人字齿轮系统齿根动应力计算与对比试验

王 峰，方宗德，李声晋

（西北工业大学 机电学院，710072 西安）

摘 要：为了准确地计算人字齿轮的齿根动应力，建立了考虑误差激励、时变啮合刚度激励、啮入冲击激励和齿侧间隙影响的人字齿轮传动系统十二自由度啮合型弯－扭－轴耦合动力学模型，提出考虑实时动载荷对齿间载荷分配系数影响的齿根动应力计算方法. 以某船用人字齿轮副为实例进行的仿真计算结果表明：随着外载荷和输入转速的增加，人字齿轮传动系统齿根动应力最大值均呈增加趋势；由于齿侧间隙的存在，随着外载荷增加，齿根动应力的相对波动趋势经历了先减小后增大的过程. 试验数据与数值仿真基本吻合，较准确地反映了齿根动应力的波动趋势.

关键词：人字齿轮；振动模型；动载荷；载荷分配；齿根动应力

中图分类号：TH132.41；O322 **文献标志码**：A **文章编号**：0367－6234(2013)11－0064－05

Contrast verification and calculation of herringbone gear tooth root dynamic stress

WANG Feng, FANG Zongde, LI Shengjin

(School of Mechatronics, Northwestern Polytechnical University, 710072 Xi'an, China)

Abstract: To accurately calculate the herringbone gear tooth root dynamic stress, nonlinear herringbone gear vibration model of twelve degrees of freedom is established considering transmission error, meshing stiffness, corner mesh impact, and backlash. New method for calculating tooth root dynamic stress is put forward considering the influence of real-time dynamic load on the load distribution coefficient. Taking a ship herringbone gear transmission system as an example, the results consistently indicate that herringbone gear tooth root dynamic stresses both increase with the increasing of load torque and driving wheel rotational speed. With the external load increases, the relative fluctuations of the dynamic stress in meshing tooth root decreases first and then increases due to the influence of teeth backlash. Numerical simulation and experimental data are in good agreement. The method can more accurately reflect the trends of tooth root stress fluctuations.

Key words: herringbone gear; dynamic model; dynamic load; load distribution; tooth root dynamic stress

凭借承载能力大，运转平稳且噪声小，同时又能够克服轴向力等优点，人字齿轮传动系统已成为舰船等重型机械传动系统的重要组成部分，其动态特性将直接影响传动系统的稳定性和可靠性[1]. 人字齿轮的静强度一般都能满足设计要求并有一定的盈余量，而现代大功率舰船需在多载荷、多转速工况下稳定工作，因此研究动载荷下其齿根动应力的波动变化趋势对提高人字齿轮传动系统疲劳寿命、安全系数等有着积极的意义. 文献[2]建立了一对舰用人字齿轮接触仿真分析模型，并将接触仿真得到的接触应力结果与赫兹理论进行了比较，说明了接触单元在齿轮接触应力分析上的精确性、有效性和可靠性. 文献[3]和[4]利用考虑时变啮合刚度、基节误差的圆柱齿轮动力学振动模型，求出了动载荷作用下的轮齿齿根动应力. 动载荷下轮齿各啮合接触线的载荷分配系数都跟瞬时的系统动载荷有关，对于高速、重载、大重合度的人字齿轮传动系统来说，动载荷

收稿日期：2012－03－05.
基金项目：国家自然科学基金资助项目(51175423).
作者简介：王 峰(1986—)，男，博士研究生；
方宗德(1948—)，男，教授，博士生导师；
李声晋(1962—)，男，教授，博士生导师.
通信作者：王 峰，bewater@163.com.

的变化直接改变了载荷在人字齿轮各啮合齿对间的分配率，从而加剧了齿轮齿根应力的波动，而这方面的研究尚未见有文献报道.

本文由轮齿承载接触分析(Load Tooth Contact Analysis，LTCA)计算出考虑安装误差的轮齿综合啮合刚度，建立考虑轮齿误差激励、时变啮合刚度激励、啮入冲击激励和齿侧间隙影响的人字齿轮系统十二自由度啮合型弯－扭－轴耦合振动模型. 得出了考虑动载荷影响的轮齿间载荷分配系数，精确计算了人字齿轮啮合齿对的齿根动应力，试验对比验证了计算结果的准确性，研究分析了不同载荷、不同转速下齿根动应力的变化特性.

1　动载荷计算模型

在人字齿轮传动系统中，由于加工误差、受力变形等原因，左右两斜齿轮副产生的轴向力不可能完全抵消，因此，系统除具有扭转振动和横向振动外，还会引起轴向窜动，从而形成了综合考虑误差激励、时变啮合刚度激励、啮入冲击激励、齿侧间隙激励的人字齿轮啮合型弯－扭－轴耦合振动模型[5].

系统的十二自由度广义位移列阵可表示为 $\{\boldsymbol{\delta}\} = \{y_{p1}, z_{p1}, \theta_{p1}, y_{g1}, z_{g1}, \theta_{g1}, y_{p2}, z_{p2}, \theta_{p2}, y_{g2}, z_{g2}, \theta_{g2}\}^{\mathrm{T}}$. 式中：$y_{ij}$、$z_{ij}$、$\theta_{ij}$($i = \mathrm{p}, \mathrm{g}; j = 1, 2$) 分别为主、从动人字齿轮中心点 O_{p1}、O_{p2} 和 O_{g1}、O_{g2} 在 y 向、z 向的平移振动位移和转角位移. 根据牛顿力学定律，由图 1 可得如下系统的动力学方程：

$$\begin{cases} m_{\mathrm{p}}\ddot{y}_{p1} + c_{p1y}\dot{y}_{p1} + k_{p1y}y_{p1} = -F_{y1}, \\ m_{\mathrm{p}}\ddot{z}_{p1} + c_{p12z}(\dot{z}_{p1} - \dot{z}_{p2}) + k_{p12z}(z_{p1} - z_{p2}) = -F_{z1}, \\ I_{\mathrm{p}}\ddot{\theta}_{p1} = -F_{y1} \cdot R_{\mathrm{p}} + T_{p1}; \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} m_{\mathrm{g}}\ddot{y}_{g1} + c_{g1y}\dot{y}_{g1} + k_{g1y}y_{g1} = F_{y1}, \\ m_{\mathrm{g}}\ddot{z}_{g1} + c_{g1z}\dot{z}_{g1} + k_{g1z}z_{g1} + c_{g12z}(\dot{z}_{g1} - \dot{z}_{g2}) + \\ \qquad k_{g12z}(z_{g1} - z_{g2}) = F_{z1}, \\ I_{\mathrm{g}}\ddot{\theta}_{g1} = F_{y1} \cdot R_{\mathrm{g}} - T_{g1}; \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} m_{\mathrm{p}}\ddot{y}_{p2} + c_{p2y}\dot{y}_{p2} + k_{p2y}y_{p2} = -F_{y2}, \\ m_{\mathrm{p}}\ddot{z}_{p2} - c_{p12z}(\dot{z}_{p1} - \dot{z}_{p2}) - k_{p12z}(z_{p1} - z_{p2}) = -F_{z2}, \\ I_{\mathrm{p}}\ddot{\theta}_{p2} = -F_{y2} \cdot R_{\mathrm{p}} + T_{p2}; \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} m_{\mathrm{g}}\ddot{y}_{g2} + c_{g2y}\dot{y}_{g2} + k_{g2y}y_{g2} = F_{y2}, \\ m_{\mathrm{g}}\ddot{z}_{g2} + c_{g2z}\dot{z}_{g2} + k_{g2z}z_{g2} - c_{g12z}(\dot{z}_{g1} - \dot{z}_{g2}) - \\ \qquad k_{g12z}(z_{g1} - z_{g2}) = F_{z2}, \\ I_{\mathrm{g}}\ddot{\theta}_{g2} = F_{y2} \cdot R_{\mathrm{g}} - T_{g2}. \end{cases} \tag{4}$$

式中：m_{p}、m_{g}、I_{p}、I_{g} 分别为小轮和大轮的质量及转动惯量；R_{p}、R_{g} 为小轮和大轮的分度圆半径；c_{p1y}、c_{g1y}、c_{p2y}、c_{g2y}、k_{p1y}、k_{g1y}、k_{p2y}、k_{g2y} 为传动轴、轴承在中心点 O_{p1}、O_{g1}、O_{p2}、O_{g2} 的等效支撑阻尼和刚度；c_{p12z}、c_{g1z}、c_{g2z}、c_{g12z}、k_{p12z}、k_{g1z}、k_{g2z}、k_{g12z} 分别为齿轮、轴的轴向等效平移振动阻尼和刚度；F_{y1}、F_{y2}、F_{z1}、F_{z2} 分别为轮齿啮合切向及轴向动态啮合力，其中包含了啮合冲击力激励.

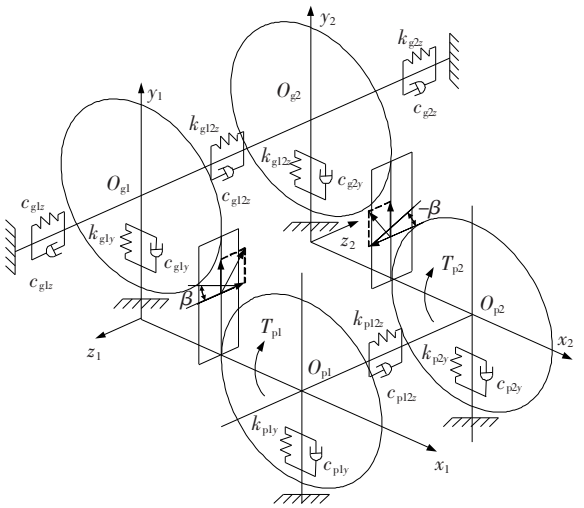


图 1　啮合型弯－扭－轴耦合人字齿轮振动模型

式(1)～(4)中的切向及轴向动态啮合力的参数可表达为式(5)～(8)：

$$F_{y1} = \cos\beta c_{\mathrm{m}}(\dot{y}_{p1} + R_{\mathrm{p}}\dot{\theta}_{p1} - \dot{y}_{g1} - R_{\mathrm{g}}\dot{\theta}_{g1}) + \cos\beta k_{\mathrm{m}}(t) f(y_{p1} + R_{\mathrm{p}}\theta_{p1} - y_{g1} - R_{\mathrm{g}}\theta_{g1}) - F_{\mathrm{s}}(t), \tag{5}$$

$$F_{z1} = \sin\beta c_{\mathrm{m}}[\tan\beta(\dot{y}_{p1} + R_{\mathrm{p}}\dot{\theta}_{p1} - \dot{y}_{g1} - R_{\mathrm{g}}\dot{\theta}_{g1}) + \dot{z}_{p1} - \dot{z}_{g1}] + \sin\beta k_{\mathrm{m}}(t) f[\tan\beta(y_{p1} + R_{\mathrm{p}}\theta_{p1} - y_{g1} - R_{\mathrm{g}}\theta_{g1}) + z_{p1} - z_{g1}] - \tan\beta F_{\mathrm{s}}(t), \tag{6}$$

$$F_{y2} = \cos\beta c_{\mathrm{m}}(\dot{y}_{p2} + R_{\mathrm{p}}\dot{\theta}_{p2} - \dot{y}_{g2} - R_{\mathrm{g}}\dot{\theta}_{g2}) + \cos\beta k_{\mathrm{m}}(t) f(y_{p2} + R_{\mathrm{p}}\theta_{p2} - y_{g2} - R_{\mathrm{g}}\theta_{g2}) - F_{\mathrm{s}}(t), \tag{7}$$

$$F_{z2} = \sin\beta c_{\mathrm{m}}[\tan\beta(\dot{y}_{p2} + R_{\mathrm{p}}\dot{\theta}_{p2} - \dot{y}_{g2} - R_{\mathrm{g}}\dot{\theta}_{g2}) + \dot{z}_{p2} - \dot{z}_{g2}] + \sin\beta k_{\mathrm{m}}(t) f[\tan\beta(y_{p2} + R_{\mathrm{p}}\theta_{p2} - y_{g2} - R_{\mathrm{g}}\theta_{g2}) + z_{p2} - z_{g2}] + \tan\beta F_{\mathrm{s}}(t). \tag{8}$$

式中：β 为螺旋角；$k_{\mathrm{m}}(t)$ 为法向啮合刚度，本文通过齿轮承载接触分析程序计算得到一个啮合周期内不同啮合位置的接触力和法向接触变形，从而得出轮齿时变啮合刚度，具体计算原理与数据分析已另文撰写，在此不再赘述；$F_{\mathrm{s}}(t)$ 为啮入冲击力；c_{m} 为法向啮合等效阻尼；$f(x)$ 为分段非线性函数，其表达形式参见文献[6].

考虑人字齿轮左端啮合副的动载荷：

$$F_{\mathrm{d}} = k_{\mathrm{m}}(t) \cdot (y_{p1} - y_{g1} + R_p\theta_{p1} - R_g\theta_{g1}) + F_{\mathrm{s}}(t). \tag{9}$$

利用表 1 中给出的某船用单级人字齿轮副参数，作为本文中的分析实例.

表1　某船用单级人字齿轮副参数

参 数	法向模数/mm	端面压力角/(°)	β/(°)	齿侧间隙/μm	负载扭矩/(N·m)	阻尼率系数	密度/(g·cm^{-3})	轮齿齿数	轮齿旋向	齿宽/mm	转动惯量/(kg·m^2)	正常工况转速/(r·min^{-1})
小齿轮(主动轮)	8	20	16.26	2	1 088	0.1	7.85	16	左右旋	35	0.049	1 000
大齿轮(被动轮)	8	20	16.26	2	1 088	0.1	7.85	32	右左旋	35	2.600	500

利用变步长四阶 Runge－Kutta 数值积分方法[7]对动力学方程组(1)~(8)进行求解,将位移响应结果代入式(9),得动载荷随时间的响应如图2,其中横坐标时间的零点为所考察齿对的啮入起始点.

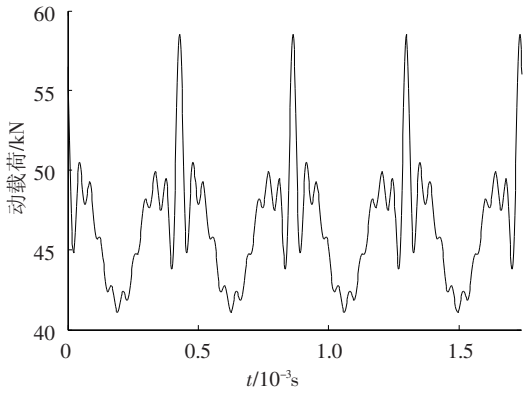


图2　人字齿轮左端啮合轮齿动载荷

2　齿根动应力计算方法

人字齿轮啮合轮齿的齿根动应力的计算方法通常有材料力学近似法[8]和动力学有限元商业软件建模求解法[9]. 前者计算公式简单,一般用于齿面齿根的强度校核;后者通用性较强,但对复杂人字齿轮系统则基本无法较好地反应其动力性特性.

本文通过轮齿承载接触分析 LTCA[10]程序得出单位载荷在齿根动应力考查点所产生的应力值 σ_{ei}(这里选定被动轮受拉侧齿根中点作为考查点),再由式(10)即可得出动载荷下的人字齿轮齿根动应力:

$$\sigma_{vi} = F_{vi} \cdot \sigma_{ei} \cdots (i = 1, \cdots, n). \qquad (10)$$

式中:σ_{vi} 为第 i 条啮合接触线接触时齿根中点动应力;F_{vi} 为第 i 条啮合接触线接触时啮合单对轮齿分配到的动载荷;n 为啮合齿对从啮入到啮出在齿面上取的接触线数目.

F_{vi} 的计算直接影响到齿根动应力的准确性和求解效率. 笔者提出3种思路:一是直接用静载荷下的轮齿间的载荷分配率来代替动载荷下的载荷分配系数,从而忽略了动载荷对载荷分配率的影响,提高了计算效率却影响了齿根动应力计算的精确度;二是将每一条轮齿啮合接触线的瞬时动载荷代入 LTCA 程序进行一次计算,得到瞬时载荷分配系数,这样虽保证了瞬时载荷分配系数的准确性却降低了计算效率;三是将由式(9)计算得到的动载荷按最小值到最大值进行五等分,通过 LTCA 程序一次计算即可得出每条接触线在5种载荷下的载荷分配系数,由此可以拟合出任意一条接触线的载荷分配系数与载荷大小的关系,进而可以完整地得出啮合单齿对从啮入到啮出任一时刻所承担的动载荷大小. 这种方法兼顾了计算效率和精度,在保证计算效率的前提下较为真实地反映了人字齿轮齿根动应力的实际变化波动趋势,因此本文算例采取思路三所提出的算法.

由表1中给出的人字齿轮副参数,得到人字齿轮副左端单对啮合轮齿所承担的动载荷(如图3),其中横坐标为考查齿对从啮入到啮出过程中主动轮的转角.

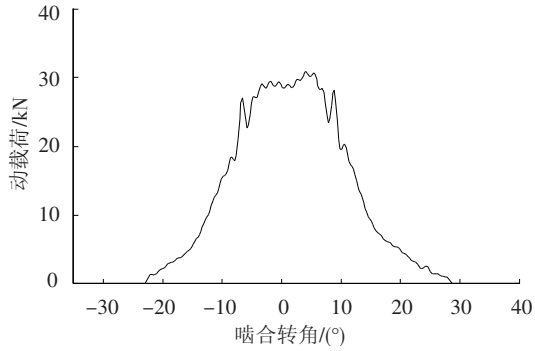


图3　人字齿轮左端单对啮合轮齿动载荷

3　试验装置与测点布置

将利用本文方法计算得到的结果与文献[4]的试验结果进行比较,并分析多工况下齿根动应力的变化趋势.

图4为齿轮振动测试试验装置简图,应变片布置在被动轮啮合轮齿受拉侧的齿根中点[11],如图5所示.

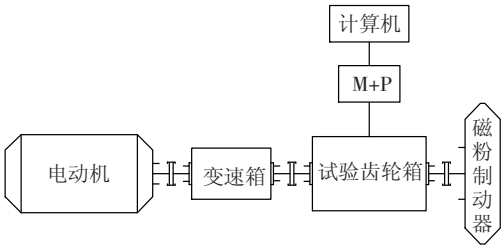


图 4　人字齿轮振动测试试验装置简图

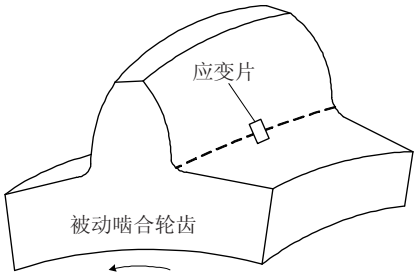


图 5　齿根应力测点布置图

4　实例验证与结果分析

4.1　外载扭矩对齿根动应力的影响

为验证数值计算的精确度，探讨外载扭矩对人字齿轮齿根动应力的影响，分别选取外载扭矩为 1 500、3 000、4 500 N · m，主动轮转速恒为 4 500 r/min的 3 种载荷工况进行研究. 3 种不同载荷工况的人字齿轮左端被动轮齿根动应力数值计算结果和试验数据见图 6 ~ 8，其中实线表示数值计算结果，虚线为试验测试所得应力值.

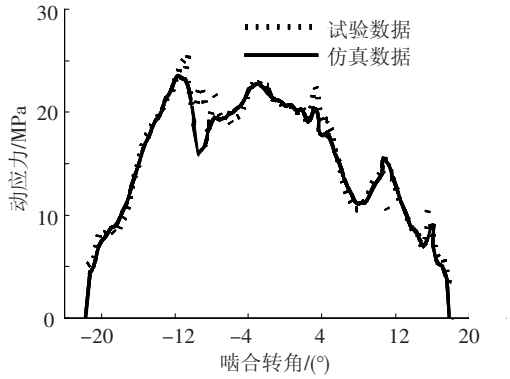


图 6　T = 240 N · m 时人字齿轮左端被动轮齿根动应力

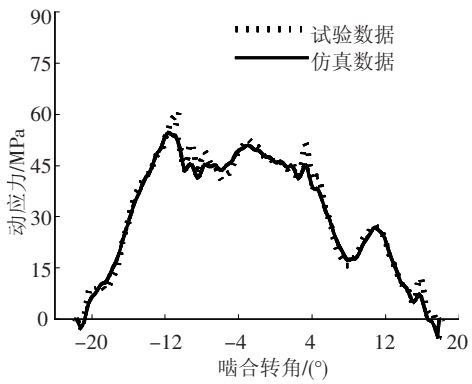


图 7　T = 640 N · m 时人字齿轮左端被动轮齿根动应力

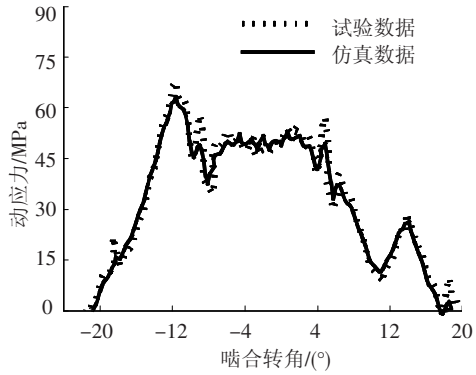


图 8　T = 840 N · m 时人字齿轮左端被动轮齿根动应力

3 种载荷工况的齿根最大动应力数值计算值分别为 23. 64、54. 86、69. 34 MPa，试验测量值分别为 25. 7、60. 0、72. 6 MPa. 可以看出，随着外载的增加，齿根动应力呈增加趋势；然而240 N · m 载荷时齿根应力幅值的相对波动却 > 640 N · m 载荷时的应力幅值波动. 这是因为动力学模型考虑了轮齿侧隙激励，当外载荷扭矩为 240 N · m 时，轮齿变形不足以消除齿侧间隙对系统的影响，故动载荷波动较强，导致了上述现象；当外载荷扭矩增加到 840 N · m 以上时，基本消除了齿侧间隙对人字齿轮系统的影响.

对比图 6 ~ 8 可见：不同载荷工况下，数值计算得到的齿根最大应力随外载扭矩的变化规律与实验结果比较吻合，误差 < 8%，误差主要来自于加工误差、热变形以及试验应变片的灵敏度等因素.

4.2　转速对齿根动应力的影响

当人字齿轮主动轮输入转速分别为 1 500、2 000、2 500 r/min，负载扭矩恒为1 088 N · m时，3 种不同转速工况的人字齿轮左端被动轮齿根动应力数值计算结果和试验数据见图 9 ~ 11.

3 种转速工况的齿根最大动应力数值计算值分别为 90. 20、94. 60、98. 68 MPa，试验测量值分别为 93. 7、103. 5、107. 1 MPa，可以看出，在文中给出的转速范围内，人字齿轮传动系统其齿根动应力随着转速的增加而增大，应力的波动也增加许多.

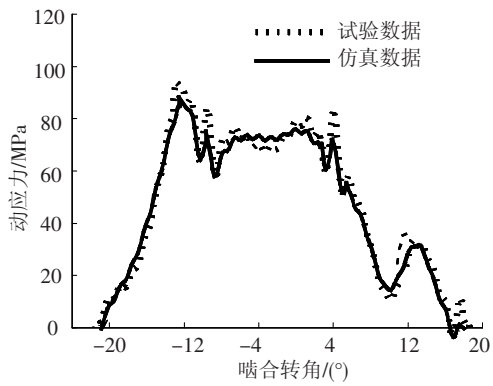


图 9　n = 1 500 r/min 时人字齿轮左端被动轮齿根动应力

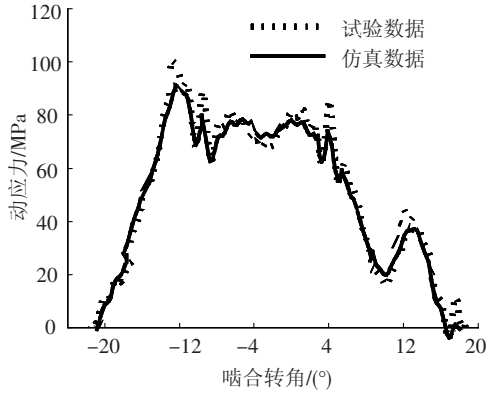


图 10 n =2 000 r/min 时人字齿轮左端被动轮齿根动应力

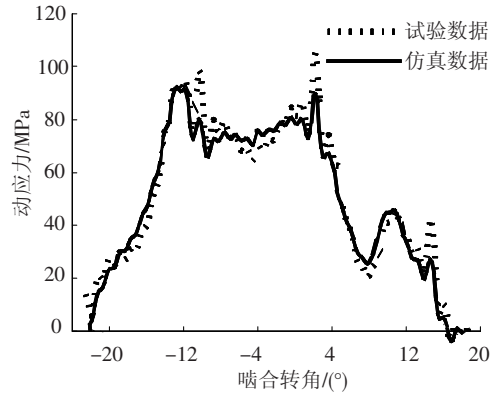


图 11 n =2 500 r/min 时人字齿轮左端被动轮齿根动应力

对比图 9 ~ 11 可见,不同转速工况下,数值计算得到的齿根最大应力随主动轮输入转速的变化规律与实验结果吻合,较精确地计算出了人字齿轮齿根动应力.

需要说明的是,由图 6 ~ 11 可以看出,当系统中有新齿对啮入,即啮合转角分别为 - 11.5°和 11°时,仿真数值和试验数值偏差较大. 这是因为实际试验中,齿对的加工误差、热变形等因素加剧了啮入冲击对系统的影响,从而使得实测数据与仿真数据存在较大偏差.

5 结 论

1)建立了综合考虑误差激励、时变啮合刚度激励、啮入冲击激励、齿侧间隙激励的人字齿轮啮合型弯 - 扭 - 轴耦合振动模型,完整计算出人字齿轮系统的动载荷.

2)提出了考虑实时动载荷对齿间载荷分配系数影响的齿根动应力计算方法,保证计算效率的同时更准确地反映出齿根动应力的波动变化趋势.

3)随着外载荷和输入转速的增加,人字齿轮传动系统齿根动应力最大值均呈增加趋势. 但由于齿侧间隙的存在,随着外载荷增加,齿根动应力的相对波动趋势经历了先减小后增大的过程.

参考文献

[1] AMENDOLA J B. Single vs double helical gears[J]. American Turbomachinery International, 2006, 47(5): 34 - 38.

[2] 谢最伟,吴新跃,陈艳锋. 人字齿轮齿面应力的接触元分析[J]. 机械设计, 2004,24(10): 25 - 27.

[3] ARIKAN S M A, KAFTANOGLU B. Dynamic load and root stress analysis of spur gears[J]. CIRP Annals Manufacturing Technology, 1989, 38(1): 171 - 174.

[4] 刘 更, 蔺天存, 沈允文. 斜齿轮齿根动应力数值计算与实验研究[J]. 航空动力学报, 1994,9(1): 59 - 62.

[5] 吴新跃,朱石坚. 人字齿轮传动的振动理论分析模型[J]. 海军工程大学学报, 2001,13(5): 13 - 19.

[6] FAGGIONI M, SAMANI F, BERTACCHI G, *et al*. Dynamic optimization of spur gears[J]. Mechanism and Machine Theory, 2011, 46: 544 - 557.

[7] JULYAN H E, PIRO O. The dynamics of Runge—Kutta methods[J]. International Journal Bifurcation and Chaos, 1992 (2): 427 - 449.

[8] KAHRAMAN A, SINGH R. Interactions between time-varying mesh stiffness and clearance non-linearities in a geared system[J]. Journal of Sound and Vibration, 1991, 146(1): 135 - 156.

[9] VIJAYARANGAN S, GANESAN N. A study of dynamic stresses in a spur gear under a moving line load and impact load conditions by a three-dimensional finite element method[J]. Journal of Sound Vibration, 1993, 162(1): 185 - 189.

[10] LITVIN F L, CHEN J S, LU J. Application of finite element analysis for determination of load share, real contact ratio, precision of motion, and stress analysis[J]. Journal of Mechanical Design, 1996, 168(4): 561 - 567.

[11] 李润方,王建军. 齿轮系统动力学: 振动、冲击、噪声[M]. 北京:科学出版社, 1997:362 - 450.

(**编辑** 杨 波)