考虑飞轮动力学的过驱动卫星控制分配算法

赵亚飞[1],张世杰[1],过佳雯[1],孙 俊[1,2],曹喜滨[1]

(1. 哈尔滨工业大学 卫星技术研究所,150080 哈尔滨; 2. 上海市空间智能控制技术重点实验室,200233 上海)

摘 要: 针对具有冗余飞轮的过驱动卫星的最优控制分配问题,以反作用飞轮总能耗和力矩分配偏差最小等为目标,通过定义与能耗相关的优化目标函数,提出了能耗/力矩优化的动态控制分配方法,并考虑飞轮的非线性动力学特性,对控制分配进行修正. 最后对本文提出的控制分配算法进行了数学仿真验证,结果表明了上述方法的可行性和有效性.

关键词: 过驱动卫星;控制分配;反作用飞轮;动力学

中图分类号: V448.2 **文献标志码**: A **文章编号**: 0367-6234(2013)07-0001-06

Dynamic control allocation for overactuated satellite with flywheel dynamics

ZHAO Yafei[1], ZHANG Shijie[1], GUO Jiawen, SUN Jun[1,2], CAO Xibin[1]

(1. Research Center of Satellite Technology, Harbin Institute of Technology, 150080 Harbin, China;
2. Shanghai Key Laboratory of Space Intelligent Control Technology, 200233 Shanghai, China)

Abstract: Considering overactuated satellite optimal control allocation problem with redundant reaction wheels, in order to achieve minimum total energy consumption and torque allocation deviation as a goal, an energy/torque dynamic control allocation algorithm is proposed by defining relevant optimized objective function. Also, the proposed method takes nonlinear dynamics into account and modifies the initial control allocation result. Finally, mathematical simulations are used to verify the performance of the algorithm, the result shows its feasibility and effectiveness.

Key words: overactuated satellite; control allocation; reaction flywheels; dynamics

冗余飞轮系统已成为高精度小卫星常采用的执行机构配置方案[1],在此情况下由控制律给出的期望控制力矩的分配方案并不唯一,近年来,随着对卫星姿态控制精度和效率等要求的不断提高,如何将期望控制力矩实时、有效地分配到各飞轮成为高性能卫星控制算法设计时亟需解决的问题[2-4]. 动态控制分配(Control Allocation)是在各类型约束条件和目标下,实时地将期望控制量在冗余配置的飞轮间进行分配,使飞轮系统实际输出尽可能与期望控制力矩相一致的控制设计方法[5]. 在执行机构冗余情况下,动态控制分配方法可实现某优化准则或约束下的优化分配,从而提高系统对执行机构故障的容错能力. 为实现反作用飞轮动态分配问题提供了一条可行、有效的解决途径.

现代小卫星受其体积和重量限制,其星上电源功率受限,反作用飞轮功耗在整星功耗占据较大比例,因此降低其能耗问题是微小卫星控制中需要考虑的问题之一. Skaar 等[6]针对自旋航天器使用一个飞轮进行姿态控制的任务中单个飞轮在整个控制任务中总能耗最优问题进行研究. 郭延宁等[7]针对冗余飞轮构型的控制力矩分配问题,给出了能量最优力矩分配方法,并考虑飞轮力矩约束对其进行了限幅处理. 赵阳等[8]考虑幅值和速度约束条件,给出了处理过驱动卫星的控制分配方案,实现了二次最优. 张世杰等[9]将基于零空间的伪逆控制分配方法应用于轮控过驱动卫星动态分配问题,并利用控制分配环节所提供的设

收稿日期: 2012-04-17.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60704020).
作者简介: 赵亚飞(1987—),男,博士研究生;
张世杰(1979—),男,教授,博士生导师.
通信作者: 张世杰, sjzhang@hit.edu.cn.

计自由度,分别设计了力矩优化动态控制分配算法,通过增加平稳性等约束,有效抑制了敏感器噪声和敏感器野值等对控制性能的影响. 当前,已有部分文献对力矩分配误差最小、能耗优化等控制分配方法进行了研究,但在实际的控制分配过程中,需要考虑很多因素,包括飞轮输出力矩或整星功耗限制等,这样对飞轮的能耗需求提出进一步的要求. 因此,需要综合多种性能指标,并进一步修正相应的控制分配算法.

若不考虑执行机构动力学模型,控制分配问题可简单描述为 $\boldsymbol{v} = G(\boldsymbol{u})$,其中 $\boldsymbol{v}$ 为期望控制力矩,$\boldsymbol{u}$ 为飞轮的控制指令,$G(\cdot)$ 为二者之间的映射关系,进而建模为静态优化问题加以求解. 若进一步假设反作用飞轮控制指令与其力矩为线性关系,则可得到线性控制分配模型 $\boldsymbol{Au} = \boldsymbol{v}$,$\boldsymbol{A}$ 为一个常值矩阵,表征控制效率,称控制效率矩阵. 在此基础上可采用广义逆、链式分配、直接分配、数学规划法等控制分配算法,但对于非线性情况存在较大误差,因此有必要讨论在考虑反作用飞轮非线性动力学因素下的控制分配问题.

综上,本文针对冗余配置的飞轮执行机构系统,将能耗和力矩分配误差作为控制分配的优化目标,研究面向能耗/力矩优化的动态控制分配方法. 期望通过本论文的研究工作,确保卫星控制性能和能源消耗等指标最优,提高卫星智能自主运行能力.

1 控制分配问题

卫星姿态控制系统中,飞轮的作用过程为:由控制律计算得到期望的控制力矩 $\boldsymbol{v}$,通过设定的分配逻辑将控制量分配到各飞轮,得到每个飞轮的期望指令 $\boldsymbol{u}$. 飞轮按指令进行动作,产生作用于星体的力矩 $\tilde{\boldsymbol{u}}$.

为后续分析方便,定义飞轮系统的执行机构效率矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{Au}.$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 为 $3 \times n$ 的矩阵(n 为飞轮个数).

若控制过程是理想的,则 $\boldsymbol{u} = \tilde{\boldsymbol{u}}$,还应该满足 $\tilde{\boldsymbol{v}}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 相一致,即要求

$$\tilde{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{Au} = \boldsymbol{ADv}.$$

其中 $\boldsymbol{D}$ 为与分配矩阵相关的矩阵,$\tilde{\boldsymbol{v}}$ 为飞轮系统产生的实际作用于卫星本体的力矩.

所以有

$$\boldsymbol{AD} = \boldsymbol{E}. \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{E}$ 为单位阵.

对于卫星而言,一般由控制律计算得到的期望控制力矩 $\boldsymbol{v}$ 为 3×1 阶向量,效率矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 $3 \times n$ 阶向量,其中 n 为飞轮数,飞轮力矩向量 $\boldsymbol{u}$ 为 $n \times 1$ 阶向量. 由线性代数知识可知,对于式(1),当 $n > 3$ 时,方程不存在唯一解,即具有一定冗余,是一类典型的过驱动系统控制分配问题.

上述控制分配问题,有伪拟解

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}})^{-1}v. \tag{2}$$

记 $\boldsymbol{A}^{\dagger} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}})^{-1}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伪逆,进一步记这个最小力矩为

$$\boldsymbol{u}_s = \boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{v}. \tag{3}$$

式(3)即为过驱动卫星控制分配问题的伪逆解.

2 能耗/力矩优化的动态控制分配算法

考虑能耗/力矩优化的动态控制分配算法是以传统的控制分配方法为基础,降低能耗和力矩分配误差等优化目标. 针对具有多个目标的控制分配问题,一种有效的解决办法是以控制力矩为指标,利用该设计自由度,将不同的控制目标转化为额外的目标或约束,通过施加约束条件使解唯一,从而完成控制分配过程. 本文所研究的面向能耗/力矩优化的动态控制分配问题是在完成期望控制力矩分配任务的前提下,考虑力矩分配误差和飞轮系统的总功耗最优问题,设计动态控制分配算法.

2.1 飞轮系统能耗模型

为进行传统控制分配问题伪逆解的修正,首先定义飞轮系统的功耗.

单个飞轮的总能量为

$$T_i = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_i^{\mathrm{T}} I_{s_i}\boldsymbol{\omega}_i. \tag{4}$$

其中 $\omega_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 为飞轮的转速,$I_{s_i}(i = 1,2,\cdots,n)$ 为飞轮的转动惯量系数.

单个飞轮的功率为

$$P_i = \frac{\mathrm{d}T_i}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega}_i^{\mathrm{T}} I_{s_i}\dot{\boldsymbol{\omega}}_i. \tag{5}$$

飞轮产生的力矩和其角动量之间满足如下关系

$$\boldsymbol{u} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{h}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{I}_s\dot{\boldsymbol{\omega}}. \tag{6}$$

其中 $\boldsymbol{I}_s = \mathrm{diag}(I_{s_1}, I_{s_2}, \cdots, I_{s_n})$ 为飞轮的转动惯量矩阵,$\boldsymbol{\omega} = [\omega_1 \quad \omega_2 \quad \cdots \quad \omega_n]^{\mathrm{T}}$ 为飞轮的转动角速度.

通过式(4)~(6)可得出飞轮总的瞬时功耗为

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}.$$

定义卫星冗余配置的反作用飞轮系统能耗向量为 $\boldsymbol{P} = [P_1 \quad P_2 \quad \cdots \quad P_n]^{\mathrm{T}}$,则有

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Omega u}_s. \tag{7}$$

其中 $\boldsymbol{\Omega}$ 为飞轮角速度矩阵，且

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} \omega_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \omega_n \end{bmatrix}.$$

2.2　考虑能耗/力矩优化的控制分配算法

与传统单目标优化控制分配问题相比，力矩/能耗最优的动态控制分配是一个多目标优化问题，其数学模型为

$$\min_u F(u) = \min_u [\ \|\boldsymbol{u}\|\ ,\ \|\boldsymbol{P}\|\ ],$$
$$\text{s.t. } \boldsymbol{Au} = \boldsymbol{v}.$$

求解多目标优化问题的最主要思路之一，是将多目标问题设法转化为单目标优化问题，然后采用已知的单目标规划求解方法求出其解，从而就可以得到原问题的解. 转化的途径可以有多种多样，包括约束法，评奖函数法，分层序列法等.

本文采用平方加权法求解多目标优化问题，定义如下的数学模型：

$$\min J = \lambda_1(\ \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_s^*\ \|)^2 + \lambda_2(\ \|\boldsymbol{P}\|\ )^2, \quad (8)$$
$$\text{s.t. } \boldsymbol{Au} = \boldsymbol{v}.$$

其中 $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$，$\lambda_1$ 和 λ_2 的大小实际上反应了力矩和能耗问题的权重. 可见，λ_1 和 λ_2 把两个不同量纲的性能参数转化为一个标量的性能指标，并且根据实际应用需求，可以分别配置不同的值，从而使性能达到最优.

为考虑能耗/优化问题，需要对式(2)给出的伪逆解进行修正. Kenneth 等[10]提出利用执行机构效率矩阵零空间特性的控制分配修正方法，能将超出执行机构能力范围的解重新落入可行域内，保证控制矢量方向不变，且具有计算量小、计算效率高等优点. 因此，本文采用上述零空间修正思想，采用零空间方法对伪逆法初始解进行修正，以考虑能耗优化问题.

对于 $m \times n(n > m)$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，如果存在非零 $n \times (n - m)$ 阶矩阵 $\boldsymbol{N}$，使得

$$\boldsymbol{AN} = 0.$$

那么称矩阵 $\boldsymbol{N}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的零空间矩阵.

由控制分配伪逆法可知，$\boldsymbol{u}_s^*$ 是满足 $\boldsymbol{Au} = \boldsymbol{v}$ 的一个解，则飞轮输出力矩可表示为

$$\boldsymbol{u}_s = \boldsymbol{u}_s^* + \boldsymbol{Nk}.$$

其中 $\boldsymbol{k}$ 为 $(n - m) \times 1$ 阶矩阵，相当于一个调节因子，称调节矩阵.

由于有

$$\boldsymbol{Au}_s = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}_s^* + \boldsymbol{Nk}) = \boldsymbol{Au}_s^* + \boldsymbol{ANk} = \boldsymbol{Au}_s^* + 0 = \boldsymbol{v}.$$

成立. 因此 $\boldsymbol{u}_s$ 必是原控制分配问题的一个解.

由式(7)可知

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{\Omega} \cdot (\boldsymbol{u}_s^* + \boldsymbol{N}t). \quad (9)$$

在此基础上，定义代价函数

$$J = (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_s^*)^{\mathrm{T}}\lambda_1(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_s^*) + \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\lambda_2\boldsymbol{P}.$$

将式(9)代入，有

$$J = \lambda_1(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_s^*)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_s^*) + \lambda_2(\boldsymbol{u}_s^* + \boldsymbol{N}t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}^2(\boldsymbol{u}_s^* + \boldsymbol{N}t). \quad (10)$$

根据能耗最优的动态控制分配方法可知

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_s^* + \boldsymbol{N}t. \quad (11)$$

将式(11)代入式(10)得

$$J = \lambda_1\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Nt} + \lambda_2(\boldsymbol{u}_s^* + \boldsymbol{Nt})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}^2(\boldsymbol{u}_s^* + \boldsymbol{N}t).$$

对 $\boldsymbol{t}$ 求导，有

$$\frac{\partial J}{\partial t} = 2\lambda_1\boldsymbol{NNt} + 2\lambda_2[\boldsymbol{\Omega} \cdot (\boldsymbol{u}_s^* + \boldsymbol{Nt})]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega N}.$$

令 $\dfrac{\partial J}{\partial t} = 0$，即

$$\frac{\partial J}{\partial t} = 2\lambda_1\boldsymbol{NNt} + 2\lambda_2[\boldsymbol{\Omega} \cdot (\boldsymbol{u}_s^* + \boldsymbol{Nt})]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega N} = 0.$$

计算得

$$2\lambda_2\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}^2\boldsymbol{u}_s^* = -2(\lambda_1\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N} + \lambda_2\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}^2\boldsymbol{N})\boldsymbol{t}.$$

由此可得

$$\hat{\boldsymbol{t}} = -(\lambda_1\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N} + \lambda_2\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}^2\boldsymbol{N})^{-1}\lambda_2\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}^2\boldsymbol{u}_s^*. \quad (12)$$

将式(12)代入式(11)便可得最终的控制分配结果.

为验证上述结果的正确性，对两种特殊情况进行分析. 首先，取 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$，由多目标优化数学模型式(8)可知，这实际上是一种力矩优化相关的控制分配问题，而将 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$ 代入式(12)，可得 $\hat{\boldsymbol{t}} = 0$，因而其分配结果 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_s^*$，说明在此特殊情况下是一种力矩最优的动态控制分配算法.

另取 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$ 可知是能耗最优的动态控制分配问题，而将 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$ 代入式(12)，可得 $\hat{\boldsymbol{t}} = -(\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}^2\boldsymbol{N})^{-1}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}^2\boldsymbol{u}_s^*$，这与传统能耗优化的动态控制分配算法相一致.

在实际应用中，综合权重使得各性能得以充分发挥，使得卫星性能在给定的条件下达到最优的状态.

若把这样一个多目标优化问题分开，则分别有解

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_s^* = \boldsymbol{A}^{\dagger}v,$$
$$\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_s^* + \boldsymbol{N} \cdot [-(\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}^2\boldsymbol{N})^{-1}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}^2\boldsymbol{u}_s^*] = [\boldsymbol{I} - \boldsymbol{N}(\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}^2\boldsymbol{N})^{-1}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}^2]\boldsymbol{u}_s^*.$$

其中 $\boldsymbol{u}_s^*$ 为最小力矩分配的最优解. 可见，只有在满足

$$\boldsymbol{I} - \boldsymbol{N}(\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}^2\boldsymbol{N})^{-1}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}^2 \equiv 0$$

的情况下,才存在绝对最优解;而若 t 时刻,$\boldsymbol{I} - \boldsymbol{N}(\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}^2\boldsymbol{N})^{-1}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}^2 \neq 0$,则只能寻找次优解或者称满意解.

2.3 考虑飞轮动力学的修正控制分配算法

在上述推导的控制分配算法中,使用了电流与输出力矩为线性关系的假设,因此对于控制力矩 $\boldsymbol{v}$ 和分配到飞轮中的控制电压 $\boldsymbol{u}$ 之间可简单地表示为 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}$ 的线性关系. 并在此假设基础上针对给定的性能指标,将期望控制量在冗余配置的飞轮之间进行分配. 实际上,反作用飞轮动力学具有明显的非线性特性,上述假设并不成立,会对控制分配效果产生影响,进而影响控制系统的性能. 因此本节提出一种非线性控制分配方法.

飞轮动力学模型可表示为

$$\begin{cases} \boldsymbol{T}_1\dot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_{\mathrm{cc}}, \\ \boldsymbol{T}_2\dot{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{cc}} + \boldsymbol{u}_{\mathrm{cc}} = \boldsymbol{u}_{\mathrm{c}}. \end{cases} \tag{13}$$

其中,$\boldsymbol{T}_1$ 和 $\boldsymbol{T}_2$ 是表征飞轮动力学特性的对角阵.

式(13)给出的飞轮动力学模型,可表示为

$$\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{T}_2\ddot{\boldsymbol{u}} + (\boldsymbol{T}_1 + \boldsymbol{T}_2)\dot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_c.$$

进一步考虑飞轮动力学的滞后特性,控制分配模型可修正为

$$\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{T}_2\ddot{\boldsymbol{u}}(t + t_{\mathrm{d}}) + (\boldsymbol{T}_1 + \boldsymbol{T}_2)\dot{\boldsymbol{u}}(t + t_{\mathrm{d}}) + \boldsymbol{u}(t + t_{\mathrm{d}}) = \boldsymbol{u}_{\mathrm{c}}, \tag{14}$$

$$\min \| \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{\mathrm{des}} \|, \tag{15}$$

$$\text{s.t. } \boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}.$$

其中 $\boldsymbol{u}_{\mathrm{des}}$ 是在线性控制分配方法中得到的理想控制力矩,且满足如下约束:

$$\boldsymbol{u}_{\min} \leqslant \boldsymbol{u} \leqslant \boldsymbol{u}_{\max}. \tag{16}$$

为寻找与理想力矩 $\boldsymbol{u}_{\mathrm{des}}$ 最近的解,在预定偏差内寻找一个最佳的结果,Poonamallee 等[11]提出利用基本函数的线性组合来逼近执行机构的非线性特性,然后再利用非线性优化模型来进行指令的分配. 本文应用该方法,提出基于曲线拟合法的飞轮动力学特性建模,然后通过非线性规划方法将指令力矩分配到各飞轮.

首先,提出下列函数实现对理想力矩的拟合:

$$\begin{cases} u_{\mathrm{des}1} = \sum_{i=1}^{3} a_{1i}v_i + \sum_{i=1}^{3} b_{1i}v_i^2 + \sum_{i=1}^{3} c_{1i}v_i^3 + d_1, \\ u_{\mathrm{des}2} = \sum_{i=1}^{3} a_{2i}v_i + \sum_{i=1}^{3} b_{2i}v_i^2 + \sum_{i=1}^{3} c_{2i}v_i^3 + d_2, \\ u_{\mathrm{des}3} = \sum_{i=1}^{3} a_{3i}v_i + \sum_{i=1}^{3} b_{3i}v_i^2 + \sum_{i=1}^{3} c_{3i}v_i^3 + d_3, \\ u_{\mathrm{des}4} = \sum_{i=1}^{3} a_{4i}v_i + \sum_{i=1}^{3} b_{4i}v_i^2 + \sum_{i=1}^{3} c_{4i}v_i^4 + d_4. \end{cases} \tag{17}$$

满足

$$\boldsymbol{u}_{\mathrm{des}} = [u_{\mathrm{des}1} \quad u_{\mathrm{des}2} \quad u_{\mathrm{des}3} \quad u_{\mathrm{des}4}]^{\mathrm{T}}. \tag{18}$$

然后,通过上面提出的非线性方法,确定最终的分配力矩 $\boldsymbol{u}$.

式(14)~式(18)给出了考虑反作用飞轮非线性模型的控制分配问题模型,针对该模型进行控制分配问题求解.

该问题可用拉格朗日乘子法进行求解,令乘子 $\underline{\boldsymbol{\lambda}} = [\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \cdots \quad \lambda_n]^{\mathrm{T}}$,则有新的泛函:

$$J(\boldsymbol{u}, \underline{\boldsymbol{\lambda}}) = (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{\mathrm{des}})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{\mathrm{des}}) + \underline{\boldsymbol{\lambda}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}).$$

根据极值的必要条件 $\partial J/\partial \boldsymbol{u} = 0$,得

$$2(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{\mathrm{des}}) + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\underline{\boldsymbol{\lambda}} = 0.$$

整理并求解得

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_{\mathrm{des}} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_{\mathrm{des}} - \boldsymbol{v}).$$

表示为伪逆矩阵形式

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_{\mathrm{des}} - \boldsymbol{A}^{\dagger}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_{\mathrm{des}} - \boldsymbol{v}).$$

上述方法的难点在于对 $\boldsymbol{u}_{\mathrm{des}}$ 如何获得,可根据式(17)利用实际飞轮的输入输出数据对反作用飞轮非线性动力学模型进行拟合.

3 仿真验证

为验证上述各节所提出的控制分配算法的有效性,进行不同模式下的数学仿真验证,仿真初始参数如下.

采用由4个反作用飞轮金字塔型布局方式,则飞轮的控制效率矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0.707\,1 & -0.707\,1 & 0.707\,1 & -0.707\,1 \\ 0.707\,1 & 0 & -0.707\,1 & 0 \\ 0 & -0.707\,1 & 0 & 0.707\,1 \end{bmatrix}.$$

卫星转动惯量为

$$\boldsymbol{J}_s = \begin{bmatrix} 6.292 & 0 & 0 \\ 0 & 5.477 & 0 \\ 0 & 0 & 2.687 \end{bmatrix} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

每个反作用飞轮绕其主轴旋转的转动惯量为 $J_{\mathrm{RW}} = 0.01\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$,飞轮能够产生的最大力矩为 0.1 N·m,构型采用3正交加1斜装形式,安装倾斜角为 $\beta = 54.74°$,初始四元数 $\boldsymbol{q}_0 = [0.5 \quad 0.5 \quad 0.5 \quad -0.5]^{\mathrm{T}}$,期望四元数为 $\boldsymbol{q}_{\mathrm{c}} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^{\mathrm{T}}$.

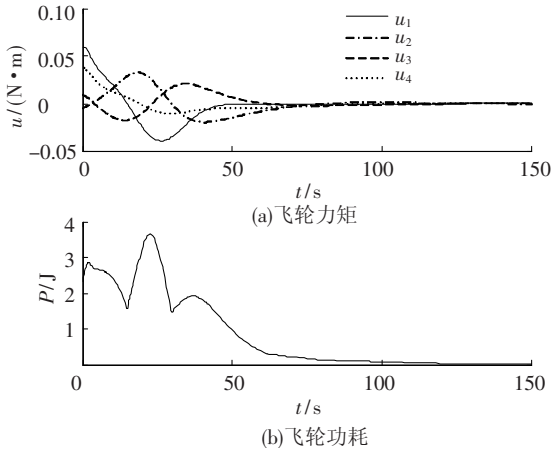
控制律采用 PD 算法,控制参数为

$$k_{\mathrm{p}} = \mathrm{diag}(0.126,\ 0.110,\ 0.054),$$

$$k_{\mathrm{d}} = \mathrm{diag}(0.889,\ 0.774,\ 0.380).$$

采用上述仿真参数,对力矩/能耗优化模式不同权系数 λ_1 和 λ_2 取值的情况进行仿真. 结果如图1~图3所示,由图可以看出,三种模式下的控制力矩动态过程有稍许差别,在 20 s 时,可以看出能耗最优分配方法消耗的能量最省. 三种方法能耗的总量对比上,力矩最优的能耗为

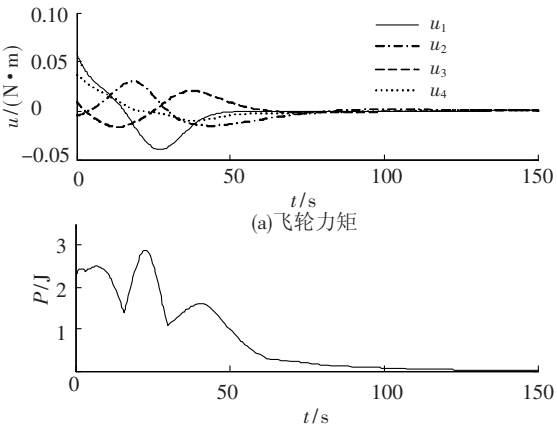
116.799 2 J，能耗最优的能耗为 107.917 9 J，权重各 0.5 的能耗为 112.556 4. 在能耗上可明显看出能耗优化模式下的能耗较低，说明该方法在降低能耗方面的有效性.



(a)飞轮力矩

(b)飞轮功耗

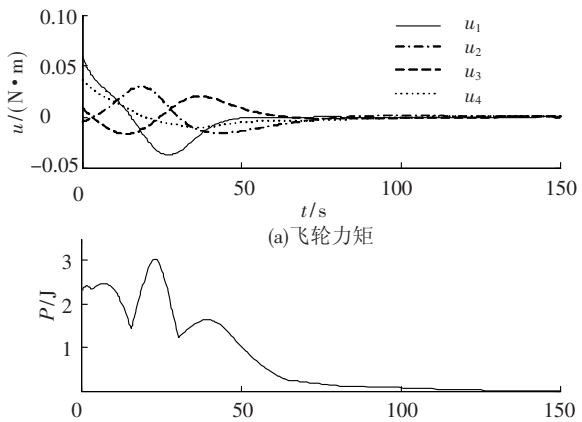
图 1　力矩优化模式下飞轮输出力矩和功耗



(a)飞轮力矩

(b)飞轮功耗

图 2　能耗优化模式下飞轮输出力矩和功耗



(a)飞轮力矩

(b)飞轮功耗

图 3　权重各为 0.5 时混合优化模式下的飞轮输出力矩和能耗

下面分析飞轮动力学对控制分配性能的影响，飞轮有相同的非线性特性参数 $\boldsymbol{T}_1 = \boldsymbol{T}_2 = \mathrm{diag}(0.5,0.5,0.5,0.5)$；滞后时间 $t_\mathrm{d} = 0.2$ s. 其他仿真参数同前述各节. 仿真结果如图 4 ~ 图 8 所示.

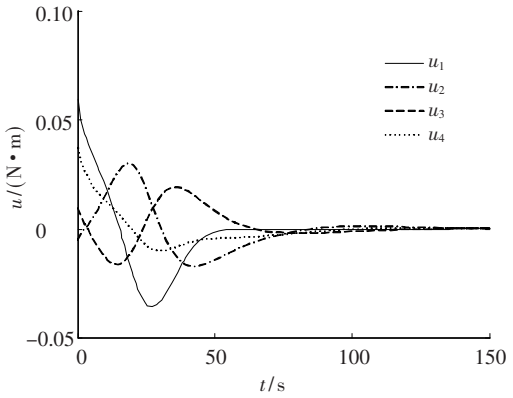


图 4　控制算法给出的期望控制力矩

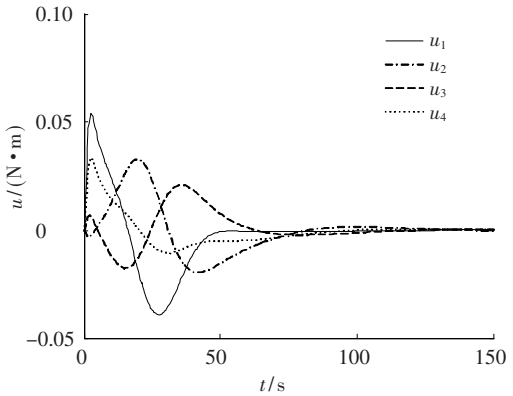


图 5　未进行飞轮动力学修正的飞轮输出力矩

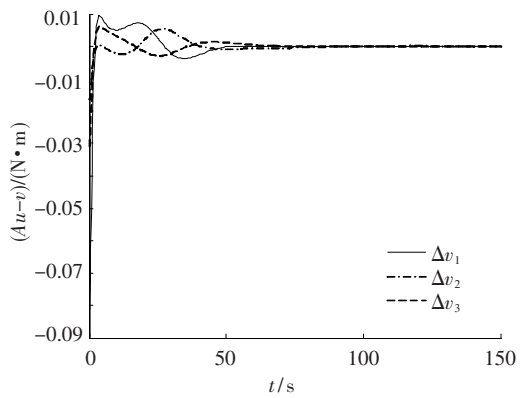


图 6　未修正飞轮动力学下控制分配的有效性

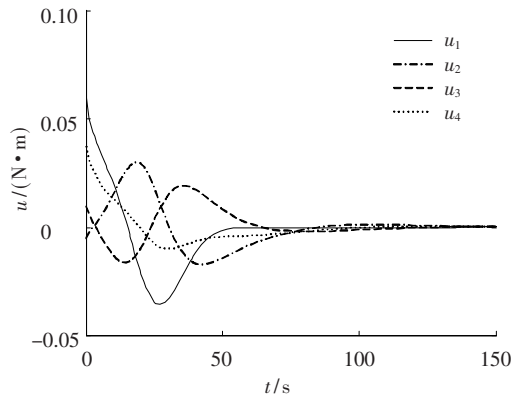


图 7　非线性修正后的飞轮输出力矩

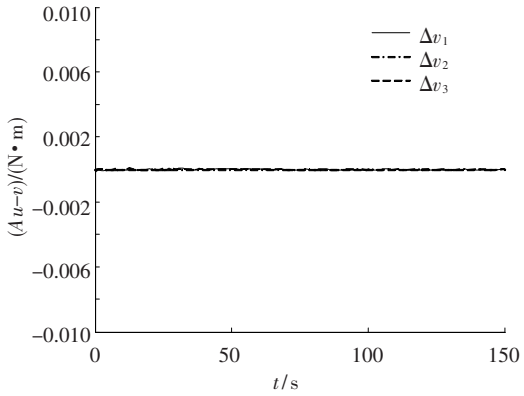


图8　修正后的控制分配有效性

图4给出了控制算法给出的期望力矩，图5为未考虑飞轮动力学非线性特性，没有对控制分配算法进行修正的飞轮输出力矩，从图中可看出由于飞轮动力学非线性特性的影响，飞轮的输出力矩有明显滞后，跟踪期望控制力矩有明显偏差，图6进一步显示了其控制分配误差较大，动力学特性对控制分配有效性造成了比较大的影响. 图7为考虑飞轮动力学非线性特性，对控制分配算法进行了修正后的飞轮输出力矩，可以看出能够较好的跟踪期望的控制指令. 图8为修正后的控制分配有效性，可以看出，由于采用修正后的控制分配算法考虑了飞轮非线性特性，控制分配误差基本维持在0，能够有效跟踪期望控制力矩，验证了所给出修正控制分配算法的有效性.

4　结　论

针对具有3个以上反作用飞轮的过驱动卫星姿态控制，对将控制算法给出的期望控制力矩实时、有效地分配到各个飞轮的控制分配算法进行了深入研究. 在满足力矩分配误差最小目标下，考虑反作用飞轮电能消耗问题，通过定义与能耗相关的优化目标函数，提出了能耗/力矩优化的动态控制分配方法. 进一步考虑了飞轮非线性动力学特性，采用数据拟合方法建立飞轮模型，并对动态控制分配方法进行了非线性修正. 最后针对所提出的控制分配方法进行了仿真验证，结果证实了该控制分配方法的可行性和有效性.

参考文献

[1] LANDIS M F, REYNOLDS R G, LIU F X, *et al*. Maximum torque and momentum envelopes for reaction-wheel arrays [J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 2010, 33(5):1606 – 1614.

[2] HANSPETER S, VAIOS J L. Redundant reaction wheel torque distribution yielding instantaneous L2 power-optimal attitude control [J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 2009, 32(4):1269 – 1276.

[3] ISMAIL Z, VARATHARAJOO R. A study of reaction wheel configurations for a 3-axis satellite attitude control [J]. Advances in Space Research, 2010, 45(6): 750 – 759.

[4] CHOI Y, BANG H, LEE H. Dynamic control allocation for shaping spacecraft attitude control command[C]// AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference. Reston VA:AIAA, 2006:39 – 53.

[5] DURHAM W C. Constrained control allocation: three moment problem [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1994, 17(2):330 – 336.

[6] SKAAR S B, KRAIGE L G. Single-axis spacecraft attitude maneuvers using an optimal reaction wheel power criterion [J]. AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1982,5(5):543 – 544.

[7] 郭延宁, 马广富, 李传江. 冗余飞轮构型下力矩分配策略设计与分析[J]. 航空学报, 2010, 31(11): 2259 – 2265.

[8] 赵 阳, 张大伟, 田 浩. 冗余飞轮姿控系统控制分配与重构研究[J]. 空间控制技术与应用, 2010, 36(1):1 – 7.

[9] 张世杰,赵亚飞,陈 闽,等. 过驱动轮控卫星的动态控制分配方法研究[J]. 航空学报, 2011, 32(7): 1260 – 1268.

[10] KENNETH A B, WAYNE C D. Null-space augments solutions to constrained control allocation problems [C]//AIAA Guidance, Navigation and Control Conference. Baltimore, MD:[s. n.], 1995:328 – 333.

[11] POONAMALLEE V L, DOMAN D B. A nonlinear programming approach for control allocation [C]// Proceeding of the 2004 American Control Conference. Boston:[s. n.], 2004: 1689 – 1694.

（**编辑**　张　宏）