doi:10.11918/j.issn.0367-6234.2016.01.018

圆柱形张拉整体结构质量最小化方法

罗阿妮, 张庆华, 刘贺平, 王媛媛, 王龙昆

(哈尔滨工程大学 机电工程学院,150001 哈尔滨)

摘 要: 为减轻张拉整体结构的质量,提出一种张拉整体结构最小质量优化方法及进一步减轻质量的自相似迭代设计方法. 以外载荷作用下的圆柱形张拉整体结构为研究对象,根据构件质量、材料失效模式的关系,提出以构件力密度、横截面积作为设计变量,结构静力平衡方程为约束的优化数学模型,采用线性规划优化方法对数学模型进行优化,并给出压杆两种失效模式下结构最小质量的选择方法;为进一步减轻质量,把三维T型杆自相似迭代结构应用到圆柱形张拉整体结构中,提出一种自相似迭代设计方法来设计一个质量更轻的张拉整体结构,提出有效替代空间概念,给出有效替代空间的计算方法. 算例计算结果表明,最小质量优化方法及自相似迭代设计方法可以设计出质量更轻的张拉整体结构.

关键词: 张拉整体;力密度;力平衡;最小质量优化;T型单元;自相似设计

中图分类号: TU399,TU323 **文献标志码**: A **文章编号**: 0367-6234(2016)01-0120-06

Minimum mass approach of cylindrical tensegrity structure

LUO Ani, ZHANG Qinghua, LIU Heping, WANG Yuanyuan, WANG Longkun

(College of Mechanical and Electrical Engineering, Harbin Engineering University, 150001 Harbin, China)

Abstract: To reduce the mass of tensegrity structure, this paper provides a minimal-mass optimization method and self-similar iterative design method for further reducing the mass. Taking a cylindrical tensegrity structure as the research object which is under the action of external load, and based on the relationship of component quality and the material failure mode, the force density and cross-section area are used to minimize the structural mass subjected to an equilibrium condition, and the answer is provided by a linear program. In this process, the selection method of minimal mass is provided under two failure modes, compression bar buckling and yield. For further reducing the quality, 3D T bar self-similar iterative structure is applied to the cylindrical tensegrity structurea, and a self-similar iterative design method to design a lighter tensegrity structure is proposed, in which the conception of effective alternative space is presented and a method is given for calculating the effective space. Examples show that the minimum quality optimization method and the design method of self-similar iteration can design a lighter tensegrity structure.

Keywords: tensegrity structure; force density; force equilibrium; minimum mass optimization; T cell; self-similarity design

张拉整体结构是由多个离散的受压构件和一组连续的受拉构件形成的空间稳定索杆体系[1-2]. 无论任何形式的外力作用在张拉整体结构上,结构里的构件都只需抵抗轴向力[3]. 张拉整体结构在移动机器人[4]、可展天线[5-6]、智能传感器[7]等领域都得以应用,加州大学的 Skelton 等[8-10]首先对张拉整体质量进行研究,开辟出一条张拉整体研究的新途径. 目前,国内较少涉及张拉整体质量研究. 张拉整体结构质量减轻将会减小控制它所需要的能量,大大提高利用效率和结构性能,张拉整体轻质化研究将会是这一结构的关注重点. 张拉整体轻质化研究需要一个系统的优化设计方法. 桁架优化通常选取节点坐标和构件横截面积为优化参数,得到桁架结构的最小质量和优化形状[11]. 与桁架的优化相比,张拉整体结构是一类特殊的索杆结构,在优化过程不仅要保持结构预应力稳定平衡,而且结构节点位置不能发生改变.

本文以圆柱形张拉整体结构为研究对象,在任意给定的一组外力的情况下,选取构件力密度和横截面

收稿日期: 2014-11-01.

基金项目: 黑龙江省自然科学基金(11202128);机器人技术与系统国家重点实验室(HIT)开放研究项目(SKLRS(HIT)2014ZD05).

作者简介: 罗阿妮(1978—),女,副教授,硕士生导师.

通信作者: 刘贺平,liuheping@hrbeu.edu.cn .

积为设计参数，以结构力平衡为约束，对圆柱形张拉整体结构最小质量进行优化，综合考虑压杆的两种失效模式，设计结构的临界最小质量. 在给定外力和考虑有效替代空间的情况下，设计三维 T 型杆自相似迭代结构替换压杆，从而进一步减轻结构质量.

1　圆柱形张拉整体结构的构型

图 1 为一个折纸结构. 下面就以它为基础构建一个张拉整体结构. 把此结构表面的顶点作为所有构建结构的节点. 在它棱的位置放置绳，不相邻的节点以杆相连，每个节点上放置两根杆，杆构件按照螺旋形状分布. 为了增加结构的稳定性和刚度，这里采用了类似于 DNA 结构的反向双螺旋形式来布置杆组形式，所形成的结构如图 2 所示.

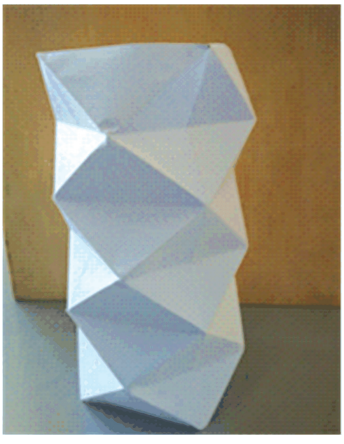


图 1　空间折纸模型

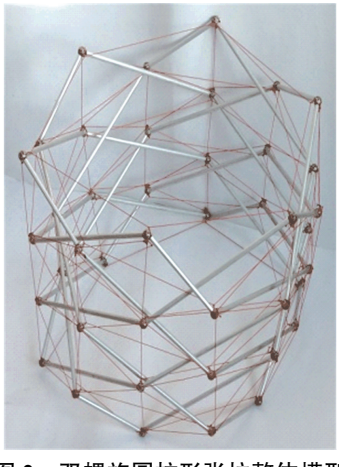


图 2　双螺旋圆柱形张拉整体模型

设此结构的第 i 个节点坐标为

$$\boldsymbol{n}_{i3\times1}=[\boldsymbol{n}_{ix}\quad \boldsymbol{n}_{iy}\quad \boldsymbol{n}_{iz}]^{\mathrm{T}}.$$

此结构的节点都分布于圆柱体表面，设圆柱体的高度为 h，其截面半径为 r. 所有节点都分布于互相平行的水平面上，每层的节点数都相同. 最底层为第 1 层，依次排序，设每层的节点数为 k，节点 i 所在的层编号为 c，结构中节点的总数为 a. 为描述方便，对其各个节点进行编号，按节点的编号，编排压杆和拉索的序号. 则第 i 个节点的坐标为

$$n_{ix}=\begin{cases} r\cos\{[i-(c-1)k-1]\times\dfrac{2\pi}{k}\}, & c=1,3,\cdots;\\ r\cos\{[i-(c-1)k]\times\dfrac{2\pi}{k}-\dfrac{\pi}{k}\}, & c=2,4,\cdots. \end{cases}$$

$$n_{iy}=\begin{cases} r\sin\{[i-(c-1)k-1]\times\dfrac{2\pi}{k}\}, & c=1,3,\cdots;\\ r\sin\{[i-(c-1)k]\times\dfrac{2\pi}{k}-\dfrac{\pi}{k}\}, & c=2,4,\cdots. \end{cases}$$

$$n_{iz}=(c-1)hk/a.$$

系统的节点矩阵为

$$\boldsymbol{N}=[\boldsymbol{n}_1\quad\cdots\quad\boldsymbol{n}_a]_{3\times a}.$$

设系统中有 q 根杆，p 根索，整个系统的杆向量矩阵和索向量矩阵可表示为

$$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{b}_1\quad\cdots\quad\boldsymbol{b}_q]_{3\times q},$$

$$\boldsymbol{S}=[\boldsymbol{s}_1\quad\cdots\quad\boldsymbol{s}_p]_{3\times p}.$$

式中：$\boldsymbol{b}_i(i=1,\cdots,q)$ 为第 i 根杆所对应的杆向量，$\boldsymbol{s}_j(j=1,\cdots,p)$ 为第 j 根索所对应的索向量.

为了建立构件矩阵和节点矩阵关系，需要构建连接矩阵，其具体构建方法为：连接矩阵的一行代表系统的一个节点与系统所有构件的关系（起点“-1”、终点“1”、无关“0”）. 矩阵的一列代表系统的一个构件与系统所有节点之间的关系（起点“-1”、终点“1”、无关“0”）. 因为任一构件（第 i 个构件）只与其两个端点连接的节点有关，所以定义连接矩阵第 i 列元素时，代表该构件起始节点位置的矩阵元素为-1，终止节点位置的矩阵元素为 1，其余与该构件无关的节点位置处的矩阵元素为 0. 按照这样的方法，分别构建系统的杆构件连接矩阵 $\boldsymbol{C}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}$ 和索构件连接矩阵 $\boldsymbol{C}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{T}}$.

构件矩阵、节点矩阵和连接矩阵的关系为

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{N}\boldsymbol{C}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{N}\boldsymbol{C}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{T}}.$$

各构件的长度也可以通过上述关系式计算获得.

2　静力平衡方程

定义作用于节点的外力矩阵为

$$\boldsymbol{W}=[\boldsymbol{w}_1\quad\cdots\quad\boldsymbol{w}_i\quad\cdots\boldsymbol{w}_a]\in\mathbf{R}^{3\times a}.$$

其中：$\boldsymbol{w}_i=[\boldsymbol{w}_{ix}\quad\boldsymbol{w}_{iy}\quad\boldsymbol{w}_{iz}]^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^{3\times1}$，$i\in[1,a]$.

定义索构件的内力矩阵为

$$\boldsymbol{T}=[\boldsymbol{T}_1\quad\cdots\quad\boldsymbol{T}_i\quad\cdots\quad\boldsymbol{T}_p]\in\mathbf{R}^{3\times p},$$

定义杆构件的内力矩阵为

$$\boldsymbol{G}=[\boldsymbol{G}_1\quad\cdots\quad\boldsymbol{G}_i\quad\cdots\quad\boldsymbol{G}_q]\in\mathbf{R}^{3\times q},$$

索构件和杆构件的力密度分别为

$$\gamma_i(i=1,\cdots,p)\text{ 和 }\lambda_j(j=1,\cdots,q),$$

则系统的内力矩阵可表示为

$$[\boldsymbol{T}\quad \boldsymbol{G}]=[\boldsymbol{s}_1\gamma_1\quad\cdots\quad \boldsymbol{s}_p\gamma_p\quad \boldsymbol{b}_1\lambda_1\quad\cdots\quad \boldsymbol{b}_q\lambda_q]=$$

$$[\boldsymbol{s}_1\quad\cdots\quad \boldsymbol{s}_p\quad \boldsymbol{b}_1\quad\cdots\quad \boldsymbol{b}_q]\cdot$$

$$\begin{bmatrix}\gamma_1&0&0&0&0&0\\0&\ddots&0&0&0&0\\0&0&\gamma_p&0&0&0\\0&0&0&\lambda_1&0&0\\0&0&0&0&\ddots&0\\0&0&0&0&0&\lambda_q\end{bmatrix}=$$

$$[\boldsymbol{S}\quad \boldsymbol{B}]_{3\times(p+q)}\begin{bmatrix}\hat{\gamma}&0\\0&\hat{\lambda}\end{bmatrix}_{(p+q)\times(p+q)}.$$

式中 $\hat{\gamma}$、$\hat{\lambda}$ 分别为索构件和杆构件力密度对角阵.

当结构处于平衡状态时,系统的力平衡方程为[12-13]

$$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{C}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{T}}\hat{\gamma}\,\boldsymbol{C}_{\mathrm{S}}-\boldsymbol{C}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\hat{\lambda}\,\boldsymbol{C}_{\mathrm{B}})=\boldsymbol{W}.$$

3 力密度优化及设计临界最小质量

由于此结构中各构件只受到轴向力的作用,并且杆构件受到压力的作用,索构件受到拉力的作用. 结构中的杆构件是两端具有弹性支撑的压杆,而当支撑刚度超过屈曲失稳阀值时,杆的屈曲荷载与两端刚性支撑铰支杆相同[14]. 两端铰支压杆主要有两种失效形式:一种是材料可能会屈服失效,即杆材料在外力作用下发生塑性变形;另一种是杆可能会发生弯曲变形,即实体杆达到其临界荷载,造成压杆的屈曲破坏. 而索构件由于拉力的作用,其失效形式为屈服失效. 综合考虑压杆的两种失效形式,设计此结构的临界最小质量. 当压杆的材料属性和长度固定时,结构的临界最小质量跟节点坐标位置、连接矩阵及外力有关. 根据这一思想,结构的质量表达式为如下两种情况:

1) 当压杆的失效临界状态为弯曲失稳时,

$$\boldsymbol{m}=\frac{\rho_{\mathrm{s}}}{\sigma_{\mathrm{s}}}\sum_{i=1}^{p}\gamma_i\|\boldsymbol{s}_i\|^2+\frac{2\rho_{\mathrm{b}}}{\sqrt{\pi\boldsymbol{E}}}\sum_{j=1}^{q}\sqrt{\lambda_j}\,\|\boldsymbol{b}_j\|^{3/2}=$$

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\rho_{\mathrm{s}}}{\sigma_{\mathrm{s}}}\boldsymbol{l}_{\mathrm{s}}^2&\dfrac{2\rho_{\mathrm{b}}}{\sqrt{\pi\boldsymbol{E}}}\boldsymbol{l}_{\mathrm{b}}^{3/2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\gamma\\\lambda^{1/2}\end{bmatrix};\qquad(1)$$

2) 当压杆的失效临界状态为屈服时,

$$\boldsymbol{m}=\frac{\rho_{\mathrm{s}}}{\sigma_{\mathrm{s}}}\sum_{i=1}^{p}\gamma_{\mathrm{i}}\|\boldsymbol{s}_{\mathrm{i}}\|^2+\frac{\rho_{\mathrm{b}}}{\sigma_{\mathrm{b}}}\sum_{j=1}^{q}\lambda_j\|\boldsymbol{b}_j\|^2=$$

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\rho_{\mathrm{s}}}{\sigma_{\mathrm{s}}}\boldsymbol{l}_{\mathrm{s}}^2&\dfrac{\rho_{\mathrm{b}}}{\sigma_{\mathrm{b}}}\boldsymbol{l}_{\mathrm{b}}^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\gamma\\\lambda\end{bmatrix}.\qquad(2)$$

式中:σ_{b} 是杆材料的屈服应力,ρ_{b} 为杆材料的质量密度;σ_{s} 是索材料的屈服应力,ρ_{s} 为索材料的质量密度;E 为杆的弹性模量;l_{s}、l_{b} 分别为索和杆的长度.

分别以式(1)和(2)为目标函数,力密度为自变量,以力平衡方程为约束,此时对应的优化模型为[15]

$$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{N}\boldsymbol{C}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{T}}\hat{\gamma}\boldsymbol{C}\boldsymbol{s}-\boldsymbol{N}\boldsymbol{C}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\hat{\lambda}\boldsymbol{C}_{B}.$$

$$\min(m(\gamma,\lambda)),\ \text{s.t.}[\hat{\gamma}]_{ii}=\gamma_i\geqslant 0,i=1,2,\cdots,p,$$

$$[\hat{\lambda}]_{jj}=\lambda_j\geqslant 0,j=1,2,\cdots,q.$$

由线性规划算法进行优化分析,即可求出两种情况下最优的构件力密度.

设第 i 个压杆的长度为 l_i,当压杆的失效临界状态为弯曲失稳时,其优化力密度为 $\lambda_{i\mathrm{b}}$,计算压杆横截面半径 $r_{\min\mathrm{b}}$ 为

$$r_{\min\mathrm{b}}=\sqrt[4]{4l_i^3\lambda_{i\mathrm{b}}/(E\pi^3)}.\qquad(3)$$

当压杆的失效临界状态为屈服时,其优化力密度为 λ_{iy},计算压杆横截面半径:

$$r_{\min y}=\sqrt{l_i\lambda_{iy}/(\sigma_{\mathrm{b}}\pi)}.\qquad(4)$$

临界质量圆柱形张拉整体结构中压杆的横截面半径为 $r=\max(r_{\min\mathrm{b}}\quad r_{\min y})$,则所设计的结构中压杆的失效临界状态即为 $r_{\min\mathrm{b}}$、$r_{\min y}$ 中最大的情况,其质量为这个结构的临界最小质量.

4 力密度优化仿真分析

取 $L=1$ m、$r=1$ m、$k=4$、$c=6$ 的圆柱形张拉整体结构,为了方便,索和杆的材料属性相同,弹性模量 E 为 206 GPa,质量密度 ρ 为 7.862×10^3 kg/m^3,材料的屈服应力 σ 为 690 MPa,结构受到垂直向下的力 F 为 100 N. 根据图 3 流程图和优化模型及算法,用 matlab 编程计算,即可得到各构件的最优力密度,压杆的失效临界状态为弯曲失稳以及屈服时,杆构件的力密度计算结果如表 1 所示.

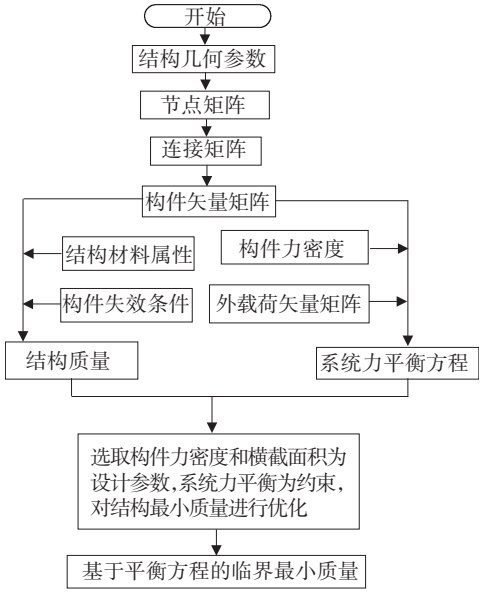


图 3 临界最小质量流程

表 1　弯曲失稳及屈服时杆的最优力密度　N/m

受压杆件编号	最优力密度	
	弯曲失稳	屈服
1、4、7、10	43.934	43.934
2、5、8、11	37.500	37.500
3、6、9、12	62.132	62.132
13−20	37.500	37.500
21、23、25、27	43.934	43.934
22、24、25、28	62.132	62.132

观察发现两种情况下压杆的力密度值相同，双螺旋圆柱形张拉整体结构中共有 2 种杆，其杆长分别为

$$b_1 = \sqrt{4r^2 \sin^2(\pi/4) + (h^2/9)} = 1.453\ \text{m},$$

$$b_2 = \sqrt{4r^2 \sin^2(\pi/8) + (h^2/36)} = 0.783\ \text{m}.$$

压杆共有 3 种轴向力，分别以杆 1、2、3 为研究对象，计算两种失效临界状态的横截面半径.

由式(3)、(4)可知

$$r_{1\min b} = 1.91 \times 10^{-3}\text{m} > r_{1\min y} = 1.26 \times 10^{-4}\text{m},$$

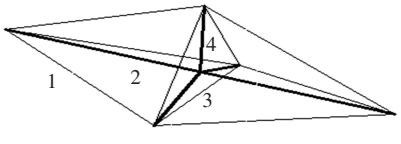
$$r_{2\min b} = 2.91 \times 10^{-3}\text{m} > r_{2\min y} = 1.59 \times 10^{-4}\text{m},$$

$$r_{3\min b} = 3.31 \times 10^{-3}\text{m} > r_{3\min y} = 2.04 \times 10^{-4}\text{m}.$$

由此可知设计此结构的临界最小质量采用的失效临界状态为压杆弯曲失稳. 此时结构共有 3 种受力情况压杆，横截面积不同，但有两种长度. 力密度优化后的结构临界质量为 $m = 1.033\ 9$ kg.

5　三维 T 型杆自相似迭代设计

由材料力学[16]可知，对于压杆，减小其支撑间距，就可以提高其抗失稳的能力. 这里采用三维 T 型杆对压杆进行替代，以增加其抗失稳能力，减小构件质量. 三维 T 型杆单元结构如图 4 所示. 由图可知，T 型杆中共有 9 条索，分为两类：斜拉索 s_1 和圆周索 s_2；含有 5 根细长压杆，分为两类：水平杆 l_1 和竖直杆 l_{v1}. 索 s_1 和压杆 l_1 的夹角为 α. 合理设计三维 T 型杆单元的构型，就可以用其替换压杆来达到减小质量的目的. 同理，利用多个三维 T 型杆单元进行进一步替代，也就是自相似迭代，就可以达到进一步减轻压杆质量的目的. 图 5 是迭代 4 次的三维 T 型杆结构.



1—斜拉索 s_1；2—水平杆 l_1；3—圆周索 s_2；4—竖直杆 l_{v1}

图 4　三维 T 型杆单元模型

由文献[8]可知，三维 T 型杆自相似迭代设计时所涉及的 3 个设计参数为：$\varepsilon \leqslant 0.5$，表示杆、索的材料性能对质量的影响；三维 T 型杆中的夹角 α 表示三维 T 型杆的构型对对质量的影响；最优迭代次数 n^*，表示迭代次数对质量的影响.

各设计参数的计算公式如下：

$$\varepsilon = \frac{c_s\sqrt{F_0}}{c_b l_0} = \frac{\rho_s\sqrt{\pi E F_0}}{2\sigma_s \rho_b l_0}, \tag{5}$$

$$\tan\alpha < (2/3)^{2/5}(\alpha < 40.374^0),$$

$$6n^* = \left[\frac{\ln[(\ln 2)(1 - \frac{3}{2}\tan^{\frac{5}{2}}\alpha)] - \ln[(1 + \frac{3}{2}\tan^2\alpha)\varepsilon]}{\ln 2}\right].$$

式中：n^* 四舍五入取最靠近右侧表达式的整数值，所有三维 T 型单元都用等角度 $\alpha_i = \alpha$ 设计. F_0 为压杆轴向压力，l_0 为压杆的杆长.

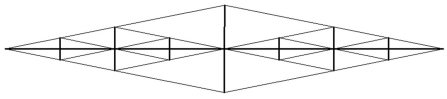


图 5　自相似迭代 3 次三维 T 型杆结构正视图

5.1　有效替代空间

在对三维张拉整体结构中的压杆进行三维 T 型杆自相似迭代替换时，还要考虑压杆所处整个系统中的空间大小，在对杆进行替换的过程中可能会出现三维 T 单元中的构件与结构中其他的构件发生干涉的情况. 为了避免干涉，需求得以下两个边界：1)压杆与压杆空间相交构件夹角的最小角度；2)三维 T 单元的斜拉索 s_1 与压杆空间相异构(距离较近的构件)相交时三维 T 单元的夹角.

现假设三维张拉整体结构中的某一压杆需进行三维 T 型杆替换来减小质量. 设这一压杆为杆 l，其起点节点坐标为 n_q，终点节点坐标为 n_z，压杆的位置矢量为 $\vec{\boldsymbol{a}}$. 与这一压杆相交的构件有 i 个，构件相交点为起点 n_q 或终点 n_z，相交于起点的有 k 个构件，则相交于终点的有 $i-k$ 个构件，其中一个相交构件的向量坐标位置矢量为 $\vec{\boldsymbol{b}}$. 与这一压杆空间相异的构件(距离较近的构件)有 j 个，其中一个相异构件的位置矢量为 $\vec{\boldsymbol{c}}$，该构件的某一节点坐标为 $\boldsymbol{n}_c$.

压杆与压杆空间相交构件的夹角通式为

$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}}{|\vec{\boldsymbol{a}}| \times |\vec{\boldsymbol{b}}|}\right) = \arccos\left(\frac{\boldsymbol{a}_x\boldsymbol{b}_x + \boldsymbol{a}_y\boldsymbol{b}_y + \boldsymbol{a}_z\boldsymbol{b}_z}{\sqrt{\boldsymbol{a}_x^2 + \boldsymbol{a}_y^2 + \boldsymbol{a}_z^2} \times \sqrt{\boldsymbol{b}_x^2 + \boldsymbol{b}_y^2 + \boldsymbol{b}_z^2}}\right). \tag{6}$$

三维 T 单元的斜拉索 s_1 与压杆空间相异构件(距离较近的构件)相交时，压杆 l 的中点空间坐标为

$$\boldsymbol{n}_{zd} = 0.5 \times \boldsymbol{n}_q + 0.5\boldsymbol{n}_z \begin{pmatrix} \boldsymbol{n}_{zdx} \\ \boldsymbol{n}_{zdy} \\ \boldsymbol{n}_{zdz} \end{pmatrix}.$$

两点 $\boldsymbol{n}_q$ 和 $\boldsymbol{n}_c$ 连线的向量为

$$\overrightarrow{\boldsymbol{l}_{qc}} = \boldsymbol{n}_q - \boldsymbol{n}_c = \begin{pmatrix} \boldsymbol{n}_{qcx} \\ \boldsymbol{n}_{qcy} \\ \boldsymbol{n}_{qcz} \end{pmatrix}.$$

相异构件 $\vec{\boldsymbol{c}}$ 和两点 $\boldsymbol{n}_q$ 和 $\boldsymbol{n}_c$ 的连线所组成的平面法线为

$$\vec{\boldsymbol{f}}_a = \boldsymbol{l}_{qc} \times \vec{\boldsymbol{c}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{n}_{qcx} & \boldsymbol{n}_{qcy} & \boldsymbol{n}_{qcz} \\ \boldsymbol{c}_x & \boldsymbol{c}_y p & \boldsymbol{c}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{f}_{ax} \\ \boldsymbol{f}_{ay} \\ \boldsymbol{f}_{az} \end{pmatrix}.$$

杆 l 的中点 $\boldsymbol{n}_{zd}$ 到上述平面的距离为

$$d = \frac{|f_{ax}(n_{zdx} - n_{cx}) + f_{ay}(n_{zdy} - n_{cy}) + f_{az}(n_{zdz} - n_{cz})|}{\sqrt{f_{ax}^2 + f_{ay}^2 + f_{az}^2}}.$$

此时该情况边界条件下的夹角为

$$\theta = \arctan(2d/l). \tag{7}$$

对于这样的某一压杆需要求 $i + j$ 个夹角，取其最小的夹角为边界夹角：

$$\theta_{bj} = \min(\theta_1 \quad \cdots \quad \theta_i \quad \theta_{i+1} \quad \cdots \quad \theta_{i+j}). \tag{8}$$

这时压杆所处整个系统中不发生干涉的有效替代空间为夹角为 θ_{bj} 的相对圆锥体，如图 6 所示.

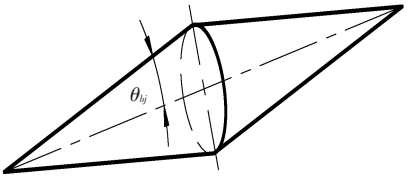


图 6 有效替代空间

在对压杆进行三维 T 型杆自相似迭代替换来减轻质量时，三维 T 型杆的夹角 α 不仅要满足设计参数 $\alpha < 40.374°$，还要使三维 T 型杆处于不发生干涉的相. 对圆锥体空间内，即 $\alpha < \theta_{bj}$. 则三维 T 型杆的夹角 α 的选择需满足：

$$\alpha < \begin{cases} 40.374°, & \theta_{bj} \geqslant 40.374°; \\ \theta_{bj}, & \theta_{bj} < 40.374°. \end{cases}$$

则替代后张拉整体结构总质量为

$$mT = \frac{\rho_s}{\sigma_s} \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \| s_i \|^2 + \frac{2\rho_b}{\sqrt{\pi E}} \sum_{j=1}^{l} \sqrt{\lambda_j} \| b_j \|^{3/2} \cdot \{2^{-n_j} + 1.5\tan\alpha^{5/2}(1 - 2^{-n_j}) + n_j \varepsilon_j (1 + 1.5\tan\alpha^2)\}. \tag{9}$$

5.2 三维 T 杆替代的仿真分析

利用前面计算的结构杆长和力密度，由式(5)计算每个杆的 ε 值. 经计算可知，所有的杆的 ε 值都<0.5，故此结构可以通过三维 T 单元迭代替换减轻质量.

由于此圆柱形张拉整体结构存在两个螺旋方向，每个方向联接方式相同，旋向相反，并且结构在水平截面圆周上 4 等分，在竖直方向上 5 等分来布置节点位置. 因此，此结构具有很好的对称性和规律性. 所以只需考虑中间长杆的有效替代空间即可. 选择杆 15 为研究对象，杆 15 连接起点节点 10 和终点节点 19，与这一压杆相交的构件有 18 个，相交于起点 10 的有 9 个构件，相交于终点 19 的有 9 个构件，由于联接方式相同，故只考虑起点节点 10 相交的构件即可，共有 8 根索和 1 根压杆，与这一压杆空间相异的构件(距离较近的构件)有 2 根索，根据式(6)、(7)、(8)计算这 10 个夹角可得整个系统中压杆不发生干涉的边界夹角 θ_{bj} 为 16.58°.

由式(8)、(9)可知，式(9)是关于夹角 α 的增函数，α 越大，替代后的总质量越大，所以尽量选择较小的夹角，这里选择 $\tan\alpha = 0.2$($\alpha = 11.31° < 16.58°$) 作为三维 T 型杆的夹角，计算系统中每根压杆的最优迭代次数 n^* 结果见表 2.

表 2 杆的最优迭代次数 n^* 值

受压杆件编号	n^*
1、4、7、10	7
2、5、8、11	7
3、6、9、12	6
13-20	7
21、23、25、27	7
22、24、25、28	6

利用分析获得的夹角 α、最优迭代数目 n^*、原始杆杆长及材料属性值，根据图 3 相同流程，用 matlab 编程计算三维 T 型杆迭代替换 n^* 次后圆柱形双螺旋张拉整体系统的质量 $m' = 0.330\ 5$ kg，

$$m'/m = 0.32.$$

则替代后的结构质量只有替代前系统质量的 32%. 由式(1)和(9)比较可知，该质量减轻的方法不是通过改变材料属性实现的，而是通过自相似迭代结构进一步减小压杆横截面积实现的.

6 结 论

1)本文给出了一种有效的张拉整体结构构型方法，通过建立节点矩阵和连接矩阵，快速得到圆柱形张拉整体结构的杆、索向量矩阵，这比通过节点坐标和构件长度建立杆系结构的方法更方便有效.

2)给定一组外力的情况下，详细地给出了圆柱形张拉整体结构最小质量优化的过程和方法，该最小质量优化方法避免了传统杆系优化结果无法保持张拉整体结构预应力稳定平衡和节点位置不变的

弊端.

3)最小质量优化过程中,详细地介绍了压杆的失效模式,讨论了临界质量圆柱形张拉整体结构中压杆的横截面半径的选择方法,并得到了临界最小质量.

4)在获得临界质量圆柱形张拉整体结构的基础上,通过引进三维 T 型杆自相似迭代结构,进一步给出了设计一个质量更轻的张拉整体结构的详细过程和方法,提出了有效替代空间的概念,并给出了有效空间的计算方法.

参考文献

[1] FULLER R B. Tensile-integrity structures: US3063521A [P]. 1962-11-13[2015-01-15]. http://patft.uspto.gov/.

[2] 刘锡良,陈志华.一种新型空间结构——张拉整体体系[J].土木工程学报,1995,28(4):52-57.

[3] MOTTO R.Tensegrity structural systems for the future[M]. London:Kogan Page Science, 2003:14-135.

[4] PUAL C, ROBERTS J W, LIPSON H, et al. Gait production in a tensegrity based robot [C]//the 2005 International Conference on Advanced Robots. Seattle: IEEE,2005:216-222.

[5] TIBERT A G, PELLGRINO S. Deployable tensegrity reflectors for small satellites[J].Spacecraft and Rockets, 2002,39(5):701-709.

[6] TIBERT A G. Deployable tensegrity structures for space applications [D]. Stockholm: Royal Institute of Technology, 2002.

[7] 江洁,李团结.张拉整体结构振动最优控制的作动器优化配置[J].西安电子科技大学学报,2014,41(1):170-175.

[8] SKELTON R E, de OLVERIRA M C.Tensegrity Systems [M].New Yorks:Spriger,2010:73-128.

[9] NAGASE K, SKELTON R E. Minimal mass design of tensegrity structures[C]//Sensors and Smart Structures Technologies for Civil,Mechanical and Aerospace Systems. San Diego:SPIE,2014:1-14.

[10] SKELTON R E, FRATERNALIB F, CARPENTIERIB G, et al. Minimum mass design of tensegrity bridges with parametric architecture and multiscale complexity [J]. Mechanics Research Communications,2014,58:124-132.

[11] 陈芸. 基于遗传算法的桁架形状优化及最小质量设计[J]. 南京工业大学学报(自然科学版),2006,28(6):32-36.

[12] PELLEGRIN S, CALLADINE C R. Matrix analysis of statically and kinematically indeterminate frameworks[J]. International Journal of Solid & Structures, 1986, 22: 409-428.

[13] KANGWAI R D,GUEST S D. Symmetry-adapted equilibrium matrices[J]. International Journal of Solid & Structures, 2000,37:1525-1548.

[14] 罗尧治,年有增,符刚. 基于压杆失稳的张拉整体结构极限承载力[J].空间结构,2004,10(1):7-11.

[15] ZHANG J Y, OHSAKI M. Adaptive force density method for form finding problem oftensegrity structures [J]. International Journal of Solid & Structures, 2006, 43: 5658-5673.

[16] 张功学.材料力学[M].北京:西安电子科技大学出版,2008:173-184.

(编辑　杨　波)