DOI:10.11918/j.issn.0367-6234.2017.03.026

一种剪滞翘曲位移函数的解析构造法

肖 军[1], 李小珍[1], 刘德军[1], 刘晨光[2], 肖 林[1]

(1.西南交通大学 土木工程学院,成都 610031; 2.四川建筑职业技术学院,四川 德阳 618000)

摘 要: 针对剪力滞问题,提出了一种解析的求解方法. 通过对控制微分方程解的形式进行研究,构造出一种针对不同余弦剪力分布的剪滞翘曲函数;进而对任意给定的外荷载作用下的剪力分布进行级数展开,并单独求取各剪力分量对应的正应力;最终通过对正应力进行叠加并求取剪力滞分布. 采用能量变分法推导了基于任意剪滞翘曲位移函数的求解公式,并编制了通用求解程序. 分别以矩形简支箱梁(不带悬臂板)受集中荷载和带悬臂箱梁受均布荷载为例,进行了计算对比. 研究表明:相比于已有方法,所提出的方法对不同荷载作用形式具有更好的适应性,且由于是采用级数展开的思想,适用于任意荷载作用情况下的剪力滞分析.

关键词: 剪力滞效应;位移函数;解析法;能量变分;级数展开

中图分类号: U442 **文献标志码**: A **文章编号**: 0367-6234(2017)03-0162-06

An analytical construction method of wraping displacement function of shear lag

XIAO Jun[1], LI Xiaozhen[1], LIU Dejun[1], LIU Chenguang[2], XIAO Lin[1]

(1.School of Civil Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China;
2.Sichuan College of Architectural Technology, Deyang 618000, Sichuan, China)

Abstract: An analytical solution method was proposed to solve the problem of shear lag. A new shear lag warping function for the shear distribution of different cosine was constructed based on the solution of the governing equations. The trigonometric series were used to expand the shear distribution function under any given external loads, and the normal stress corresponding to each shear component was obtained separately. Finally, the superposition of normal stress was obtained and the distributions of shear lag were calculated. The energy variation method was used to derive the solution formulas based on the arbitrary warping displacement functions of shear lag effect, and a general solution procedure was developed. A rectangular simply supported box beam without cantilever plate under concentrated load and a box beam with cantilever plate under distributed load were analyzed. The calculation results show that the solution method proposed in this study could adapt well with different types of loads compared with the existing methods, and it could be effectively used for shear lag analysis of box beams subjected to arbitrary loads.

Keywords: shear lag effect; displacement function; analytical solution; energy variation method; series expansion

在采用能量变分法进行箱梁剪力滞分析时,多数研究者是在假定剪滞翘曲位移函数形式的基础上建立控制微分方程并求解的. Reissner 早期研究矩形双轴对称箱梁剪力滞问题时,假定剪滞翘曲位移函数为二次抛物线型式[1]. 文献[2-5]分别采用三次抛物线、四次抛物线、五次和六次抛物线等. 采用不同的剪滞翘曲位移函数进行剪力滞分析,主要存在如下两个问题:1)由于在采用变分法建立控制微分方程时,仍然假定截面中性轴通过截面形心,而实际上由于剪力滞效应的存在,截面的中性轴位置与截面形心发生了偏离,则截面中性轴仍通过截面形心的假设将导致分析中包含附加轴力的影响[6];2)由于控制微分方程的建立是基于具体剪滞翘曲位移函数的,其分析精度明显地受剪滞翘曲函数的影响.

针对附加轴力问题,文献[7]通过引入轴力平衡条件来考虑截面中性轴和形心轴重合所产生的附加轴力影响. 文献[6]通过对典型的简支梁、悬臂梁和连续梁在集中力和均布荷载作用下的附加轴向应力比进行分析,结果表明,附加轴向应力相对较小,对抛物线型翘曲位移函数进行考虑轴力平衡的修正是没有必要的.

针对剪滞翘曲位移函数的选取问题,以往采用变分法对剪力滞的研究,大多都是基于具体的剪滞翘曲函数开展的. 然而,剪力滞的分布规律显著地受结构形式、截面刚度分布及荷载作用形式和位置

收稿日期: 2016-02-17
基金项目: 国家自然科学基金 (51308467)
作者简介: 肖 军(1987—),男,博士研究生;
李小珍(1970—),男,教授,博士生导师
通信作者: 刘德军,djliu@swjtu.edu.cn

的影响[8-11]；针对不同的情况，剪滞翘曲位移函数的形式不是通用的，且通常采用不同的形式会带来较大的误差. 为此，本文通过对采用变分法建立的剪力滞控制微分方程的分析，从微分方程通解的形式出发构造出了一种剪力滞解析分析方法. 通过与矩形试验梁在集中荷载作用下剪力滞系数的对比，及带翼缘箱梁在均布荷载作用下的板壳有限元分析结果对比，验证了本文提出的解析法的合理性.

1　剪滞翘曲位移函数及其影响

变分法求解剪力滞问题的核心是剪滞翘曲位移函数的选取. 对于薄壁矩形双轴对称箱梁而言，在顶底板厚度相同的情况下，引起剪力滞效应的翼缘板横向剪切变形也具有双对称性. 因此，不加修正的二次抛物线型剪滞翘曲位移函数对于不带翼缘的矩形箱梁剪力滞分析是十分精确的. 然而，对于带悬臂板的箱梁而言，由于上下对称性的缺失，使得截面中性轴与形心不再重合. 文献[12-13]引入仅与截面几何参数有关的修正系数，分别构造了底板和悬臂板的剪滞翘曲位移函数，并引入附加轴向位移来考虑由于中性轴和形心不重合而引起的附加轴力影响.

文献[14]基于竖向弯曲荷载作用下箱梁截面的剪力流分布规律，定义了一种符合箱梁各翼缘板剪切变形规律的剪力滞翘曲位移函数，修正了带悬臂板箱梁的剪滞翘曲位移函数. 修正后的剪滞位移函数为

$$f(y,z)=\begin{cases}-Z_s\left(1-\dfrac{y^3}{b_1^3}\right), & \text{(顶板)};\\ -Z_s\left[1-\dfrac{(b_1+b_2-y)^3}{b_2^3}\right]\dfrac{A_2}{A_1}, & \text{(悬臂板)};\\ Z_x\left(1-\dfrac{y^3}{b_3^3}\right)\dfrac{Z_xA_x}{Z_sA_s}, & \text{(底板)};\\ 0, & \text{(腹板)}.\end{cases}$$

式中：Z_s、Z_x 分别为顶、底板中心距中性轴的距离；b_1、b_2、b_3 分别为顶板（不含悬臂部分）宽度、臂板宽度及底板宽度的 1/2；A_2/A_1 为悬臂板与内侧顶板面积的比值；A_s、A_x 分别为顶板和底板的面积；y 为横桥向坐标，z 为纵桥向坐标.

为研究不同的剪滞翘曲位移函数对剪力滞求解结果的影响，以文献[15]中的试验梁为例，分别给出基于不同剪滞翘曲位移函数的分析结果与实测值的对比. 试验简支梁跨径为 0.8 m，采用集中荷载对称地施加在跨中截面，荷载总量为0.272 2 kN，材料弹模为 E = 3 000 MPa，泊松比 0.385，板中面的应变取上、下测点的平均值. 试验梁截面尺寸及测点布置示意如图 1 所示.

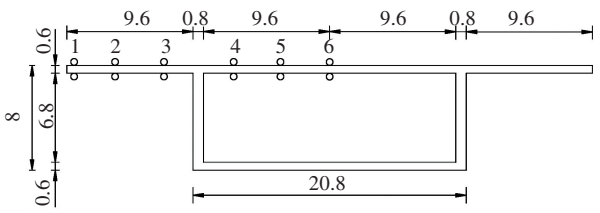


图 1　试验梁截面尺寸及测点布置(cm)

Fig.1　Sketch map of the section size and measuring point layout of the test beam (cm)

采用不同的剪力滞位移函数形式，求解得到的箱梁正应力分布如图 2 所示，图中横轴 y/b_u 为测点到顶板中心距与顶板半宽之比.

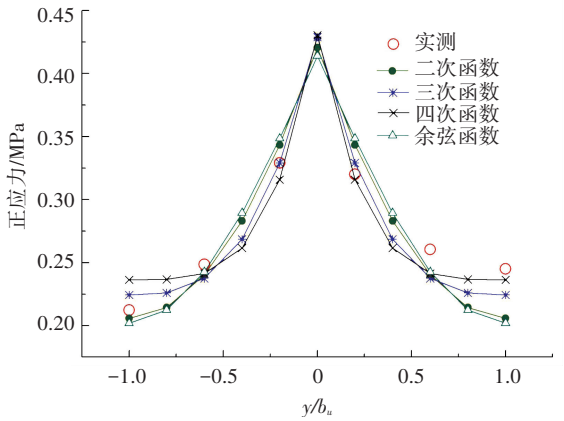


图 2　不同位移函数下的剪力滞分析结果对比

Fig.2　Comparison of the shear lag analysis results under different displacement functions

显然，从图 2 可见，基于不同的剪滞翘曲位移函数形式求解得到的正应力分布存在较大的差异. 从本例看，在悬臂端部，二次抛物线形式和余弦函数形式与实测值对比较好；但在顶板中部，却是三次和四次抛物线形式更接近实测结果. 由此可见，对于采用何种位移函数能够更为合理地描述剪力滞的分布规律，值得研究.

2　剪力滞解析求解思路

如前所述，在采用变分法求解剪力滞问题时，分析的精度显著地受剪滞翘曲位移函数的影响. 因而，如何选取合适的剪滞翘曲位移函数的形式成为变分法求解剪力滞问题的关键. 本节将从控制方程的形式出发构造更为合理的剪滞翘曲位移函数. 为此，采用抽象函数作为剪滞翘曲函数，利用能量变分法导出控制微分方程及边界条件分别为

$$Eu_{xx}(x,y)+Gu_{yy}(x,y)=\frac{EI_s}{2Ib}\int_{-b}^{b}u_{xx}(x,y)\,\mathrm{d}y+\frac{Q(x)}{I}=f(x),\quad(1)$$

$$u(x,y)\mid_{y=b}=u(x,y)\mid_{y=-b}=0. \tag{2}$$

为便于解析求解,采用文献[16]级数展开的思路,首先假定剪力以沿桥纵向呈余弦分布,即

$$Q(x)=q_n\cos\ \alpha_n x. \tag{3}$$

从式(1)可知,由于右端项仅为 x 的函数,则左端两个偏微分项 $Eu_{xx}(x,y)$、$Gu_{yy}(x,y)$ 关于 y 的项一定是被约掉了. 由于 $Eu_{xx}(x,y)$ 没有对 y 进行求导,而 $Gu_{yy}(x,y)$ 对 y 进行了两次求导,因而需要构造的 $u(x,y)$ 含 y 的项,需要满足其二阶导等同于它本身. 则,$u(x,y)$ 一定含有 e^{y} 项,同时由于要满足 $u(x,y)\mid_{y=b}=u(x,y)\mid_{y=-b}$,即 $u(x,y)$ 为偶函数,所以 $u(x,y)$ 的形式一定含有 $\cosh Ay=\dfrac{e^{Ay}+e^{-Ay}}{2}$ 项,即

$$u(x,y)=\varphi(x)\cdot\cosh Ay. \tag{4}$$

文献[17]根据微分方程的形式导出了纵向位移函数的形式为

$$u_n(x,y)=C_n\cdot\cos\ \alpha_n x\cdot(\cosh A_n y-\cosh A_n b). \tag{5}$$

式中:$\alpha_n=\dfrac{n\pi}{L}$,$A_n=\sqrt{\dfrac{E}{G}}\alpha_n$,$L$ 为跨径,E 为弹性模量,G 为剪切模量,b 为顶板宽度的 1/2;$C_n=\dfrac{1}{EI_s}\cdot\dfrac{1}{\alpha_n^2}\cdot\dfrac{1}{\tan A_n b+\left(\dfrac{I}{I_s}-1\right)\cdot(A_n b)}\cdot\dfrac{A_n b}{\cosh A_n b}\cdot q_n$,其中 I、I_s 分别为截面惯性矩和顶、底板惯性矩之和.

在沿桥纵向剪力 $Q(x)=q_n\cos\alpha_n x$ 分布下,同时考虑到 $g(y)\mid_{y=b}=g(y)\mid_{y=-b}=0$,$g(y)\mid_{y=0}=1$,故而本文构造如下形式的剪滞翘曲位移函数,即

$$g(y)=\frac{\cosh A_n y-\cosh A_n b}{1-\cosh A_n b}. \tag{6}$$

基于以上分析,本文提出如下的解析求解思路:

1)根据外荷载 q 的分布形式,求出剪力 $Q(x)$ 的分布形式.

2)将剪力 $Q(x)$ 进行三角级数展开,即

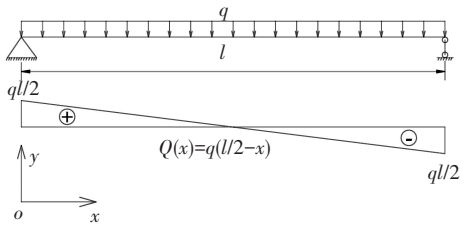
$$Q(x)=\sum_{n=1}^{\infty}Q_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}q_n\cos\ \alpha_n x, \tag{7}$$

$$q_n=\frac{2}{L}\int_0^L Q(x)\ \cos\ \alpha_n x\cdot\mathrm{d}x. \tag{8}$$

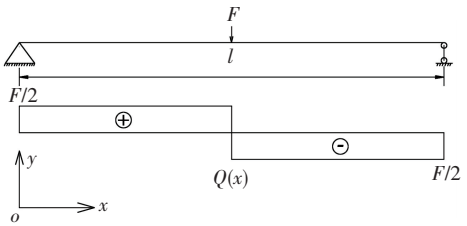
3)针对不同的 $Q_n(x)$,采用式(6)所构造的剪滞翘曲位移函数进行正应力求解.

4)叠加步骤 3)所求解的所有正应力,并求解剪力滞系数.

对于沿简支梁桥纵向作用均匀布载或者集中荷载的情况,$Q(x)$ 的分布如图 3 所示.



(a)均布荷载



(b)集中荷载

图 3 简支梁桥剪力分布图

Fig.3 Shear force distribution diagram of the simple supported beam bridge

根据式(8)可分别导出简支梁受均布荷载 q_n 为

$$q_n=\frac{4qL}{(n\pi)^2},\ n=1,3,5\cdots. \tag{9}$$

简支梁跨中受集中荷载 q_n 为

$$q_n=\begin{cases}\dfrac{2F}{n\pi},\\ -\dfrac{2F}{(n+1)\pi}.\end{cases}\quad(n=2i-1,i=1,2,3\cdots) \tag{10}$$

3 基于任意剪滞翘曲位移函数的分析

3.1 剪力滞控制微分方程推导

鉴于求解不同的剪力分布 $Q_n(x)$ 的剪力滞问题时,需要采用不同的剪滞翘曲位移函数,见式(6),因而推导基于抽象剪滞位移函数的剪力滞控制微分方程及有关公式是有重要意义的,这将极大地方便本文解析法的数值求解. 为此,本节将给出采用抽象函数作为剪滞翘曲位移函数推导的有关公式.

首先,引入如下 3 个位移函数,即梁的竖向挠度 $w(x)$ 和纵向位移 $u_u(x,y)$,$u_b(x,y)$,分别为

$$w=w(x), \tag{11}$$

$$u_u(x,y)=h_u\left[\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}+g_u(y)u(x)\right], \tag{12}$$

$$u_b(x,y)=h_b\left[\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}+g_b(y)u(x)\right]. \tag{13}$$

式中:$u_u(x,y)$ 为顶板纵向位移;$u_b(x,y)$ 为底板纵向位移;$u(x)$ 为截面上沿横向不同位置各点剪切转角的最大差值;$g_u(y)$、$g_b(y)$ 分别为 $u(x)$ 在 y 方向上的分布函数,反应纵向位移沿横向的不均匀分

布. 其他符号含义如图 4 所示.

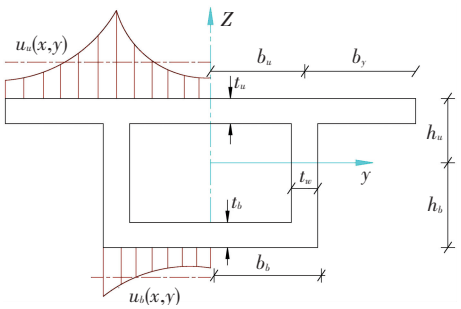


图 4　箱梁几何参数

Fig.4　Geometric parameters of the box girder

其次，基于最小势能原理对总势能变分可建立如下的控制微分方程(推导过程从略)：

$$\begin{cases} u'' - k^2 u = \dfrac{\alpha_2 n Q(x)}{2EI}, \\ w''' - k^2 w'' = \dfrac{k^2 M(x)}{EI} - \dfrac{\alpha_3 n M''(x)}{EI}. \end{cases} \tag{14}$$

式中：$n = \dfrac{1}{\alpha_3 - \dfrac{\alpha_2^2}{4}\dfrac{I_s}{I}}$，$k = \sqrt{\dfrac{\alpha_4 G n}{E}}$，$\alpha_i = \dfrac{I_{ui} + I_{bi}}{I_{u1} + I_{b1}}(i = 2,3,4)$，$I_{j1} = \int t_j h_j^2 \mathrm{d}y$，$I_{j2} = \int 2t_j h_j^2 f_j \mathrm{d}y$，$I_{j3} = \int t_j h_j^2 f_j^2 \mathrm{d}y$，$I_{j4} = \int t_j h_j^2 (f'_j)^2 \mathrm{d}y$ (j 为 u 代表顶板，j 为 b 代表底板).

经验证，本文所推导的控制方程，不显含剪滞翘曲位移函数，但当代入具体的剪滞翘曲位移函数形式时，其形式等同于直接采用该型剪滞翘曲位移函数进行变分推导的结果.

方程(14)的一般解可写为

$$u(x) = C_1 \sinh kx + C_2 \cosh kx + u^*, \tag{15}$$

式中：C_1、C_2 为待定常数，与边界条件有关，$u*$ 为仅与剪力 $Q(x)$ 相关的特解.

3.2　余弦荷载作用下的解的形式

由于本文分析剪力滞的思路，需要首先将剪力分布按照级数进行展开，如式(9)、(10). 针对任一余弦剪力分布 $Q_n(x) = q_n \cos \alpha_n x$，控制微分方程式(14)变为

$$u'' - k^2 u = m Q_n(x), \tag{16}$$

式中 $m = \dfrac{\alpha_n n}{2EI}$，方程(16)的解可表示为 $u(x) = u_0 + u^*$，其中 $u*$ 为特解.

可构造如下形式的特解

$$u^* = -m \frac{q_n}{\alpha_n^2 + k^2} \cos \alpha_n x. \tag{17}$$

将式(17)代入式(15)，可以得到

$$u = C_1 \sinh kx + C_2 \cosh kx - m \frac{q_n}{\alpha_n^2 + k^2} \cos \alpha_n x, \tag{18}$$

$$u' = C_1 k \cosh kx + C_2 k \sinh kx + m\alpha_n \frac{q_n}{\alpha_n^2 + k^2} \sin \alpha_n x. \tag{19}$$

由边界条件 $u'|_{x=0} = 0, u'|_{x=l} = 0$ 可以导出

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = \dfrac{-m\alpha_n q_n}{\alpha_n^2 + k^2} \cdot \dfrac{\sin \alpha_n l}{k \sinh kl}. \end{cases} \tag{20}$$

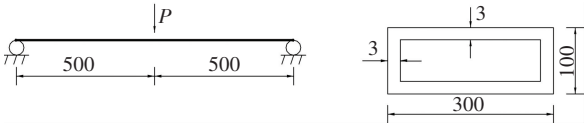
最后，可根据如下表达式计算正应力的数值：

$$\sigma_x = E \frac{\partial u_u(x,y)}{\partial x} = Eh_u [w''(x) + g_u(y) u(x)']. \tag{21}$$

4　算例分析

4.1　集中荷载下的剪力滞分析

为验证本文思路的正确性，选取弹模为 E = 304 GPa，泊松比为 0.3，计算跨径为1 000 mm的简支箱梁(如图 5 所示)，在跨中作用集中荷载 P = 6 kN，进行剪力滞分析[17]. 将分析结果与文献[18]的试验结果等进行对比，如图 6 所示.



(a) 计算图示　　(b) 截面参数

图 5　集中荷载试验梁参数(mm)

Fig.5　Parameters of the test beam under concentrated load (mm)

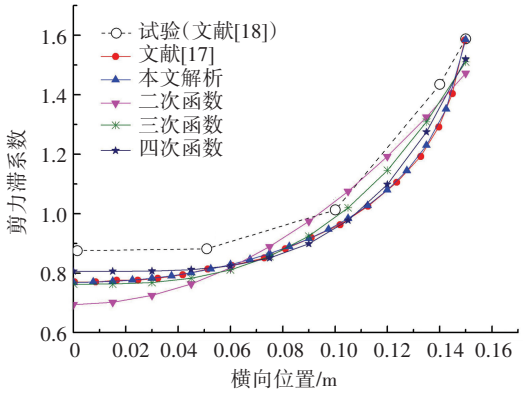


图 6　集中荷载作用下顶板剪力滞系数对比

Fig.6　Comparison of shear lag coefficient of the roof under concentrated load

需要说明的是，图 6 中实测数据仅 1~4 号点是由真实试验测得的，5 号点是通过 1~4 号点外推得到的，这主要是考虑到 5 号点位于腹板位置处，通常该位置是剪力滞系数最为显著的位置. 从图 6 可见，本文基于解析位移函数的剪力滞分析结果同文献[17]的分析结果基本一致，且与实测值吻合较好；同时，三次、四次函数的分析结果也较好，但采用二次函数的求解结果较差，腹板内侧(靠近顶板中线)的分析结果明显偏小. 表 1 列出了关键位置处

的剪力滞系数分析结果对比.

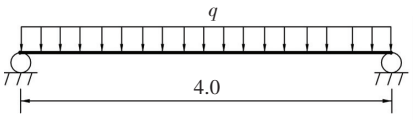
表 1 集中荷载作用下关键位置处的剪力滞系数对比

Tab.1 Comparison of shear lag coefficient at the critical locations under concentrated load

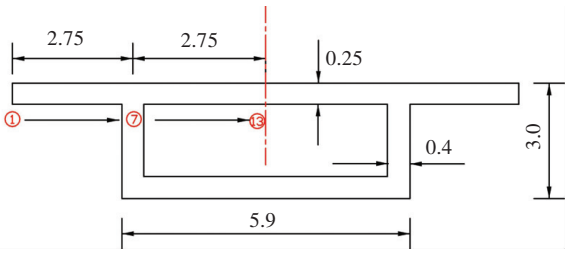
测点编号	剪力滞系数				
	文献[17]	文献[18]	本文解析	二次函数	三次函数
1	0.876	0.77	0.769	0.694	0.763
2	0.882	0.814	0.815	0.782	0.792
3	1.012	0.963	0.963	1.068	1.010
4	1.435	1.292	1.293	1.374	1.376
5	1.588	1.584	1.585	1.473	1.511

4.2 均布荷载下的剪力滞分析

接下来,对带有悬臂板的箱梁受均布荷载的情况作进一步的算例验证. 选取的算例及有限元分析结果参考的是文献[11],其中弹性模量为 E = 30 GPa,计算跨径为 4.0 m,泊松比为 0.2,作用均布荷载为 q = 2 000 N/m,其他截面参数如图 7 所示.



(a) 计算图示



(b) 截面参数

图 7 均布荷载算例梁参数(m)

Fig.7 Parameters of the example beam under uniformly distributed load (m)

采用不同剪滞翘曲位移函数进行剪力滞分析,对比不同位置(位置编号见图 7)的剪力滞系数的分布,如图 8 所示.

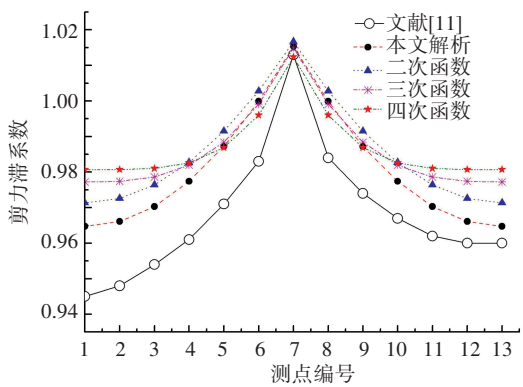


图 8 均布荷载作用下顶板剪力滞系数对比

Fig.8 Comparison of shear lag coefficient of the roof under uniformly distributed load

对图 8 中所示的关键位置处的剪力滞系数列表对比,如表 2 所示.

表 2 均布荷载作用下关键位置处的剪力滞系数对比

Tab.2 Comparison of shear lag coefficient at the critical locations under uniformly distributed load

测点编号	剪力滞系数				
	文献[17]	文献[18]	本文解析	二次函数	三次函数
1	0.945	0.965	0.971	0.977	0.981
2	0.961	0.977	0.983	0.982	0.983
3	1.013	1.015	1.017	1.015	1.012
4	0.974	0.987	0.992	0.988	0.987
5	0.962	0.97	0.976	0.979	0.981
6	0.96	0.965	0.971	0.977	0.981

由图 8 及表 2 可见,在均布荷载对称作用下,本文解析结果更为接近文献[11]的有限元分析结果,且三次、四次函数的分析结果差于二次函数的分析结果,这一点与集中荷载情况下的分析结果不同. 因而,仅从本文所涉及的两个算例来看,本文提出的解析法对集中荷载和均布荷载作用具有更好的适应性.

5 结 论

1)从剪力滞控制微分方程解的形式出发,构造了针对余弦剪力分布的剪滞翘曲位移函数,并以此为基础,通过对任意剪力分布进行级数展开来求解任意剪力分布的剪力滞问题.

2)分别以不带悬臂的矩形箱梁受集中荷载作用及带悬臂箱梁受均布荷载作用为例,通过分析对比,发现本文解析方法对各种情况下的剪力滞问题适应性均较好;仅就文中的算例而言,三次及四次函数对集中荷载作用情况下的剪力滞分析效果较好,而二次函数分析效果较差;针对均布荷载,则二次函数分析效果较好,三次、四次函数分析效果较差.

3)由于本文采用的是级数展开的思想,因而适用于任意剪力分布情况下的剪力滞分布计算.

参考文献

[1] REISSNER E. On the problem of stress distribution in wide flanged box beam [J]. Journal of the Aeronautical Sciences, 1938(5): 295-299.

[2] LUO Q Z, WU Y M, LI Q S, et al. A finite segment model for shear lag analysis [J]. Engineering Structures, 2004, 26(14): 2113-2124.DOI:10.1016/j.engstruct.2004.07.010

[3] FERRADI M K, CESPEDES X, ARQUIER M. A higher order beam finite element with warping eigenmodes[J]. Engineering Structures, 2013, 46:748-762. DOI: 10.1016/j.engstruct.2012.07.038

[4] 陈常松, 邓安. 高次位移函数时箱梁剪滞效应变分法解[J]. 重庆交通大学学报(自然科学版),2009, 28(1): 5-7.

CHEN Changsong, DENG An. Variational solution of shear lag effect of box girder in high order displacement function [J]. Journal of Chongqing Jiaotong University (Natural Science), 2009, 28(1): 5-7.

[5] LIN Zhibin, ZHAO Jian. Least-work solutions of flange normal stresses in thin-walled flexural members with high-order polynomial [J]. Engineering Structures, 2011, 33(10): 2754-2761.

[6] 蔺鹏臻, 周世军, 刘凤奎. 抛物线型剪滞翘曲位移函数引起的附加轴力分析[J]. 工程力学, 2010, 27(8): 90-93.
LIN Pengzhen, ZHOU Shijun, LIU Fengkui. Additional axial force analysis caused by parabolical warping displacement about shear lag [J]. Engineering Mechanics, 2010, 27(8): 90-93.

[7] 韦成龙, 曾庆元, 刘小燕. 薄壁箱梁剪力滞分析的多参数翘曲位移函数及其有限元法[J]. 铁道学报, 2000, 22(5): 60-64.
WEI Chenglong, ZENG Qingyuan, LIU Xiaoyan. Warping displacement function and finite element method for calculation of shear lag effect in box girder[J]. Journal of the China Railway Society, 2000, 22(5): 60-64.

[8] 周茂定, 李丽园, 张元海. 薄壁箱梁的剪力滞翘曲位移函数研究[J]. 中国公路学报, 2015, 28(6): 67-73.
ZHOU Maoding, LI Liyuan, ZHANG Yuanhai. Research on shear-lag warping displacement function of thin-walled box girders [J]. China Journal of Highway and Transport, 2015, 28(6): 67-73.

[9] 张玉红. 薄壁箱梁剪力滞效应的理论分析与试验研究[D]. 兰州: 兰州交通大学, 2011.
ZHANG Yuhong. The experimental study and theoretical analysis in shear lag effect on thin-walled box-girder [D]. Lanzhou: Lanzhou Jiaotong University, 2011.

[10] 蔺鹏臻, 刘凤奎, 冀伟, 等. 变分原理分析混凝土箱梁的剪力滞效应[J]. 铁道学报, 2013, 35(2): 93-98.
LIN Pengzhen, LIU Fengkui, JI Wei, et al. Analysis on shear lag effect of concrete box beam by variational principle [J]. Journal of the China Railway Society, 2013, 35(2): 93-98.

[11] 张鹏云. 不同加载方式对薄壁箱梁剪力滞效应影响研究[D]. 兰州: 兰州交通大学, 2013.
ZHANG Pengyun. Study on influence of different loading methods on shear lag effect of thin-walled box girder [D]. Lanzhou: Lanzhou Jiaotong University, 2013.

[12] 钱寅泉, 倪元增, 周良. 箱梁桥分析与设计(梁段板元法)[M]. 北京: 人民交通出版社, 2015.
QIAN Yanquan, NI Yuanzeng, ZHOU Liang. Analysis and design of box girder bridge [M]. Beijing: China Communications Press, 2015.

[13] 张元海, 李乔. 箱形梁剪滞效应分析中的广义力矩研究[J]. 铁道学报, 2007, 29(1): 77-81.
ZHANG Yuanhai, LI Qiao. Study on the generalized moment in shear lag effect analysis of the box girder [J]. Journal of the China Railway Society, 2007, 29(1): 77-81.

[14] 蔺鹏臻, 刘凤奎, 杨军, 等. 箱梁剪滞翘曲位移函数的定义及其应用[J]. 计算力学学报, 2012, 29(5): 789-794.
LIN Pengzhen, LIU Fengkui, YANG Jun, et al. Definition and application of shear-lag warping displacement functions for box girders [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2012, 29(5): 789-794.

[15] 罗旗帜. 基于能量原理的薄壁箱梁剪力滞理论与试验研究[D]. 长沙: 湖南大学, 2005.
LUO Qizhi. Theory and model test studies of shear lag in thin walled box girders based on energy principle [D]. Changsha: Hunan University, 2005.

[16] 钟阳, 刘衡. 矩形中厚板弯曲问题的解耦解法[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2016, 48(3): 143-146.
ZHONG Yang, LIU Heng. Ananalytical method for bendingrectangular plates withall edges clamped supported[J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2016, 48(3): 143-146.

[17] CHEN Jun, SHEN Shuilong, YIN Zhenyu, et al. Closed-form solution for shear lag with derived flange deformation function[J]. Journal of Constructional Steel Research, 2014, 102: 104-110. DOI: 10.1016/j.jcsr.2014.07.003

[18] AHMAD MKM. Shear lag effects at the intermediate supports in continuous box girders [D]. Cardiff: University of Wales College of Cardiff, 1986.

(编辑　魏希柱)