钢管混凝土拱极限承载力分析的共旋坐标法

邓继华[1,2], 邵旭东[3], 谭 平[2]

(1.长沙理工大学 土木与建筑工程学院, 410076 长沙; 2.广州大学 工程抗震研究中心, 510405 广州;
3.湖南大学 土木工程学院,410082 长沙)

摘 要: 为提高钢管混凝土拱极限承载力分析的精度和效率,基于共旋坐标法建立了考虑材料和几何非线性的钢管混凝土拱数值分析模型.首先基于共旋坐标系下应变和消除刚体位移后的变形为线性关系,利用虚功原理无须迭代就可直接计算出该坐标系下完全粘结钢管混凝土梁单元考虑材料非线性的切线刚度矩阵,再通过结构坐标系与共旋坐标系下节点力之间及节点位移之间的总量关系及微分导出的增量关系,最终获得其在结构坐标系中考虑几何与材料双非线性的切线刚度矩阵,不平衡力完全是基于全量来计算.算例结果表明,该算法具有减少计算量、不累积误差和精度高等优点.

关键词: 钢管混凝土;极限承载力;共旋坐标法;双非线性;切线刚度矩阵
中图分类号: TU398.01 **文献标志码**: A **文章编号**: 0367-6234(2013)12-0086-04

Co-rotational procedure of ultimate bearing capacity analysis for concrete filled steel tubular arch

DENG Jihua[1,2], SHAO Xudong[3], TAN Ping[2]

(1.School of Civil Engineering and Architecture, Changsha University of Science and Technology, 410076 Changsha, China;
2. Earthquake Engineering Research & Test Center, Guangzhou University, 510405 Guangzhou, China;
3. College of Civil Engineering, Hunan University, 410082 Changsha, China)

Abstract: To improve calculation efficiency and accuracy of ultimate bearing capacity analysis for concrete filled steel tube arch, based on co-rotational procedure, a numerical model considering material and geometrical nonlinear analysis for concrete filled steel tube beam element is developed. Firstly, based on a linear relationship of strain in co-rotational coordinate system and deformation excluding displace of rigid body, by means of virtue work, a tangent stiffness matrix for material nonlinearity of perfectly-bonded concrete filled steel tube beam element is derived in co-rotational coordinate system without iteration. Then, by building total and incremental relationships derived from differential equations of nodal displacements and forces between global coordinate system and co-rotational coordinate system, respectively, tangent stiffness in global coordinate system concrete filled steel tube beam element is developed considering geometric and material nonlinearity, and unbalanced forces are calculated based on total relations. A comparison between the results in this paper and those from existed references demonstrates that the algorithm in this paper is highly efficient and accurate with many advantages such as non-cumulative calculation errors and reduction in computation.

Key words: concrete filled steel tube; ultimate bearing capacity; co-rotational procedure; bi-nonlinear; tangent stiffness matrix

钢管混凝土拱极限承载力作为钢管混凝土结构设计理论中的核心问题一直是研究热点[1-3].目前已有钢管混凝土非线性分析模型中,大部分都是借用钢筋混凝土常采用的分层梁模型[4]. 而分层梁模型算法有以下问题:

收稿日期: 2012-12-04.
基金项目: 国家重点基础研究发展计划项目(2011CB013606);
国家自然科学基金(51008037).
作者简介: 邓继华(1975—),男,博士,副教授;
邵旭东(1961—),男,教授,博士生导师;
谭 平(1973—),男,研究员,博士生导师.
通信作者: 邓继华,jihuadeng@sina.com.

1)将截面划分成数百层，截面每一层的应变都假定为沿梁单元轴向均匀分布，为保证计算精度，单元长度需划分得很短，导致计算量猛增；

2)几何非线性采用总体拉格朗日法(T.L 法)或修正拉格朗日法(U.L 法)，已有非线性研究文献发现 T.L 法计算精度很低[5]，U.L 法有误差累积，计算效率不高的问题[6]；

3)由 Cranston 迭代法求解截面的切线抗拉压及抗弯刚度，迭代计算量巨大，甚至由于混凝土和钢管的应力－应变曲线为分段曲线而不收敛[7].

在共旋坐标法(CR 法)、T.L 法、U.L 法等几何非线性分析方法中，共旋坐标法具有误差不累积，计算精度和效率较高等优点[8-11]，但目前对共旋坐标法的研究主要集中在几何非线性分析方面，用于几何与材料双非线性分析方面较少.本文基于共旋坐标系下应变和消除刚体位移后的变形为线性关系，利用虚功原理，直接计算出该坐标系下钢管混凝土梁单元考虑材料非线性的切线刚度矩阵，再通过转换矩阵获得其在结构坐标系中考虑几何与材料双非线性的切线刚度矩阵，并进行了严格验证.

1　钢管混凝土梁元切线刚度矩阵

1.1　基本假设

如图 1 所示钢管混凝土截面，分析中采用以下假定[2]：1)平截面假定；2)无滑移假定；3)无剪切假定.

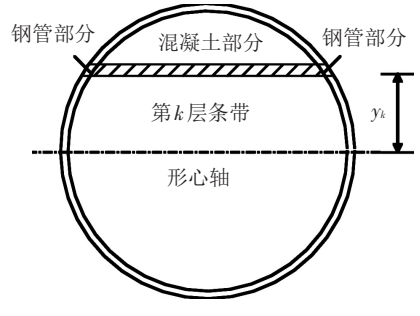
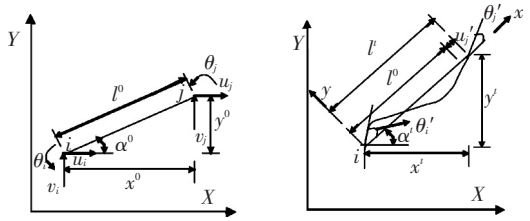


图 1　钢管混凝土截面

1.2　共旋坐标系下单元材料非线性切线刚度矩阵

图 2 示意了在结构坐标系 XY 中初始时刻和计算 t 时刻钢管混凝土梁单元的几何参数及位移的即时变量；设钢管混凝土梁单元的共旋坐标系为 xy，该坐标系是随单元变形而转动的，它始终以节点 i 为原点，以节点 i 到 j 的连线方向为 x 轴，由 x 轴逆时钟转 90° 为 y 轴.



(a)初始时刻　　(b)计算时刻

图 2　变形前后梁单元

设初始时刻单元节点在结构坐标系里的坐标为$(x_i,\ y_i)$ 和$(x_j,\ y_j)$，计算 t 时刻结构坐标系中的位移向量 $\boldsymbol{d} = [u_i\ \ v_i\ \ \theta_i\ \ u_j\ \ v_j\ \ \theta_j]^{\mathrm{T}}$，在共旋坐标系中的位移向量 $\boldsymbol{d}_l = [u_i'\ \ v_i'\ \ \theta_i'\ \ u_j'\ \ v_j'\ \ \theta_j']^{\mathrm{T}}$，对比图 2(a) 与图 2(b) 可知：

$$x^t = x^0 + u_j - u_i,\quad y^t = y^0 + v_j - v_i,$$
$$\alpha^t = \arctan\left(\frac{y^t}{x^t}\right). \tag{1}$$

混凝土梁元在共旋坐标系中的节点位移为

$$\begin{cases} u_i' = v_i' = v_j' = 0,\quad u_j' = l^t - l^0; \\ \theta_i' = \theta_i - (\alpha^t - \alpha^0),\ \theta_j' = \theta_j - (\alpha^t - \alpha^0). \end{cases} \tag{2}$$

式中 l^0、l^t 分别为变形前后梁单元长度.

设单元任一截面形心轴处的应变及截面曲率为 ε_0、φ，在共旋坐标系下单元的应变－位移关系只需考虑线性项[12]，有

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \varphi \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}_0 \boldsymbol{d}_l. \tag{3}$$

如图 1 所示，采用沿梁高分层的方法，对计算截面任意梁层 k，基于平截面假定，由 ε_0、φ 可求出该梁层的应变值 ε_k 为

$$\varepsilon_k = \varepsilon_0 + y_k \varphi, \tag{4}$$

式中 y_k 为梁层 k 到形心轴的距离.

通过混凝土和钢管的应力－应变关系由 ε_k 可求得梁层 k 处各自的应力 σ_k^{c}、σ_k^{s} 和切线模量 E_k^{c}、E_k^{s}，截面力 $\boldsymbol{P} = (n^{\mathrm{cs}}\ \ m^{\mathrm{cs}})$(上标 c、s、cs 分别代表混凝土、钢管及钢管混凝土，以下均同) 可由截面平衡条件求得

$$n^{\mathrm{cs}} = \sum_{k=1}^{n} A_k^{\mathrm{c}} \sigma_k^{\mathrm{c}} + A_k^{\mathrm{s}} \sigma_k^{\mathrm{s}},$$
$$m^{\mathrm{cs}} = \sum_{k=1}^{n} (A_k^{\mathrm{c}} \sigma_k^{\mathrm{c}} + A_k^{\mathrm{s}} \sigma_k^{\mathrm{s}}) y_k. \tag{5}$$

式中：A_k^{c}、A_k^{s} 分别为梁层 k 处混凝土和钢管的面积，n 为截面分层总数.

微分式(5)及代入式(4)的微分，有

$$\delta \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \delta n^{\mathrm{cs}} \\ \delta m^{\mathrm{cs}} \end{bmatrix} = \boldsymbol{D} \begin{bmatrix} \delta \varepsilon_0 \\ \delta \varphi \end{bmatrix}, \tag{6}$$

式中

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}\sum_{k=1}^{n}(A_k^{c}E_k^{c}+A_k^{s}E_k^{s}) & \sum_{k=1}^{n}(A_k^{c}E_k^{c}+A_k^{s}E_k^{s})y_k\\ \sum_{k=1}^{n}(A_k^{c}E_k^{c}+A_k^{s}E_k^{s})y_k & \sum_{k=1}^{n}(A_k^{c}E_k^{c}+A_k^{s}E_k^{s})y_k^{2}\end{bmatrix}.$$

由虚功原理可建立单元的平衡方程组

$$\delta\boldsymbol{d}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}=\int_0^{l^0}\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\mathrm{d}x, \tag{7}$$

式中 $\boldsymbol{f}$ 为共旋坐标系下单元等效节点力列阵.

微分式(3)并代入式(7)可得

$$\boldsymbol{f}=\int_0^{l^0}\boldsymbol{B}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\mathrm{d}x, \tag{8}$$

微分式(8),联立式(6)和微分式(3)有

$$\delta\boldsymbol{f}=\int_0^{l^0}\boldsymbol{B}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}_0\mathrm{d}x\cdot\delta\boldsymbol{d}_l=\boldsymbol{k}_l\cdot\delta\boldsymbol{d}_l. \tag{9}$$

式中 $\boldsymbol{k}_l$ 即为共旋坐标系下考虑材料非线性的单元切线刚度矩阵,且 $\boldsymbol{k}_l=\int_0^{l^0}\boldsymbol{B}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}_0\mathrm{d}x$.

1.3 结构坐标系下单元双非线性切线刚度矩阵

从式(2)知,由于 u_i'、v_i'、v_j' 恒为0,对式(2)的后三项进行微分,得到共旋坐标系下的位移微分 $\delta\boldsymbol{d}_l$ 用结构坐标系下的位移微分 $\delta\boldsymbol{d}$ 表达的形式

$$\delta\boldsymbol{d}_l=\boldsymbol{T}\delta\boldsymbol{d}. \tag{10}$$

设钢管混凝土梁单元在结构坐标系下的节点力向量 $\boldsymbol{F}$,由静力学关系可导出[13]

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}, \tag{11}$$

式中 t 为结构坐标系与共旋坐标系之间的转换矩阵.

将式(11)两边微分可得

$$\delta\boldsymbol{F}=\delta\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}+\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{f}. \tag{12}$$

微分式(11)中的矩阵 $\boldsymbol{t}$,及联立式(8)、(9)和(10),可将 $\delta\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{f}$ 分别用 $\delta\boldsymbol{d}$ 表达

$$\delta\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}=\boldsymbol{K}_n\delta\boldsymbol{d},$$
$$\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{f}=\boldsymbol{K}_l\delta\boldsymbol{d}. \tag{13}$$

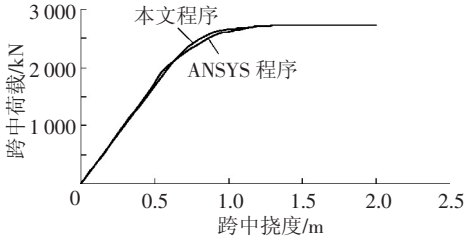
联立式(12)和(13),显然,$\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{K}_l+\boldsymbol{K}_n$ 即为所求钢管混凝土梁单元在结构坐标系下考虑几何与材料双非线性的切线刚度矩阵.

2 材料的应力-应变关系

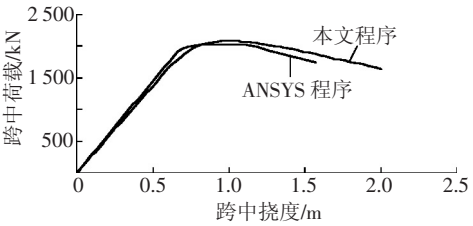
钢管的应力-应变曲线采用理想弹塑性曲线,不考虑钢材的应力强化;钢管内核心混凝土受压应力-应变关系采用文献[14]中考虑了套箍作用的分段多项式;受拉区混凝土应力-应变关系为清华大学试验研究得到的轴心受拉曲线.

3 算例分析

例 1 简支梁[4],该梁的跨径为 $L=50$ m,截面为矩形,宽 $b=1.0$ m,高 $h=0.8$ m,跨中受一竖向集中力 P 的作用,材料为钢材,其本构关系参数:$E=2.1\times10^8$ kPa,$\varepsilon_s=1.0\times10^{-3}$,$E_{\mathrm{T}}=0$. 进行两种工况的计算,一种是只在跨中作用1个竖向集中力,另一种是为增大几何非线性的影响,先在梁端作用一个大小不变的轴向力 6 720 kN,再在跨中作用1个竖向集中力;按两种方法进行考虑双非线性计算:1) ANSYS 方法,将梁划分成50个beam189 空间梁单元,材料非线性通过采用双线性随动强化模型(BKIN),几何非线性因素考虑了大位移效应和应力刚化效应;2)本文方法,将梁均匀划分成50个单元,横截面等分成8层,两种方法得到的荷载-跨中挠度曲线见图3.



(a) 工况一



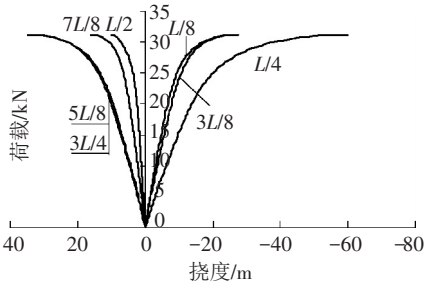
(b) 工况二

图 3 荷载-跨中挠度曲线

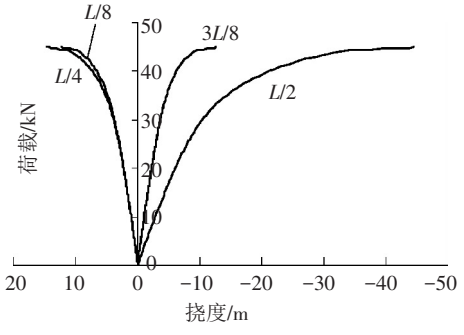
由文献[4]知,该梁理论上的塑性极限弯矩及跨中最大所能承受的竖向集中力分别为 33 600 kN·m和 2 688 kN,用本文程序、ANSYS 程序及文献[4]所得的极限荷载值分别为 2 728、2 714、2 800 kN;对于工况二,从图3(b)可知,由于轴向力的影响,使梁的极限荷载值显著降低,本文程序、ANSYS 程序及文献[4]所得极限荷载值分别为 2 088、2 030 和 2 150 kN,如果不考虑几何非线性的影响,则理论上算得的极限承载弯矩及承载力分别为 31 500 kN·m 和 2 520 kN,可见此时几何非线性影响显著,对以上计算结果进行比较,图3说明本文双非线性算法正确.尚应指出,文献[4]在工况二下计算得到的荷载-跨中挠度曲线顶部与工况一类似,也是平的,这是非线性计算中未考虑水平轴向力的二次效应.

例 2 两个钢管混凝土拱肋模型 A-1 和A-2 分别承受拱顶和1/4 跨径处作用的集中荷载,钢管混凝土拱肋模型的尺寸为:净跨径4.6 m,净矢

高 1.533 m，钢管拱肋为抛物线单圆管，外径 ϕ76 mm，钢管壁厚 3.8 mm，钢材屈服强度 f_y = 307.67 MPa，钢材弹模 E_s = 206 GPa，剪切模量 G_s = 81 GMPa，混凝土立方体抗压强度 f_{cu} = 36.8 MPa，混凝土弹模 E_c = 32.1 GPa.本文计算的荷载-位移曲线见图 4，表 1、2 示出本文计算的荷载与位移极限值、模型的试验极限值及其他文献的计算极限值，从中可看出本文算法正确.



(a) A-1 模型



(b) A-2 模型

图 4　模型拱荷载-位移曲线

表 1　模型拱极限荷载值比较　　kN

模型	试验值	本文	文献[2]	文献[15]	文献[16]
A-1	31.90	31.24	31.37	32.80	33.00
A-2	42.07	44.93	44.92	47.90	47.40

表 2　模型拱极限挠度值比较　　mm

模型	试验值	本文	文献[2]	文献[15]	文献[16]
A-1	60.24	60.01	68.33	67.28	-
A-2	38.96	44.49	45.84	55.44	-

4　结　语

从本文推导过程及算例结果可知，本文算法相对于目前已有的非线性算法而言，在几何非线性方面，克服了 T.L 列式法精度不高和 U.L 列式法对增量步长有严格限制的缺点，在材料非线性方面，本文算法基于应变与共旋坐标系下已经扣除单元刚体位移的节点变形为线性关系从而通过虚功原理由截面切线刚度矩阵积分直接求解出单元切线刚度矩阵，省去了反复迭代过程，计算量少且精度和效率均比较高，适合钢管混凝土结构的极限承载能力分析.

参考文献

[1] 涂光亚，颜东煌，邵旭东. 脱粘对单圆管钢管混凝土拱桥极限承载力的影响[J].哈尔滨工业大学学报，2010，42(12)：1999-2002.

[2] 丁发兴，余志武，蒋丽忠.圆钢管混凝土结构非线性有限元分析[J].建筑结构学报，2006，27(4)：110-115.

[3] 陈宝春，秦泽豹，彦坂熙，等. 钢管混凝土拱(单圆管)面内受力双重非线性有限元分析[J].铁道学报，2003，25(4)：80-84.

[4] 潘家英，张国政，程庆国. 大跨度桥梁极限承载力的几何与材料非线性耦合分析[J]. 土木工程学报，2000，33(1)：5-9.

[5] 吕和祥，朱菊芬，马莉颖. 大转动梁的几何非线性 分析讨论[J]. 计算结构力学及其应用，1995，12(4)：485-490.

[6] BATHE K J，BOLOURCHI S. Large displacement analysis of three-dimensional beam structures [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering，1979，14：961-986.

[7] 曾永革，李传习. 钢筋混凝土梁单元截面刚度求解方法[J].铁道科学与工程学报，2009，6(1)：62-67.

[8] CRISFIELD M A，MOITA G F. A co-rotational formulation for 2-D continua including incompatible modes[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering，1996，39：2619-2633.

[9] IZZUDDIN B A. An enhanced co-rotational approach for large displacement analysis of plates[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering，2005，64：1350-1374.

[10] LI Z X，IZZUDDIN B A，VU-QUOC L. A 9-node co-rotational quadrilateral shell element[J]. Computational Mechanics，2008，42：873-884.

[11] PAJOT J M，MAUTE K. Analytical sensitivity analysis of geometrically nonlinear structures based on the co-rotational finite element method[J]. Finite Elements in Analysis and Design，2006，42：900-913.

[12] CRISFIELD M A. Nonlinear finite element analysis of solids and structures[M]. Chichester：John Wiley & Sons，Inc，1997.

[13] 蔡松柏，沈蒲生.大转动平面梁有限元分析的共旋坐标法[J].工程力学，2006，23(增刊 1)：69-72.

[14] 韩林海.钢管混凝土结构[M].北京：科学出版社，2000.

[15] 秦泽豹.钢管混凝土单圆管肋拱极限承载力研究[D]. 福州：福州大学，2002.

[16] 颜全胜，王颋.钢管混凝土拱肋面内弹塑性承载力分析[J].昆明理工大学学报：理工版，2003，28(5)：110-113.

(**编辑**　赵丽莹)