压力敏感性材料球形孔洞动态扩展问题

唐立强[1],于雪梅[1,2],吴国辉[1]

(1. 哈尔滨工程大学 航天与建筑工程学院,哈尔滨 150001,tlq8854@126.com;
2. 中航工业哈尔滨飞机工业集团有限责任公司 飞机设计所,哈尔滨 150066)

摘 要: 为进一步研究岩土材料爆炸场的特点,采用椭圆型屈服准则和自相似假设,并结合Hopkins三区模型,研究幂硬化材料球形孔洞动态扩展问题.通过对弹性区的研究得出弹性区应力的分布和弹塑性交界处的连续条件;然后在塑性区给出一个求解动态扩展问题的非线性微分方程组;最后通过打靶法数值求解该非线性微分方程组,给出满足边界条件的数值解,并讨论材料参数对场量的影响.结果表明,椭圆型屈服准则能很好地描述压力敏感性材料中孔洞的动态扩展.

关键词: 压力敏感材料;球形孔洞扩展;幂硬化材料;屈服准则
中图分类号: O344.7 **文献标志码:** A **文章编号:** 0367-6234(2010)04-0665-04

Dynamic spherical cavity expansion in the pressure sensitive medium

TANG Li-qiang[1], YU Xue-mei[1,2], WU Guo-hui[1]

(1. College of Aerospace and Civil Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China, tlq8854@126.com;
2. Aircraft Design Institute, AVIC Harbin Aircraft Industry Group Co. LTD., Harbin 150066, China)

Abstract: In order to study the characteristics of blast in geotechnical materials, the material behavior of power-hardening solid was investigated by the elliptic-equation yield criteria and self-similar hypothesis with a Hopkins three region model. First, by studying elastic region, the stress distribution and the continuous conditions in the intersection of plastic and elastic areas were given. Then the nonlinear differential equations to solve the problem of dynamic expansion in the plastic zone were deduced. At last, numerical solutions of the non-linear differential equations which meet with the given boundary conditions were obtained by shooting method, the effects of material parameters on the stress-strain fields were also discussed. Result shows that the elliptic-equation yield criteria can discribe the dynamic expansion of spherical cavity in pressure-sensitive medium.

Key words: pressure sensitive medium; spherical cavity expansion; power-hardening solid; yield criterion

压力敏感性材料在静水压力下存在塑性体积应变,其力学性能与金属材料有显著的不同.由于球形孔洞膨胀模型具有对称性、简便明确并易于给出应力和应变场解,从而揭示材料的变形本质,对压力敏感性材料中球形孔洞膨胀模型的深入研究已成为当前固体力学中的重要课题.自Taylor、Bishop、Hopkins等人在工程领域中做出了开创性的工作以来,根据岩土材料的变形机理,采用弹塑性力学[1-2]、损伤力学[3-4]、宏观-细观力学理论[5],建立材料本构方程的工作从来没有停止过.最近,较为关注压力敏感性材料球形孔洞动态扩展的问题.由于研究的领域不同,根据具体情况抽象出不同的受压球形(柱形)孔洞膨胀模型,从而在理论上解决实际工程问题.对于岩石、金属、混凝土等材料的高速冲击试验和理论问题,Forrestal和Tzou研究了混凝土靶的侵彻问题[6],Satapathy研究了脆性陶瓷中球形孔洞的动态扩展问题[7],M. Mata等研究了在理想塑性和幂硬化材料中压痕试验的球孔扩展与锥头尺寸的关系[8];在孔洞的动态扩展方面,Durban和Masri研究了在可压缩弹塑性Mises和Tresca固体以及在压力敏感弹塑性介质中孔洞的动态膨胀问题[9].应指出的是,这些研究大多采用M-C屈服准则或D-P

收稿日期: 2009-08-12.
基金项目: 黑龙江省自然科学基金资助项目(A2004-08).
作者简介: 唐立强(1948—),男,教授,博士生导师.

准则,而在球对称条件下,M – C 屈服准则和 D – P 准则具有相似的形式,即有效应力可以由 Σ_r、Σ_θ 线性表出,因此,减小了问题的复杂性.

本文首次采用椭圆型压力敏感性材料屈服准则和自相似假设,并结合三区模型,研究幂硬化材料球形孔洞动态扩展的问题. 最后通过数值计算讨论了不同条件下材料参数对场量的影响.

1 孔洞动态扩展模型

在自相似假设下,考虑一个半径为 A 受内压 P 作用的球形孔洞的动态扩展问题,设内径扩展速度 $\dot{A}$ 为常数. 问题模型如图 1 所示. 其中 $\xi = r/A$,A 为空间的内半径,ξ_i 为弹塑性交界,ξ_w 为波前相对尺度参数.

边界条件为

当 $\xi = 1$ 时,

$$V = 1, \Sigma_r = -p_0. \tag{1}$$

当 $\xi = \xi_i$ 时,

$$\Sigma_{re} = \Sigma_{rp}, V_e = V_p, \rho_e = \rho_p. \tag{2}$$

当 $\xi = \xi_w$ 时,

$$\rho = \rho_0, V = 0, \Sigma_r = \Sigma_\theta = 0. \tag{3}$$

式中:下标 e 表示弹性区,p 表示塑性区.

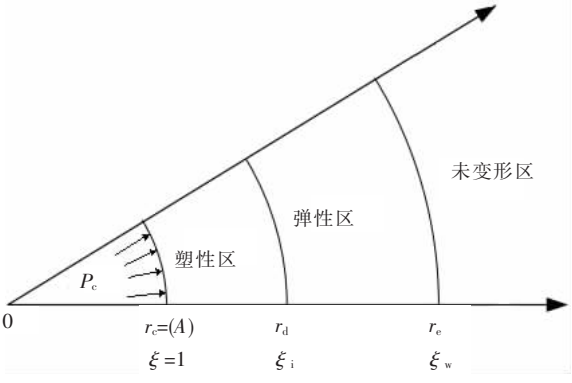


图 1 球形孔洞动态膨胀场示意图

2 基本方程

2.1 几何方程

采用球形坐标(r,θ,φ)可以得到几何方程:

$$\dot{\varepsilon}_r = \frac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}r} = \frac{\dot{A}}{A}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\xi}, \tag{4}$$

$$\dot{\varepsilon}_\theta = \dot{\varepsilon}_\varphi = \frac{\dot{r}}{r} = \frac{\dot{A}}{A}\frac{V}{\xi}. \tag{5}$$

2.2 运动方程

取量纲一化应力 $\Sigma_{ij} = \dfrac{\sigma_{ij}}{E}$,并采用自相似假设,则运动方程可以表达为[9]

$$\Sigma'_r + \frac{2}{\xi}(\Sigma_r - \Sigma_\theta) = m^2\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)(V - \xi)V'. \tag{6}$$

式中:( )′表示对 ξ 求导,ρ_0 为变形前的材料密度,$m = \dfrac{\dot{A}}{\sqrt{E/\rho_0}}$ 为球形孔洞量纲一化的膨胀速度.

2.3 本构方程

采用椭圆形屈服条件和塑性势函数,分别为

$$f = \frac{1}{2}S_{ij}S_{ij} + \frac{1}{2}\alpha_1^2\sigma_{kk}^2 - k_1^2 = 0, \tag{7}$$

$$g = \frac{1}{2}S_{ij}S_{ij} + \frac{1}{2}\alpha_2^2\sigma_{kk}^2 - k_2^2 = 0. \tag{8}$$

式中:k_1,k_2 为常数. α_1,α_2 反映了材料的压力敏感性. 当 $\alpha_1 = \alpha_2$ 时,材料是相关联的;而当 $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ 时,则退化为著名的 Mises 材料.

结合正交流动法则和材料的本构关系,可得幂硬化材料的本构方程为

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_r = (\dot{\Sigma}_r - 2\nu\dot{\Sigma}_\theta) - \left(\dfrac{2}{3} + \alpha_2^2\right)\dfrac{\Sigma_e}{\Sigma}\dot{\varepsilon}_p, \\ \dot{\varepsilon}_\theta = [-\nu\dot{\Sigma}_r + (1-\nu)\dot{\Sigma}_\theta] + \left(\dfrac{1}{3} - \alpha_2^2\right)\dfrac{\Sigma_e}{\Sigma}\dot{\varepsilon}_p. \end{cases} \tag{9}$$

Σ_e、Σ 为定义等效应力和塑性势. 在球对称条件下,有

$$\Sigma_e = \frac{\sigma_e}{E} = \left[\frac{1}{3}(\Sigma_\theta - \Sigma_r)^2 + \frac{1}{2}\alpha_1^2(\Sigma_r + 2\Sigma_\theta)^2\right]^{1/2}, \tag{10}$$

$$\Sigma = G/E = \left[\frac{1}{3}(\Sigma_\theta - \Sigma_r)^2 + \frac{1}{2}\alpha_2^2(\Sigma_r + 2\Sigma_\theta)^2\right]^{1/2}. \tag{11}$$

显然,若材料是相关联材料时,$\Sigma_e = \Sigma$.

2.4 控制方程

将式(4)、(5)代入式(7),并化简有

$$\begin{cases} V' = (V - \xi)[(\Sigma'_r - 2\nu\Sigma'_\theta) + (\dfrac{2}{3} + \alpha_2^2)\dfrac{\Sigma_e}{\Sigma}\varepsilon'_p], \\ \dfrac{V}{\xi} = (V - \xi)[-\nu\Sigma'_r + (1-\nu)\Sigma'_\theta + \\ (\dfrac{1}{3} - \alpha^2)\dfrac{\Sigma_e}{\Sigma}\varepsilon'_p]. \end{cases} \tag{12}$$

质量守恒方程 $\dfrac{\dot{\rho}}{\rho} + \mathrm{tr}\boldsymbol{D} = 0$ 在球对称条件下化为

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} + \dot{\varepsilon}_r + 2\dot{\varepsilon}_\theta = 0. \tag{13}$$

将式(12)带入式(13)并化简得

$$(V - \xi)\ln'\frac{\rho}{\rho_0} + V' + 2\frac{V}{\xi} = 0. \tag{14}$$

2.5 屈服条件

在塑性区,即当 $1 \leqslant \xi \leqslant \xi_i$ 时,材料满足屈服条件,即

$$\frac{1}{3}(\Sigma_\theta-\Sigma_r)^2+\frac{1}{2}\alpha_1^2(\Sigma_r+2\Sigma_\theta)^2=\Sigma_y^2. \quad (15)$$

其中,Σ_y 为量纲一化的屈服应力,$\Sigma_y=\frac{\sigma_s}{E}$($\sigma_s$ 为屈服应力).

综上所述,式(6)、(12)、(14)即构成了幂硬化材料的控制方程组,其中变量有(Σ_θ,Σ_r,V,ρ),4 个方程解 4 个未知数,方程是可解的.

3　弹性区的解

在弹性区,有 $\varepsilon_p=0$,此时式(9)即化为弹性本构关系. 考虑边界条件(1)~(3)以及在弹性区有 $|\Sigma_r|\ll 1$,$|\Sigma_\theta|\ll 1$,,则可求得弹性区的解为

$$\Sigma_r=-\frac{2C_2}{3\xi^3}-\frac{2\nu M^2}{1-2\nu}\frac{C_2}{\xi}+\frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)}C_2M^3, \quad (16)$$

$$\Sigma_\theta=\frac{C_2}{3\xi^3}-\frac{M^2}{1-2\nu}\frac{C_2}{\xi}+\frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)}C_2M^3, \quad (17)$$

$$\frac{\rho}{\rho_0}=\exp[-(1-2\nu)(\Sigma_r+2\Sigma_\theta)], \quad (18)$$

$$V=\xi\{1-\exp[(1+\nu)(\Sigma_r-\Sigma_\theta)]\}. \quad (19)$$

4　幂硬化材料塑性区的解

用文献[9]中的幂硬化假设 $\varepsilon_p=B\Sigma_e^n$,则可推出塑性区解的表达式为

$$\rho=\rho_0\exp(-K), \quad (20)$$

$$V=\xi(1-e^{\Phi}), \quad (21)$$

$$\Sigma'_r=\frac{A_7A_{12}-A_6A_{10}}{A_5A_{12}-A_6A_{11}}, \quad (22)$$

$$\Sigma'_\theta=\frac{A_5A_{10}-A_7A_{11}}{A_5A_{12}-A_6A_{11}}. \quad (23)$$

其中:

$$K=(1-2\nu)(\Sigma_r+2\Sigma_\theta)-3\alpha^2\frac{\Sigma_e}{\Sigma}\varepsilon_p,$$

$$\Phi=(1+\nu)(\Sigma_r-\Sigma_\theta)-\frac{\Sigma_e}{\Sigma}\varepsilon_p,$$

$$A_1=\frac{2}{3}(\Sigma_\theta-\Sigma_r)+2\alpha_1^2(\Sigma_r+2\Sigma_\theta),$$

$$A_2=\alpha_1^2(\Sigma_r+2\Sigma_\theta)-\frac{2}{3}(\Sigma_\theta-\Sigma_r),$$

$$A_3=\frac{2}{3}(\Sigma_\theta-\Sigma_r)+2\alpha_2^2(\Sigma_r+2\Sigma_\theta),$$

$$A_4=\alpha_2^2(\Sigma_r+2\Sigma_\theta)-\frac{2}{3}(\Sigma_\theta-\Sigma_r),$$

$$A_5=\frac{\left(\frac{1}{3}-\alpha_2^2\right)Bn\Sigma_e^{n-1}}{2\Sigma}A_2-\nu,$$

$$A_6=\frac{\left(\frac{1}{3}-\alpha^2\right)Bn\Sigma_e^{n-1}}{2\Sigma}A_1+1-\nu,$$

$$A_7=\frac{1}{\xi}[1-e^{-\Phi}],$$

$$A_8=1+\nu-\frac{\varepsilon_p}{2\Sigma\Sigma_e}A_2-\frac{Bn\Sigma_e^{n-1}}{2\Sigma}A_2+\frac{\varepsilon_p\Sigma_e}{2\Sigma^3}A_4,$$

$$A_9=-1-\nu-\frac{\varepsilon_p}{2\Sigma\Sigma_e}A_1-\frac{Bn\Sigma_e^{n-1}}{2\Sigma}A_1+\frac{\varepsilon_p\Sigma_e}{2\Sigma^3}A_3,$$

$$A_{10}=m^2\xi e^{\Phi-K}(e^{\Phi}-1)+\frac{2}{\xi}(\Sigma_\theta-\Sigma_r),$$

$$A_{11}=1+m^2\xi^2e^{2\Phi-K}A_8,A_{12}=m^2\xi^2e^{2\Phi-K}A_9.$$

方程(20)~(23)结合(16)、(17)确定的初始条件通过数值算法即可求出塑性区的场量分布. 注意到当 $\varepsilon_p=0$ 时,解(20)~(23)即化为弹性区的解.

5　数值计算

方程(16)、(17)中存在两个待定参数 ξ_i 和 C_2,在弹塑性边界,应力应满足屈服条件(15),即有

$$\frac{1}{3\xi_i^2}\left(\frac{1}{\xi_i^2}-M^2\right)^2+\frac{2\alpha_1^2(1+\nu)^2}{(1-2\nu)^2}M^4\left(M+\frac{1}{\xi_i}\right)^2=\Sigma_{0y}^2/C_2^2.$$

因此,参数 ξ_i 和 C_2 是相关的. 在计算中只需采用打靶法,给定任意的 $\xi_i\geqslant 1$,,把计算的应力场带入式(21),直到在 $\xi=1$ 处满足 $V=1$ 为止.

对相关参数分别取不同值,通过数值计算确定各参数对场量的影响.

1)考察泊松比 ν 对场量的影响

当 $m=0.25$,$B=100$,$n=2$,$\alpha_1=0.25$,$\alpha_2=0.1$,$\nu=0.15/0.35$ 时,结果见图 2.

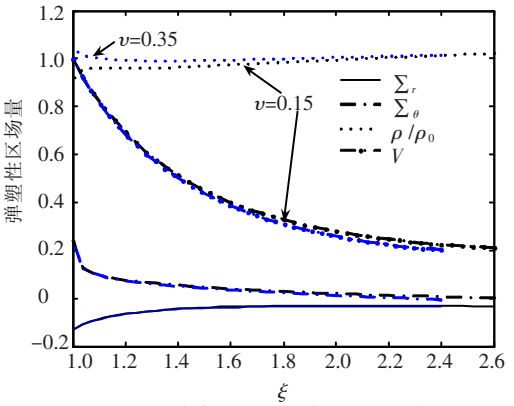


图 2　不同泊松比 ν 对场量的影响

2)考察 m 对场量的影响

当 $\nu=0.25$,$B=100$,$n=2$,$\alpha_1=0.25$,$\alpha_2=0.1$,$m=0.15/0.35$ 时,结果见图 3.

3)若材料是相关联的,考察压力敏感性参数

$\alpha_1 = \alpha_2$ 对场量的影响

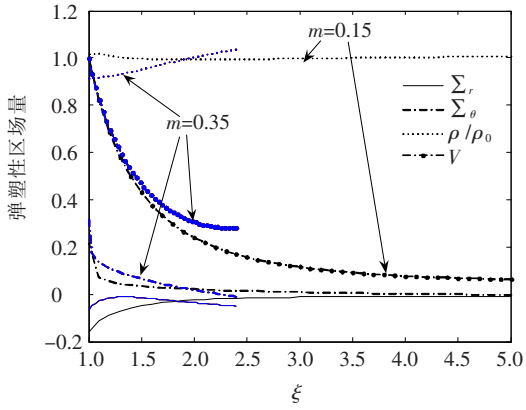


图 3 不同孔洞膨胀速度 m 对场量的影响

当材料参数 $\nu = 0.25, B = 100, n = 2, m = 0.25, \alpha_1^2 = \alpha_2^2 = 0/0.25$ 时，结果见图 4.

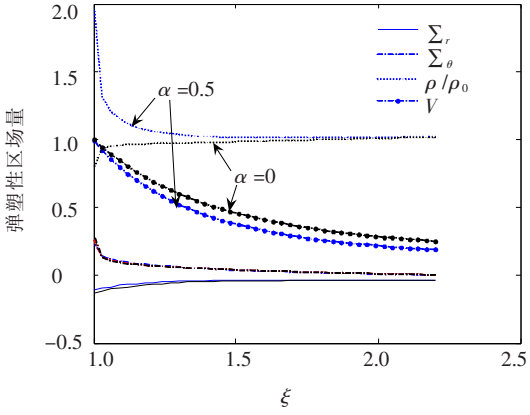


图 4 相关联材料，不同 $\alpha_1 = \alpha_2$ 对场量的影响

4）若材料是非相关联的，考察参数 α_1, α_2 对场量的影响

当材料参数 $\mu = 0.25$, $B = 100$, $n = 2, m = 0.25, \alpha_1^2 = 0, \alpha_2^2 = 0.15$ 和 $\alpha_1^2 = 0.15, \alpha_2^2 = 0$ 时，结果见图 5. 图中标注的 α_1、α_2 均指平方项.

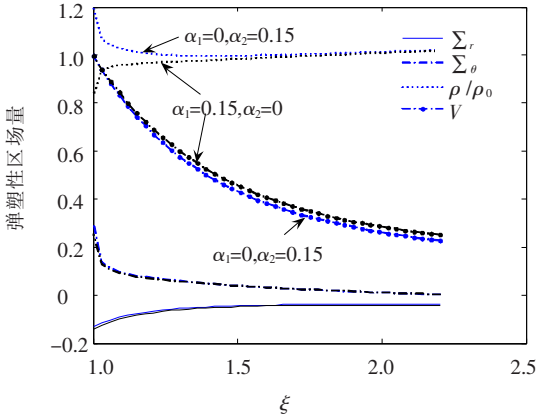


图 5 非关联材料，α_1, α_2 对场量的影响

6 结 论

1）在塑性变形区内，应力和应变（绝对值）随着 ξ 的减小而增大，在内半径处达到极大值，满足球形孔洞膨胀特征.

2）在塑性变形区内，随着 ξ 的增大，V 值减小，在弹塑性边界 ξ_i 处其与弹性区保持连续.

3）在塑性变形区内，ρ/ρ_0 的变化是复杂的. 从方程（20）可以看出 ρ/ρ_0 的变化不仅与 α_2 相关，而且与泊松比 ν 相关. 在 ν 较小时，弹性的体积变形大于塑性体积变形，出现 $\rho/\rho_0 \leqslant 1$ 的现象，在 $\nu = 0.35$ 时，在边界处 $\rho/\rho_0 \geqslant 1$，说明在塑性变形区内有硬化现象的发生（见图 2）.

4）量纲一化的膨胀速度 m 对塑性区的大小有较大影响. 在内半径处 V 保持常数，随着 m 的减小，塑性区的尺度增大. 另外，m 对塑性区的应力、速度、密度场均有影响（见图 3）.

5）关联参数 α_1, α_2 对应力场的影响很小，但影响 ρ/ρ_0 的变化. 当 $\alpha_1^2 = 0, \alpha_2^2 = 0.15$ 时，在边界附近 $\rho/\rho_0 \geqslant 1$；当 $\alpha_1^2 = 0.15, \alpha_2^2 = 0$ 时，在边界附近 $\rho/\rho_0 \leqslant 1$. 因而关联参数 α_2 影响 ρ/ρ_0 的变化（见图 4，5）.

参考文献：

[1] MASRI R, DURBAN D. Quasi - static cylindrical cavity expansion in an elastoplastic compressible Mises solid [J]. International Journal of Solids and Structures, 2006, 43: 7518 - 7533.

[2] WU Guohui, WANG Yong, TANG Liqiang, *et al.* Cavity dynamic formation and bifurcation of the rubber—like sphere[J]. Key Engineering Materials, 2008, 385/387: 53 - 56.

[3] ZAIRI F, NAIT - ABDELAZIZ M, GLOAGUEN J M, *et al.* Modeling of the elasto - viscoplastic damage behavior of glassy polymers[J]. International Journal of Plasticity, 2008, 24(6): 945 - 965.

[4] 余寿文，冯西桥. 损伤力学[M]. 北京：清华大学出版社，1997.

[5] 王自强，黄筑平. 细观塑性理论[M]. 北京：科学出版社，1996.

[6] FORRESTAL M J, TZOU D Y. A spherical cavity expansion penetration model for concrete targets[J]. International Journal of Plasticity, 1998, 14(1/3): 173 - 191.

[7] MATA M, CASALS O, ALCALA J. The plastic zone size in indentation experiments: The ananlogy with the expansion of a spherical cavity[J]. International Journal of Solid and Structures, 2006, 43: 5994 - 6013.

[8] SATAPATHY S. Dynamic spherical cavity expansion in brittle ceramics[J]. International Journal of Solids and Structures, 2001, 38(32/33): 5833 - 5845.

[9] DURBAN D, MASRI R. Dynamic spherical cavity expansion in a pressure sensitive elastoplastic medium [J]. International Journal of Solids and Structures, 2004, 41: 5697 - 5716.

（编辑 刘 彤）