing. The space spiral equation provides a basis for the establishment of mechanical model of mountainous track carrier wire rope and the study of damage mechanism.

Keywords: agricultural transportation machinery; wire rope; space spiral equation; curvature; torsion; trailed double rail transport

收稿日期: 2020-04-24

基金项目: 国家自然科学基金(31960497); 现代农业产业技术体系建设专项(CARS-27); 江西省重点研发计划(20171BBF60022); 江西省协同创新专项资金(赣财教指[2014]156号)

作者简介: 欧阳玉平(1986—), 男, 讲师, 博士;
洪添胜(1955—), 男, 教授, 博士生导师

通信作者: 洪添胜, tshong@scau.edu.cn

随着我国水果产业的壮大, 实现果园运输机械化不仅仅是农业机械化的一个重要组成部分, 同时也是水果产业不断发展的重要标志. 传统的果园种植缺少科学合理规划, 立地条件差, 果树大多生长在难以形成较完善交通运输网, 甚至是陡峭的梯田上. 这就导致了常规的水果采运车难以在该环境下推广

使用,直接给成熟果子的运输造成了较大的困难^[1]. 目前,我国 90%的柑橘种植在山地,土地条件差,山地果园机械化水平低,生产主要靠人力完成,劳动强度非常大. 特别是山地果园肥料和果品运送方面主要靠肩挑或背篓背负,必须用机械化代替艰苦的劳动. 柑橘产业要持续发展,农机农艺相融合是唯一出路. 未来强壮的“果农”就是农机农艺融合^[2]. 山地果园钢丝绳牵引式双轨运输机是一种由钢丝绳牵引,载物滑车沿着具有一定坡度的轨道行驶的运载工具,轨道由 2 条相互平行的圆管及辅助横梁焊接而成,轨道坡度集中在 $10^\circ \sim 40^\circ$ 之间^[3]. 国内外已研制出多种山地果园轨道运输机械,山地果园牵引式双轨运输机是其中一种代表机型^[4]. 该运输机缓解了山地地区果农的劳动强度,有效实现了果品及其他农资省力化运载需求^[5]. 由于运输机作业环境复杂,运载果品时若频繁振荡,易造成钢丝绳振荡冲击损伤,因此有必要对该类运输机的牵引系统的失效行为及钢丝绳受力情况进行研究^[6].

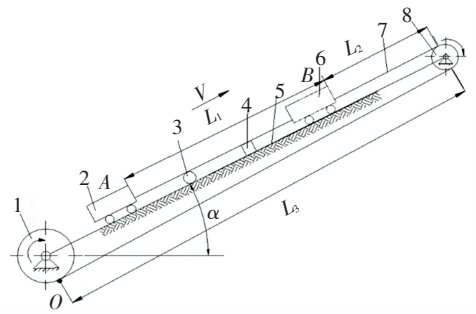
钢丝绳是一种金属结构,在许多工业工程、海洋工程和土木工程领域已经使用了很长一段时间^[7-8],在吊桥、起重机、建筑电梯和矿井提升机等领域也有其应用^[9-10]. 钢丝绳经常被使用,因为它们具有较高的抗拉强度和弯曲灵活性^[11],而且与其他结构相比,它们具有更高的强度和更长的寿命^[12]. 在理论推导、实验研究和有限元模拟这三种途径中,几何模型是研究钢丝绳力学模型及失效行为的研究基础. 通过精确的数学表达式,建立钢丝绳的精确几何模型,从而进行相应的力学分析^[13]. 王等^[14]提出了钢丝绳和股线中心线的数学表示及其半径的计算方法,给出了钢丝绳和股线缠绕关系的空间参数几何方程,并用经验值或迭代法以外的方法计算钢丝和钢绞线的半径是合理的. I. I. Argatov 等^[15]建立了基于 Archard-Kragelsky 磨损定律的微动磨损数学模型,并给出了磨损定律参数校准的示例. W. Ma 等^[16]首先推导出每根导线的质心轴(单、双或三螺旋)的坐标方程,然后利用 MatlabTM生成形成该轴的控制点坐标的数据文件,最后根据得到的基螺旋的坐标方程,用递推法建立了高水平螺旋. 吴等^[17]利用 Frenet 框架和微分几何建立了钢丝绳二次螺旋的数学模型,并在此基础上推导出二次螺旋线的几何参数,利用 Love 弹性细杆理论建立钢丝绳的等效力学模型,推导出钢丝绳的等效弹性模量和等效剪切模量的计算公式. Ivan Argatov^[18]建立了简单螺旋钢丝绳股的精细离散数学模型,通过泊松比和局部接触变形(钢丝压扁)研究了钢绞线横向收缩的影响.

以上研究都对不同环境下的钢丝绳给出了精准的空间几何表达式,目的都是为了更好地研究钢丝绳力学性能及其失效行为,但针对山地轨道运载机牵引钢丝绳的空间几何表达式目前还没有明确的定论. 因此,本文为了后续更深入研究山地轨道运载机牵引钢丝绳力学模型的建立与损伤机理的研究,对适用于山地轨道运载机牵引钢丝绳的空间几何结构进行数学公式推导,同时推导了曲率及挠率方程及其连续变化规律,这样有利于减少在不同参数和操作条件下进行昂贵的试验测试的需要.

1 运输机钢丝绳选型及捻制特征

1.1 运输机钢丝绳选型

山地轨道牵引式双轨运输机属于新式农用运输机,钢丝绳应用特点与矿山或港口起重机等有较大差别,需对钢丝绳绳径进行重新计算,避免绳径选择不当,造成浪费或强度不够. 运输机钢丝绳作业时,钢丝绳在卷筒、约束轮及滑轮等约束下沿弯曲轨道转弯运行,应用工况与农用索道类似,选用圆股线接触右交互捻(SZ),型号为 $6 \times 19 + FC$ 类钢丝绳^[19]. 在前面研究中建立钢丝绳牵引系统虚拟样机模型^[4],简化示意图如图 1 所示,图 1 中 A 点为载物滑车最低滑行位置, B 点为载物滑车最高滑行位置.



1—卷筒; 2—载物滑车; 3—托辊; 4—横梁; 5—轨道; 6—载物滑车; 7—钢丝绳; 8—滑轮

图 1 运输机牵引系统示意图

Fig.1 Structure of transport traction system

钢丝绳最大有效长度与整绳最小破断拉力应满足式(1)、式(2)^[20],当载物滑车运行至 A 点时,钢丝绳与卷筒相接处 O 点承受最大的静拉力如式(3)所示,钢丝绳质量如式(4)^[20]所示,整绳最大静拉力如式(5)所示:

$$L = L_1 + L_2 + L_3, \quad (1)$$

$$F_{\max} = \frac{F_{\min}}{K_a}, \quad (2)$$

$$F_{\max} - Mg(\sin \alpha + f_1 \cos \alpha) + mgL(\sin \alpha + f_2 \cos \alpha), \quad (3)$$

$$m = K_g D^2, \quad (4)$$

$$F_{\max} = Mg(\sin \alpha + f_1 \cos \alpha) + K_g D^2 g L (\sin \alpha + f_2 \cos \alpha). \quad (5)$$

式中: F_{\max} 为整绳最大静拉力, kN; F_{\min} 为钢丝绳最小破断拉力, kN; K_a 为钢丝绳许用安全系数; L_1 为 A、B 两点间距离, m; L_2 为 B 点至顶端滑轮距离, m; L_3 为卷筒至顶端滑轮距离, m; M 为载物滑车及所载物资总质量, kg; g 为重力加速度, m/s^2 ; α 为轨道倾角, °; f_1 为轮轨间滚动摩擦系数; f_2 为钢丝绳与托辊间摩擦系数; m 为钢丝绳质量, kg/m; D 为钢丝绳公称直径, mm; K_g 为钢丝绳重量系数, $kg/100 m \cdot mm^2$.

钢丝绳最小破断拉力 F_n 、钢丝绳破断拉力总和 $F_{\min}^{[21]}$ 为

$$F_n = K_{\min} D^2 E_t, \quad (6)$$

$$F_{\min} = K_h F_n, \quad (7)$$

式中: E_t 为钢丝绳公称抗拉强度, MPa; K_{\min} 为钢丝绳最小破断拉力系数; K_h 为破断拉力换算系数.

将式(6)代入式(7)得

$$F_{\min} = K_h K_{\min} D^2 E_t, \quad (8)$$

将式(5)及式(8)代入式(2)得如下关系式:

$$Mg(\sin \alpha + f_1 \cos \alpha) + K_g D^2 g L (\sin \alpha + f_2 \cos \alpha) \leq \frac{K_h K_{\min} D^2 E_t}{K_a}, \quad (9)$$

$$d \geq \sqrt{\frac{M(\sin \alpha + f_1 \cos \alpha)}{\frac{K_h K_{\min} E_t}{K_a g} - K_g L (\sin \alpha + f_2 \cos \alpha)}}. \quad (10)$$

对于 6×19+FC 钢丝绳, f_1 取 0.05, f_2 取 0.1^[19]; 重量系数 K_g 取 0.36, 最小破断拉力系数 K_{\min} 取 0.338, 破断拉力换算系数 K_h 取 1.214, g 取 9.8 m/s^2 ; K_a 取 7, α 取 40°, M 取 500 kg, L 取 200 m; E_t 取 1 670 MPa^[20]; 于是

$$d \geq \sqrt{\frac{500(\sin 40^\circ + 0.05 \cos 40^\circ)}{\frac{1.214 \times 0.338 \times 1670}{9.8 \times 7.1} - 0.36 \times 2(\sin 40^\circ + 0.1 \cos 40^\circ)}} \approx$$

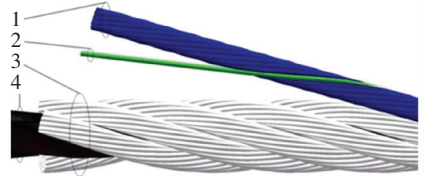
6.03 mm.

查阅机械设计手册^[19], 选取钢丝绳的直径为 7.7 mm.

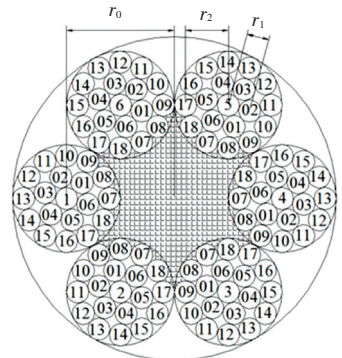
1.2 钢丝绳捻制特征

6×19+FC 类圆股右交互捻钢丝绳由侧丝绕中心丝左旋捻制成单股, 再由 6 侧股绕绳芯右旋捻制而成, 侧股侧丝由内层丝及外层丝组成. 所采用绳芯材质为纤维, 因此该类钢丝绳只有螺旋股, 无直股. 钢丝绳捻制示意图如图 2 所示, 每股由 1 条中心丝, 6 条内层丝与 12 条外层丝捻制而成. 为便于阐述钢丝绳空间位置关系, 对股及丝进行编号, 以初始

截面最左端为第 1 股, 逆时针依次编为第 1、2、3、4、5、6 股; 侧股中心丝逆时针依次编为 1、2、3、4、5、6 丝; 侧股内层丝以每股中心线与绳芯中心线连线逆时针的第一钢丝中心为第 01 丝, 逆时针依次编为第 02、03、04、05、06 丝; 外层丝以每股中心线与绳芯中心线连线逆时针的第一钢丝中心为第 07 丝, 逆时针依次编为第 08、09、10、11、12、13、14、15、16、17、18 丝.



(a) 钢丝绳整体示意图



(b) 钢丝绳截面示意图

1—侧股; 2—侧股单丝; 3—整绳; 4—纤维绳芯; r_0 —绳芯至股芯中心距; r_1 —内层丝芯至股芯中心距; r_2 —外层丝芯至股芯中心距

图 2 钢丝绳捻制示意图

Fig.2 Wire rope twisting diagram

将整绳解剖后依次展开, 如图 3 所示, $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ 分别表示股在绳中、内层丝在股中、外层丝在股中的捻角; r_0, r_1, r_2 分别表示股在绳中螺旋半径(捻制半径)、内层丝在股中螺旋半径、外层丝在股中螺旋半径; S, S_0, S_1, S_2 分别表示整绳、侧股(中心丝)、侧股内层丝、侧股外层丝长度; $\alpha_a, \alpha_b, \alpha_c$ 分别表示钢丝绳在捻制过程中, 股在绳中转过角度、内层丝在股中转过角度、外层丝在股中转过角度.

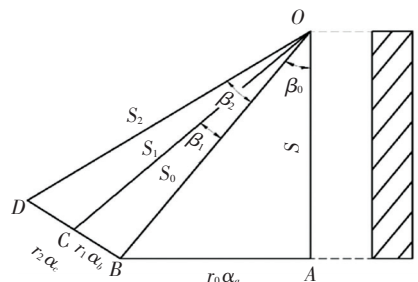


图 3 钢丝绳展开示意图

Fig.3 Wire rope expansion diagram

由图 3 几何位置可知:

$$AB = r_0\alpha_a, BC = r_1\alpha_b, BD = r_2\alpha_c, \quad (11)$$

$$\beta_0 = 18.30^\circ, \beta_1 = 7.16^\circ, \beta_2 = 13.10^\circ.$$

由钢丝绳已知数据和几何关系可得

结合钢丝绳已求结构参数, 型号为 6×19+FC 钢丝绳的关键几何参数, 如表 1 所示。

$$r_1 = 0.50 \text{ mm}, r_2 = 0.97 \text{ mm}, r_0 = 2.63 \text{ mm},$$

表 1 运输机钢丝绳几何参数

Tab.1 Geometric parameters of transport wire rope

类别	整绳截面积/mm ²	整绳质量/(kg·m ⁻¹)	捻角/(°)	捻距/mm	股径/mm
6×19+FC	22.4	0.21	18.7	48.8	2.43
丝层	钢丝直径/mm	捻角/(°)	螺旋半径/mm	捻距/mm	
芯层	0.50	18.30	2.63	50.00	
内层	0.50	7.16	0.50	25.00	
外层	0.50	13.10	0.97	25.00	

2 钢丝绳螺旋方程

2.1 直线段钢丝绳空间螺旋方程

直线段钢丝绳六侧股一次螺旋线的初始捻制角依次记为 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5$ 及 θ_6 , 以逆时针为正, 初始捻制角分别为 $0^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 240^\circ, 300^\circ$; 侧股中 6 条内层丝二次螺旋线的初始捻制角 $\theta_{01} \sim \theta_{06}$ 分别为 $45^\circ, 105^\circ, 165^\circ, 225^\circ, 285^\circ, 345^\circ$; 侧股中 12 条外层丝二次螺旋线的初始捻制角 $\theta_{07} \sim \theta_{18}$ 分别为 $0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ, 180^\circ, 210^\circ, 240^\circ, 270^\circ, 300^\circ, 330^\circ$ 。

本文以第 1 股及第 1 股第 18 丝为研究对象, 建立直线段钢丝绳空间曲线模型, 如图 4 所示。图 4 中侧股中心丝中心线上点 A 用向量 OA 表示, 侧丝中心线上点 B 用 OB 表示, 点 A 处的切向量、法向量、从法向量依次记为 t, n, b 。设向量 AB 为 Frenet 标架 $n-b-t$ 内的平面矢量, 则侧丝空间二次螺旋线可由向量 $OB = OA + AB$ 表示。

令向量 OA 在 $x-y-z$ 标架上为 OA^x , 向量 AB 在 $n-b-t$ 标架上为 AB^n , 由图 4 钢丝的位置关系及

钢丝绳已知参数可得

$$OA^x = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_0 \cos(\theta_1 + \alpha_a) \\ r_0 \sin(\theta_1 + \alpha_a) \\ \frac{r_0 \alpha_a}{\tan \beta_0} \end{Bmatrix}, \quad (12)$$

$$AB^n = \begin{Bmatrix} n \\ b \\ t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_2 \cos(\theta_{18} - \alpha_c) \\ r_2 \sin(\theta_{18} - \alpha_c) \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (13)$$

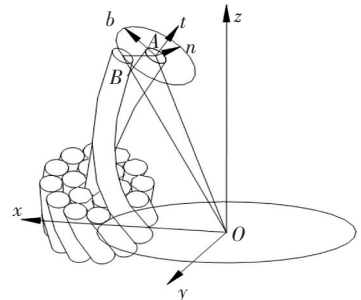


图 4 钢丝绳第 1 股中心丝及其第 18 丝空间曲线模型

Fig.4 Space curve model of first share center wire and its eighteenth wire

侧股缠绕于绳芯转换矩阵 $[n, b, t]$ 表达式为

$$[n, b, t] = \begin{bmatrix} -\cos(\theta_1 + \alpha_a) & \cos \beta_0 \sin(\theta_1 + \alpha_a) & -\sin \beta_0 \sin(\theta_1 + \alpha_a) \\ -\sin(\theta_1 + \alpha_a) & -\cos \beta_0 \cos(\theta_1 + \alpha_a) & \sin \beta_0 \cos(\theta_1 + \alpha_a) \\ 0 & \sin \beta_0 & \cos \beta_0 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

为求向量 OB 在坐标系 $x-y-z$ 的表达式, AB^n 需转换为 $x-y-z$ 标架表达式 AB^x 。由空间坐标变换原理可知, 向量 AB 在坐标系 $x-y-z$ 中表达式可表

$$AB^x = [n, b, t] \times AB^n. \quad (15)$$

将式(13)及(14)代入式(15)可得

$$AB^x = [n, b, t] \times AB^n = \begin{Bmatrix} r_2 [\cos \beta_0 \sin(\theta_1 + \alpha_a) \sin(\theta_{18} - \alpha_c) - \cos(\theta_1 + \alpha_a) \cos(\theta_{18} - \alpha_c)] \\ r_2 [-\cos \beta_0 \cos(\theta_1 + \alpha_a) \sin(\theta_{18} - \alpha_c) - \sin(\theta_1 + \alpha_a) \cos(\theta_{18} - \alpha_c)] \\ r_2 \sin \beta_0 \sin(\theta_{18} - \alpha_c) \end{Bmatrix}. \quad (16)$$

由式(12)及(16)可知, 向量 OB 在坐标系 $x-y-z$ 中表达式为

$$OB^x = OA^x + AB^x = \left\{ \begin{array}{l} r_0 \cos(\theta_1 + \alpha_a) + r_2 [\cos \beta_0 \sin(\theta_1 + \alpha_a) \sin(\theta_{18} - \alpha_c) - \cos(\theta_1 + \alpha_a) \cos(\theta_{18} - \alpha_c)] \\ r_0 \sin(\theta_1 + \alpha_a) + r_2 [-\cos \beta_0 \cos(\theta_1 + \alpha_a) \sin(\theta_{18} - \alpha_c) - \sin(\theta_1 + \alpha_a) \cos(\theta_{18} - \alpha_c)] \\ \frac{r_0 \alpha_a}{\tan \beta_0} + r_2 \sin \beta_0 \sin(\theta_{18} - \alpha_c) \end{array} \right\} \quad (17)$$

令

$$\left\{ \begin{array}{l} e_1 = \frac{r_0 \tan \beta_1}{r_1 \sin \beta_0}, \\ e_2 = \frac{r_0 \tan \beta_2}{r_2 \sin \beta_0}, \end{array} \right. \quad (18) \quad OA_i^x = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_0 \cos(\theta_i + \alpha_a) \\ r_0 \sin(\theta_i + \alpha_a) \\ \frac{r_0 \alpha_a}{\tan \beta_0} \end{Bmatrix} \quad (19)$$

由式(12)可得, 直线段钢丝绳第 i 股中心丝方程表达式:

$$OB_{ij}^x = \left[\begin{array}{l} r_0 \cos(\theta_i + \alpha_a) + r_1 [\cos \beta_0 \sin(\theta_i + \alpha_a) \sin(\theta_j - e_1 \alpha_a) - \cos(\theta_i + \alpha_a) \cos(\theta_j - e_1 \alpha_a)] \\ r_0 \sin(\theta_i + \alpha_a) + r_1 [-\cos \beta_0 \cos(\theta_i + \alpha_a) \sin(\theta_j - e_1 \alpha_a) - \sin(\theta_i + \alpha_a) \cos(\theta_j - e_1 \alpha_a)] \\ \frac{r_0 \alpha_a}{\tan \beta_0} + r_1 \sin \beta_0 \sin(\theta_j - e_1 \alpha_a) \end{array} \right], \quad (20)$$

$$OB_{ik}^x = \left[\begin{array}{l} r_0 \cos(\theta_i + \alpha_a) + r_2 [\cos \beta_0 \sin(\theta_i + \alpha_a) \sin(\theta_k - e_2 \alpha_a) - \cos(\theta_i + \alpha_a) \cos(\theta_k - e_2 \alpha_a)] \\ r_0 \sin(\theta_i + \alpha_a) + r_2 [-\cos \beta_0 \cos(\theta_i + \alpha_a) \sin(\theta_k - e_2 \alpha_a) - \sin(\theta_i + \alpha_a) \cos(\theta_k - e_2 \alpha_a)] \\ \frac{r_0 \alpha_a}{\tan \beta_0} + r_2 \sin \beta_0 \sin(\theta_k - e_2 \alpha_a) \end{array} \right]. \quad (21)$$

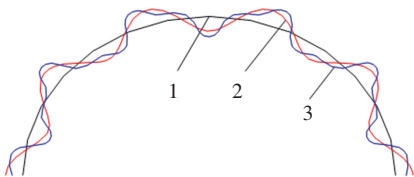
2.2 弯曲段钢丝绳空间螺旋线方程

运输机钢丝绳弯曲段体现在钢丝绳与约束轮、滑轮及卷筒接触, 如图 5 所示. 为研究钢丝绳弯曲段空间螺旋方程, 以钢丝绳绕过滑轮为例进行说明. 绳与轮接触时, 绳中心轴线呈弯曲圆弧状态, 绳中各股股芯中心线绕滑轮圆弧呈空间一次螺旋线, 侧股侧丝中心线绕圆弧呈二次螺旋线, 如图 6 所示.



图 5 弯曲段钢丝绳接触示意图

Fig.5 Contact sketch of bending section of wire rope



1—钢丝绳中心路径; 2—钢丝绳单股中心路径; 3—钢丝绳单股侧丝中心路径

图 6 过滑轮时钢丝绳钢丝缠绕示意图

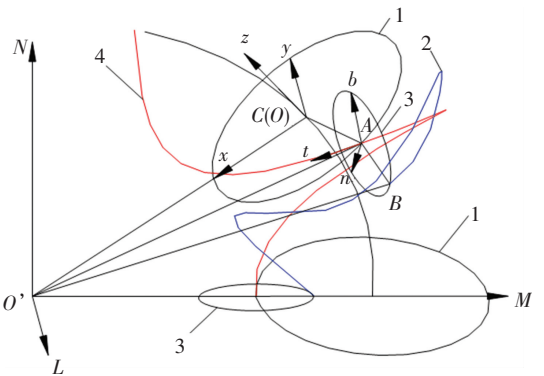
Fig.6 Contact diagram of wire rope when winding pulley

为构建弯曲段钢丝绳空间螺旋方程, 建立绳轮

将式(18) 代入(17) 可得直线段钢丝绳第 i 股内层第 j 丝空间方程表达式与直线段钢丝绳第 i 股外层第 k 丝方程表达式:

接触空间曲线模型, 如图 7 所示. 以动点 C 替代直线段钢丝绳坐标系原点 O , 建立弯曲段钢丝绳空间直角坐标系 LMN . 图 7 中一次螺旋线绕弧线旋转, 二次螺旋线绕一次螺旋线旋转, 弯曲状态侧丝中心线的二次螺旋线向量 $O'B$ 的表达式为

$$O'B = O'C + CA + AB. \quad (22)$$



1—侧股螺旋半径(整绳螺旋半径)对应圆; 2—侧股侧丝中心线; 3—侧股侧丝螺旋半径画出的圆; 4—侧股股芯中心线

图 7 过滑轮时钢丝绳空间曲线模型

Fig.7 Wire rope space curve model when winding pulley

图 7 中, 将 $x-y-z$ 标架上一次螺旋线与二次螺旋线分别视为建立在新标架 $L-M-N$ 弯曲一次螺旋线与二次螺旋线, 则向量 $O'C$ 在标架 $L-M-N$

N 的表达式 $O'C^l$ 为

$$O'C^l = \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ r_3 \cos \alpha_d \\ r_3 \sin \alpha_d \end{Bmatrix}. \quad (23)$$

式中: α_d 为钢丝绳在滑轮中转过角度; r_3 为滑轮圆心到钢丝绳绳芯距离。

标架 $x - y - z$ 向标架 $L - M - N$ 转换, 对坐标系

$$[N, B, T] = [X, Y, Z] \times [n, b, t] =$$

$$\begin{bmatrix} -\sin(\theta_1 + \alpha_a) & -\cos\beta_0 \cos(\theta_1 + \alpha_a) & \sin\beta_0 \cos(\theta_1 + \alpha_a) \\ \cos\alpha_d \cos(\theta_1 + \alpha_a) & -\sin\beta_0 \sin\alpha_d - \cos\beta_0 \cos\alpha_d \sin(\theta_1 + \alpha_a) & -\cos\beta_0 \sin\alpha_d + \sin\beta_0 \cos\alpha_d \sin(\theta_1 + \alpha_a) \\ \sin\alpha_d \cos(\theta_1 + \alpha_a) & \sin\beta_0 \cos\alpha_d - \cos\beta_0 \sin\alpha_d \sin(\theta_1 + \alpha_a) & \cos\beta_0 \cos\alpha_d + \sin\beta_0 \sin\alpha_d \sin(\theta_1 + \alpha_a) \end{bmatrix}. \quad (25)$$

AB^n 转换为坐标系 LMN 上的表达式 AB^l 为

$$AB^l = [N, B, T] \times AB^n =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -r_2 \sin(\theta_1 + \alpha_a) \cos(\theta_{18} - \alpha_c) - r_2 \cos\beta_0 \cos(\theta_1 + \alpha_a) \sin(\theta_{18} - \alpha_c) \\ r_2 \cos\alpha_d \cos(\theta_1 + \alpha_a) \cos(\theta_{18} - \alpha_c) - r_2 \sin(\theta_{18} - \alpha_c) [\cos\beta_0 \cos\alpha_d \sin(\theta_1 + \alpha_a) - \sin\beta_0 \sin\alpha_d] \\ r_2 \sin\alpha_d \cos(\theta_1 + \alpha_a) \cos(\theta_{18} - \alpha_c) - r_2 \sin(\theta_{18} - \alpha_c) [\cos\beta_0 \sin\alpha_d \sin(\theta_1 + \alpha_a) + \sin\beta_0 \cos\alpha_d] \end{array} \right\}. \quad (26)$$

由图 7 可知, 弯曲的一次螺旋线 $O'A^l$ 的向量方程表达式为

$$O'A^l = O'C^l + CA^l, \quad (27)$$

$$CA^x = \begin{Bmatrix} r_0 \cos(\theta_1 + \alpha_a) \\ r_0 \sin(\theta_1 + \alpha_a) \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (28)$$

CA^x 转换为坐标系 LMN 上的表达式 CA^l 为

$$CA^l = [X, Y, Z] \times CA^x =$$

$$O'B^l = O'C^l + CA^l + AB^l =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin(\theta_1 + \alpha_a) [r_0 - r_2 \cos(\theta_{18} - \alpha_c)] - r_2 \cos\beta_0 \cos(\theta_1 + \alpha_a) \sin(\theta_{18} - \alpha_c) \\ r_3 \cos\alpha_d - \cos\alpha_d \cos(\theta_1 + \alpha_a) [r_0 + r_2 \cos(\theta_{18} - \alpha_c)] - r_2 \sin(\theta_{18} - \alpha_c) [\cos\beta_0 \cos\alpha_d \sin(\theta_1 + \alpha_a) - \sin\beta_0 \sin\alpha_d] \\ r_3 \sin\alpha_d - \sin\alpha_d \cos(\theta_1 + \alpha_a) [r_0 + r_2 \cos(\theta_{18} - \alpha_c)] - r_2 \sin(\theta_{18} - \alpha_c) [\cos\beta_0 \sin\alpha_d \sin(\theta_1 + \alpha_a) + \sin\beta_0 \cos\alpha_d] \end{array} \right\}. \quad (31)$$

图 8 为钢丝绳侧股芯丝与滑轮接触示意图, 式 (31) 中含有 3 个未知量, 为求解式 (31) 关于 α_a 的表达式, 需求出图 8 中各变量的相互关系。

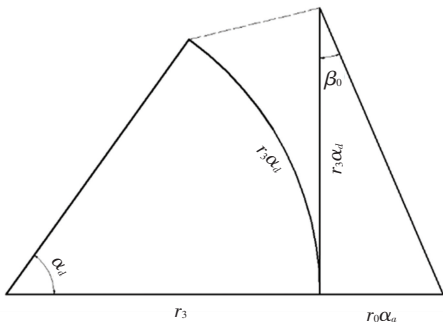


图 8 钢丝绳侧股芯丝与滑轮接触示意图

Fig. 8 Contact diagram between side wire of wire rope and pulley

LMN 的转换矩阵为

$$[X, Y, Z] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\cos\alpha_d & 0 & -\sin\alpha_d \\ -\sin\alpha_d & 0 & \cos\alpha_d \end{bmatrix}, \quad (24)$$

标架 $n - b - t$ 对坐标系 LMN 的转换矩阵 $[N, B, T]$ 为

$$\begin{Bmatrix} r_0 \sin(\theta_1 + \alpha_a) \\ -r_0 \cos\alpha_d \cos(\theta_1 + \alpha_a) \\ -r_0 \sin\alpha_d \cos(\theta_1 + \alpha_a) \end{Bmatrix}, \quad (29)$$

$$O'A^l = O'C^l + CA^l =$$

$$\begin{Bmatrix} r_0 \sin(\theta_1 + \alpha_a) \\ r_3 \cos\alpha_d - r_0 \cos\alpha_d \cos(\theta_1 + \alpha_a) \\ r_3 \sin\alpha_d - r_0 \sin\alpha_d \cos(\theta_1 + \alpha_a) \end{Bmatrix}, \quad (30)$$

在弯曲段钢丝绳中, α_d 与 α_a 关系为

$$\alpha_d = \frac{r_0}{r_3 \tan \beta_0} \alpha_a, \quad (32)$$

令

$$e_3 = \frac{r_0}{r_3 \tan \beta_0}, \quad (33)$$

将式 (18) 及式 (33) 代入式 (30) 可得弯曲段钢丝绳第 i 股中心丝方程表达式为

$$O'A_i^l = \begin{Bmatrix} r_0 \sin(\theta_i + \alpha_a) \\ r_3 \cos e_3 \alpha_a - r_0 \cos e_3 \alpha_a \cos(\theta_i + \alpha_a) \\ r_3 \sin e_3 \alpha_a - r_0 \sin e_3 \alpha_a \cos(\theta_i + \alpha_a) \end{Bmatrix}. \quad (34)$$

将式 (18) 及式 (33) 代入式 (31) 可得弯曲段钢丝绳第 i 股内层第 j 丝方程为

$$O'B'_{ij} = \left\{ \begin{array}{l} \sin(\theta_i + \alpha_a) [r_0 - r_1 \cos(\theta_j - e_1 \alpha_a)] - r_1 \cos \beta_0 \cos(\theta_i + \alpha_a) \sin(\theta_j - e_1 \alpha_a) \\ r_3 \cos e_3 \alpha_a - \cos e_3 \alpha_a \cos(\theta_i + \alpha_a) [r_0 + r_1 \cos(\theta_j - e_1 \alpha_a)] - r_1 \sin(\theta_j - e_1 \alpha_a) [\cos \beta_0 \cos e_3 \alpha_a \sin(\theta_i + \alpha_a) - \sin \beta_0 \sin e_3 \alpha_a] \\ r_3 \sin e_3 \alpha_a - \sin e_3 \alpha_a \cos(\theta_i + \alpha_a) [r_0 + r_1 \cos(\theta_j - e_1 \alpha_a)] - r_1 \sin(\theta_j - e_1 \alpha_a) [\cos \beta_0 \sin e_3 \alpha_a \sin(\theta_i + \alpha_a) + \sin \beta_0 \cos e_3 \alpha_a] \end{array} \right\}. \quad (35)$$

将式(18)及式(33)代入式(31)可得 弯曲段钢 丝绳第 i 股外层第 k 丝方程为

$$O'B'_{ik} = \left\{ \begin{array}{l} \sin(\theta_i + \alpha_a) [r_0 - r_1 \cos(\theta_k - e_2 \alpha_a)] - r_1 \cos \beta_0 \cos(\theta_i + \alpha_a) \sin(\theta_k - e_2 \alpha_a) \\ r_3 \cos e_3 \alpha_a - \cos e_3 \alpha_a \cos(\theta_i + \alpha_a) [r_0 + r_1 \cos(\theta_k - e_2 \alpha_a)] - r_1 \sin(\theta_k - e_2 \alpha_a) [\cos \beta_0 \cos e_3 \alpha_a \sin(\theta_i + \alpha_a) - \sin \beta_0 \sin e_3 \alpha_a] \\ r_3 \sin e_3 \alpha_a - \sin e_3 \alpha_a \cos(\theta_i + \alpha_a) [r_0 + r_1 \cos(\theta_k - e_2 \alpha_a)] - r_1 \sin(\theta_k - e_2 \alpha_a) [\cos \beta_0 \sin e_3 \alpha_a \sin(\theta_i + \alpha_a) + \sin \beta_0 \cos e_3 \alpha_a] \end{array} \right\}. \quad (36)$$

3 钢丝绳曲率和挠率求解

钢丝绳空间螺旋方程、曲率和挠率变化规律是研究整绳三维实体建模及力学模型的基础,曲率是表示曲线在某点的弯曲程度,挠率是表示空间曲线的扭曲程度,钢丝绳空间螺旋曲线上任意点均有确定的曲率和挠率,整绳曲率及挠率具有一定变化规律。

钢丝绳曲率 k 、挠率 τ 与空间螺旋曲线方程 $f(\alpha_a)$ 的关系如下^[22]:

$$k = \frac{\|f'(\alpha_a) \times f''(\alpha_a)\|}{\|f'(\alpha_a)\|^3} = \frac{\sqrt{(y'z'' - z'y'')^2 + (z'x'' - x'z'')^2 + (x'y'' - y'x'')^2}}{((x')^2 + (y')^2 + (z')^2)^{3/2}}, \quad (37)$$

$$\tau = \frac{(f'(\alpha_a)' \cdot f''(\alpha_a)'' \cdot f'''(\alpha_a)''')}{\|f'(\alpha_a)' \times f''(\alpha_a)''\|^2} = \frac{x'y''z''' + x''y'z' + x'''y'z' - x''y''z' - x'y'''z' - x'y'z'''}{(y'z'' - z'y'')^2 + (z'x'' - x'z'')^2 + (x'y'' - y'x'')^2}. \quad (38)$$

式中: $f(\alpha_a)$ 为钢丝绳空间螺旋曲线方程, x, y, z 为对应的极角 α_a 的函数。由式(37)及式(38),可分别求出直线段、弯曲段钢丝绳各钢丝的曲率与挠率空间表达式,但由于钢丝绳空间螺旋曲线方程较为复杂,求三次导后更为复杂,表示较困难。应用 MATLAB 软件语言符号功能对钢丝绳的曲率与挠率进行求解,在求解弯曲段钢丝的曲率及挠率时,设定滑轮直径为 180 mm。钢丝绳曲率及挠率在 MATLAB 中的计算流程如图 9 所示。

将钢丝绳直立及弯曲段的二维曲线函数图像导入 Photoshop 进行合并,得到直立与弯曲段钢丝绳曲率与挠率关系图,如图 10 及 11 所示。在图 10 中,直线段钢丝绳的曲率与挠率呈明显的周期性变化规律,变化周期均为 180° ;挠率峰值均出现于曲率的波谷处,曲率处于波峰时,挠率变化较为平缓;曲率与挠率的极值较明显。在图 11 中,弯曲段钢丝绳曲率与挠率同样具有明显的周期性变化规律,变化周期均为 360° ;曲率处于波峰时,挠率发生突变;曲率处于波谷时,挠率变化率最大;曲率和挠率的极值大小明显。

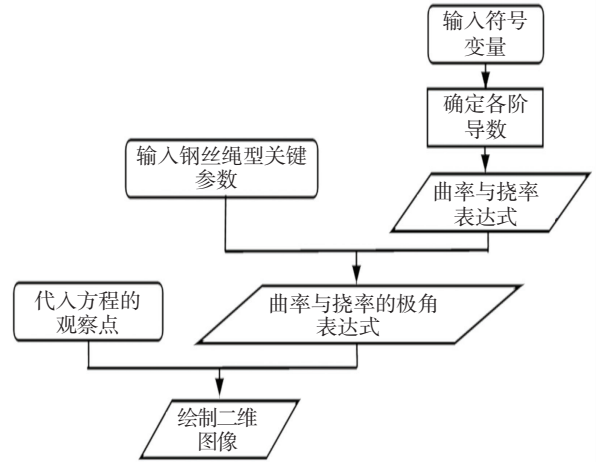


图 9 钢丝绳曲率及挠率在 MATLAB 中计算流程

Fig. 9 Wire rope curvature and torsion calculation flow in MATLAB

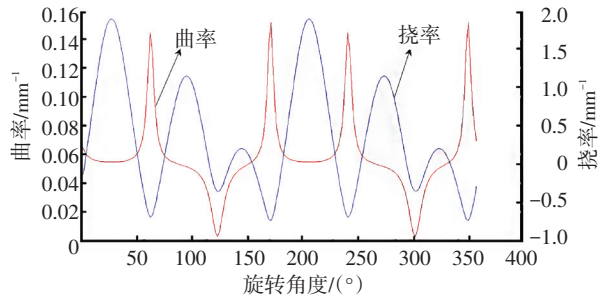


图 10 直线段钢丝绳外层丝曲率与挠率变化规律

Fig. 10 Curvature and torsion variation of straight section of wire rope outer wires

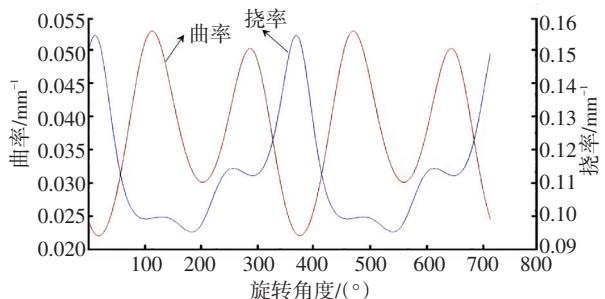


图 11 弯曲段钢丝绳外层丝曲率与挠率变化规律

Fig. 11 Curvature and torsion variation of bending section of wire rope outer wires

4 钢丝绳三维建模

上文推导了钢丝绳的空间数学方程、曲率和挠率表达式,分析了钢丝绳在直立及弯曲状态,侧股中侧丝的曲率及挠率的连续变化规律. 为更直观了解该类钢丝绳的结构,通过已建立钢丝绳空间数学模型,运用 MATLAB 参数化功能及 Solidworks 软件曲线、扫描和实体阵列等功能建立钢丝绳三维实体模型.

应用 SolidWorks 曲线及扫描功能建立钢丝绳侧股芯丝,通过 Matlab 获取钢丝绳侧股侧丝的二次螺旋线参考点坐标,制成 txt 文件,如表 2 为第 1 股第 18 丝参考点系列坐标;然后运用 Solidworks “XYZ 曲线”功能,在参数输入设置中导入已制好的坐标文件;最后应用 SolidWorks 扫描、装配及实体阵列建立钢丝绳整绳三维几何模型. 图 12~14 分别为单丝、丝与丝缠绕、直立段及绳轮处钢丝绳三维几何模型.



图 12 单丝与单丝缠绕几何实体模型

Fig.12 Winding geometry entity model between single wire and single wire

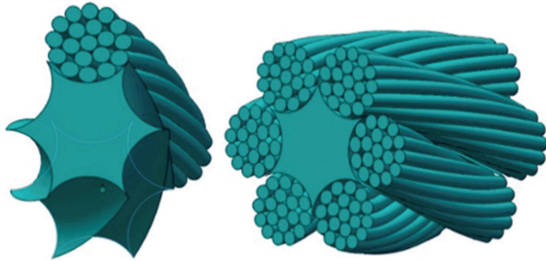


图 13 直立状态钢丝绳整绳三维实体模型

Fig.13 Three-dimensional entity model of upright wire rope



图 14 弯曲段钢丝绳三维实体模型

Fig.14 Three-dimensional entity model of bending section of wire rope

经过参数设计及三维建模最后得出第 1 股第 18 丝参考点系列坐标表格如表 2 所示。

表 2 第 1 股第 18 丝参考点系列坐标

Tab.2 Reference point coordinate of first share eighteenth wire

参考点序号	X 轴坐标	Y 轴坐标	Z 轴坐标
1	1.801 7	0.489 6	-0.082 4
2	1.325 4	3.010 6	6.969 2
3	-0.342 2	3.394 3	14.566 9
4	-1.571 0	1.284 4	21.715 3
5	-1.364 8	-1.678 8	28.399 8
6	0.139 5	-3.479 2	35.618 5
7	1.691 6	-2.698 4	43.203 3
8	1.773 2	-0.052 2	50.187 0
9	0.320 1	2.489 1	56.914 5
10	-1.680 4	3.166 4	64.290 0
11	-2.486 3	1.472 6	71.803 2
12	-1.283 1	-1.066 6	78.643 2
13	1.058 0	-2.648 2	85.468 7
14	2.885 3	-2.136 8	92.970 0

5 结 论

1)在确定运输机钢丝绳型号及直径基础上,对钢丝绳股、丝进行编号,运用微分几何学及空间坐标变换原理,推导了 6×19+FC 类钢丝绳在直立及弯曲状态的空间螺旋方程,并推导了该类钢丝绳侧股外层钢丝曲率及挠率的连续变化规律,为钢丝绳在各种载荷下的工作状态数值分析和实验分析提供理论依据.

2)图 10 结果表明:直线段钢丝绳的曲率与挠率呈明显的周期性变化规律,变化周期均为 180°;挠率峰值均出现于曲率的波谷处,曲率处于波峰时,挠率变化较为平缓;曲率与挠率的极值较明显. 图 11 结果表明:弯曲段钢丝绳曲率与挠率同样具有明显的周期性变化规律,变化周期均为 360°;曲率处于波峰时,挠率发生突变;曲率处于波谷时,挠率变化率最大;曲率和挠率的极值大小明显.

3)根据所推导的钢丝绳空间螺旋方程、曲率及挠率表达式,运用 MATLAB 参数化及 SolidWorks 曲线、扫描及装配等功能,绘制了运输机钢丝绳直立及弯曲状态的三维几何模型,并得到运输机钢丝绳股、丝参考点系列坐标,为后续建立钢丝绳力学模型及分析结构参数对钢丝绳损伤的影响奠定基础.

参考文献

[1] 粘雅玲,沈嵘枫,张小珍,等.果园运输机械研究进展[J].农业技术与装备,2014,(22):24
 NIAN Yaling, SHENG Rongfeng, ZHANG Xiaozhen, et al. Research progress of orchard transportation machinery [J]. Agricultural Technology & Equipment, 2014, (22): 24

[2] 洪添胜. 农机农艺融合就是“未来强壮的果农”[N]. 农民日报, 2015-11-19(008)
 HONG Tiansheng. The integration of agricultural machinery and agronomy is "the strong fruit farmers in the future" [N]. Farmers' Daily, 2015-11-19(008)

- ly, 2015-11-19(008)
- [3] 欧阳玉平, 洪添胜, 苏建, 等. 山地果园牵引式双轨运输机断绳制动装置设计与试验[J]. 农业工程学报, 2014, 30(18): 22
OUYANG Yuping, HONG Tiansheng, SU Jian, et al. Design and test of rope breaking braking device of traction type double track transporter in mountain orchard[J]. Transactions of the Chinese Society of Agricultural Engineering, 2014, 30(18): 22
- [4] 欧阳玉平, 洪添胜, 马煜东. 山地果园双轨运输机牵引系统动力学仿真与试验[J]. 系统仿真学报, 2015, 27(7): 1502. DOI: 10.16182/j.cnki.joss.2015.07.013
OUYANG Yuping, HONG Tiansheng, MA Yudong. Dynamic simulation and test of mountain orchard double-track transport traction system[J]. Journal of System Simulation, 2015, 27(7): 1502. DOI: 10.16182/j.cnki.joss.2015.07.013
- [5] 欧阳玉平, 洪添胜, 苏建, 等. 山地果园牵引式双轨运输机排绳装置的设计[J]. 华中农业大学学报, 2014, 33(5): 123. DOI: 10.13300/j.cnki.hnlkxb.2014.05.046
OUYANG Yuping, HONG Tiansheng, SU Jian, et al. Design of rope arrangement device of traction type double track conveyor in mountain orchard[J]. Journal of Huazhong Agricultural University, 2014, 33(5): 123. DOI: 10.13300/j.cnki.hnlkxb.2014.05.046
- [6] 洪添胜, 苏建, 朱余清. 山地橘园链式循环货运索道设计[J]. 农业机械学报, 2011, 42(6): 108
HONG Tiansheng, SU Jian, ZHU Yuqing. Design of chain cycle freight ropeway in mountain orangery[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2011, 42(6): 108
- [7] PÉRIERA V, DIENG L, GAILLET L, et al. Influence of an aqueous environment on the fretting behaviour of steel wire sused in civil engineering cables[J]. Wear, 2011, 271(9-10): 1585. DOI: 10.1016/j.wear.2011.01.095
- [8] WAHID A, MOUHIB N, Ouardi A, et al. Experimental prediction of wire rope damage by energy method[J]. Engineering Structures, 2019, 201: 1. DOI: 10.1016/j.engstruct.2019.109794
- [9] BELTRÁN J F, DE VICO E. Assessment of static rope behavior with asymmetric damage distribution[J]. Eng Struct, 2015, 86: 84. DOI: 10.1016/j.engstruct.2014.12.026
- [10] 赵敏, 张东来, 周智慧. 钢丝绳缺陷漏磁信号的通道均衡化方法[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2013, 45(9): 47
ZHAO Min, ZHANG Donglai, ZHOU Zhihui. Channel equalization method for MFL signals of wire rope defects[J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2013, 45(9): 47
- [11] FONTANARI V, BENEDETTI M, MONELLI B D. Elasto-plastic behavior of a warrington-seale rope: experimental analysis and finite element modeling[J]. Eng Struct, 2015, 82: 113. DOI: 10.1016/j.engstruct.2014.10.032
- [12] PETERKA P, KREŠÁK J, KROUPCH S, et al. Failure analysis of hoisting steel wire rope[J]. Eng Fail Anal, 2014, 45: 96. DOI: 10.1016/j.engfailanal.2014.06.005
- [13] ZHANG Peng, DUAN Menglan, MA Jianmin, et al. A precise mathematical model for geometric modeling of wire rope strands structure[J]. Applied Mathematical Modelling, 2019, 76. DOI: 10.1016/j.apm.2019.06.005
- [14] WANG Xiaoyu, MENG Xiangbao, WANG Jixin, et al. Mathematical modeling and geometric analysis for wire rope strands[J]. Applied Mathematical Modelling, 2015, 39(3-4): 1019. DOI: 10.1016/j.apm.2014.07.015
- [15] ARGATOV I I, GÓMEZ X, TATO W, et al. Wear evolution in a stranded rope under cyclic bending: implications to fatigue life estimation[J]. Wear, 2011, 271(11): 2857. DOI: 10.1016/j.wear.2011.05.045
- [16] MA W, ZHU Z C, PENG Y X, et al. Computer-aided modeling of wire ropes bent over a sheave[J]. Advances in Engineering Software, 2015, 90: 11. DOI: 10.1016/j.advengsoft.2015.06.006
- [17] WU Weiguo, CAO Xin. Mechanics model and its equation of wire rope based on elastic thin rod theory[J]. International Journal of Solids and Structures, 2016, 102-103: 21. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2016.10.021
- [18] ARGATOV I. Response of a wire rope strand to axial and torsional loads: asymptotic modeling of the effect of interwire contact deformations[J]. International Journal of Solids and Structures, 2011, 48(10): 1413. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2016.10.021
- [19] 闻邦椿, 张义民, 鄂中凯, 等. 机械设计手册[M]. 第五版. 北京: 机械工业出版社, 2010
WEN Bangchun, ZHANG Yimin, E Zhongkai. Mechanical design manual[M]. Fifth Edition. Beijing: China Machine Press, 2010
- [20] 张德英, 李广宇, 向卫国. 斜井提升用钢丝绳的选择方法[J]. 煤矿机电, 2005(2): 69. DOI: 10.16545/j.cnki.cmet.2005.02.027
ZHANG Deying, LI Guangyu, XIANG Weiguo. Selection method of steel wire rope for inclined shaft lifting[J]. Coal Mine Electrical, 2005, (2): 69. DOI: 10.16545/j.cnki.cmet.2005.02.027
- [21] 苏世晨, 苏永春. 矿井提升钢丝绳直径计算新公式[J]. 煤矿安全, 2003, 34(6): 32. DOI: 10.13347/j.cnki.mkaq.2003.06.013
SU Shichen, SU Yongchun. New formula for calculating the diameter of mine hoisting wire rope[J]. Coal Mine Safety, 2003, 34(6): 32. DOI: 10.13347/j.cnki.mkaq.2003.06.013
- [22] 张惠波. 提升钢丝绳几何特性及有限元分析研究[D]. 阜新: 辽宁工程技术大学, 2011
ZHANG Huibo. Research on geometric characteristics and finite element analysis of hoisting steel wire rope[D]. Fuxin: Liaoning University of Engineering and Technology, 2011

(编辑 王小唯)